

Estimacions pel model d'Anderson parabòlic

Samy Tindel

Université de Lorraine

Seminari de Probabilitats - Barcelona 2015

Amb Yaozhong Hu, Jingyu Huang i David Nualart

Outline

- 1 Introducció
 - Motivacions
 - Objectiu
- 2 Resultats principals
 - Mètode probabilista
 - Mètode trajectorial
- 3 Elements de demostració

Outline

1 Introducció

- Motivacions
- Objectiu

2 Resultats principals

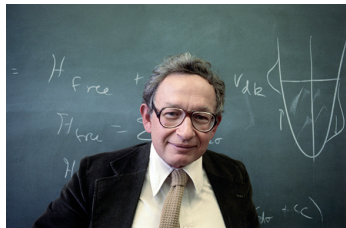
- Mètode probabilista
- Mètode trajectorial

3 Elements de demostració

Una mica d'història

Philip Anderson:

- Nascut el 1923
- Moltes contribucions
↪ en condensed matter physics
- Contribueix al mecanisme de Higgs
- Premi Nobel el 1977
- Encara Professor a Princeton



Un dels descobriments d'Anderson:

Per partícules en un medi desordenat

↪ Comportament localitzat en lloc de difusió.

Equació considerada

Equació:

Equació de la calor en \mathbb{R}^d :

$$\partial_t u_{t,x} = \frac{1}{2} \Delta u_{t,x} + u_{t,x} \dot{W}_{t,x}, \quad (1)$$

amb

- $t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d$.
- \dot{W} soroll gaussià general, amb covariància espai-temps.
- Diferencial $u_{t,x} \dot{W}_{t,x}$: Stratonovich o Skorohod.

Outline

1 Introducció

- Motivacions
- Objectiu

2 Resultats principals

- Mètode probabilista
- Mètode trajectorial

3 Elements de demostració

Motivation 1: Resolució de SPDEs

Equació més general:

$$\partial_t u_{t,x} = Lu_{t,x} + G(u_{t,x}) + F(u_{t,x}) \dot{W}_{t,x},$$

amb

- operador el.líptic general L
- Coeficient polinomial G
- Coeficient regular i afitat F

Resolució de SPDEs (2)

Resolució, Browniana W :

- Peszat-Zabczyk
- Dalang

Resolució, cas rough paths:

- Caruana-Friz-Oberhauser
- Lejay, Gubinelli-T, Gubinelli-T, Deya-Gubinelli-T
- Hairer

Temes relacionats:

- Equació KPZ (Gubinelli-Perkowski, Hairer, Zambotti)
- Filtratge, equacions backward, control estocàstic (Friz et al.)

Pregunta:

Es pot dir més de u en el cas simple bilineal $u_{t,x} \dot{W}_{t,x}$?

Motivació 2: Homogenització

Problem: Règim asimptòtic per

$$\partial_t u_{t,x}^\varepsilon = \frac{1}{2} \Delta u_{t,x}^\varepsilon + \varepsilon^{-\beta} u_{t,x} V_{\frac{t}{\varepsilon^\alpha}, \frac{x}{\varepsilon}},$$

amb V camp aleatori estacionari.

Relació amb SPDEs:

- Existeixen valors de α, β, V tal que $u^\varepsilon \rightarrow u$.
- Anàlisi via fórmula de Feynman-Kac .
- Veure Iftimie-Pardoux-Piatnitski, Bal-Gu.

Fenomen:

- EDPs oscil.lants que convergeixen cap a una EDPS.

Motivació 3: Intermitència

Equació: $\partial_t u_{t,x} = \frac{1}{2} \Delta u_{t,x} + \lambda u_{t,x} \dot{W}_{t,x}$

Fenomen: La solució u concentra la seva energia en pics alts.

Caracterització: pels moments

↪ Definició possible d'intermitència: per tot $k_1 > k_2 \geq 1$

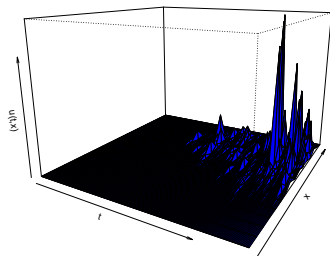
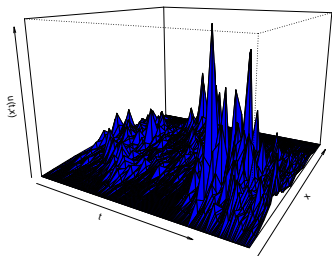
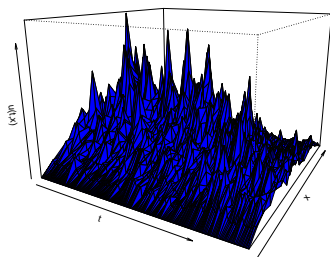
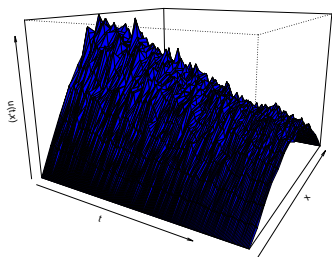
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{E}^{1/k_1} \left[|u_{t,x}|^{k_1} \right]}{\mathbf{E}^{1/k_2} \left[|u_{t,x}|^{k_2} \right]} = \infty.$$

Resultats:

- Soroll blanc en temps: Khoshnevisan, Foondun, Conus, Joseph
- Soroll fraccionari en temps: Balan-Conus
- Anàlisi via fórmula de Feynman-Kac

Intermitència: il.lustració (Daniel Conus)

Simulació: per $\lambda = 0.1, 0.5, 1$ i 2 .



Motivació 4: Polímers

Mesura de Wiener independent:

Brownià d -dimensional B^x , mesura de Wiener \mathbf{P}_B .

Hamiltonià per $t > 0$: $-H_t(B^x) = \int_0^t W(ds, B_s^x)$.

Mesura de Gibbs: per $\beta > 0$,

$$dG_t^x(B) = \frac{e^{-\beta H_t(B^x)}}{u_{t,x}} d\mathbf{P}_B.$$

Estudis en el cas continu:

Rovira-T, Lacoïn, Alberts-Khanin-Quastel.

Equivalent d'intermitència: Localització.

↔ Veure Carmona-Hu, König-Lacoïn-Mörters-Sidorova

Localització: il.lustració 1

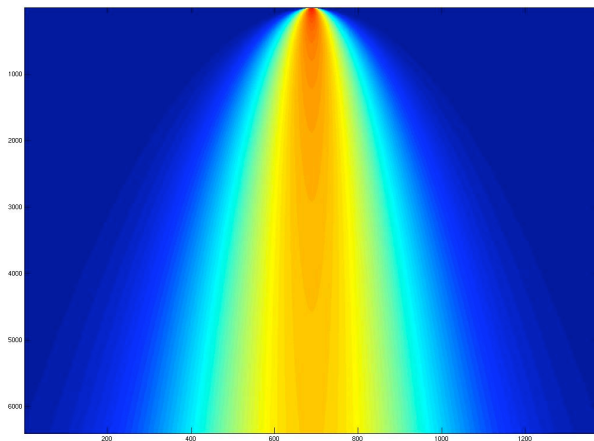


Figure : Distribució del passeig aleatori simple

Localització: il.lustració 2

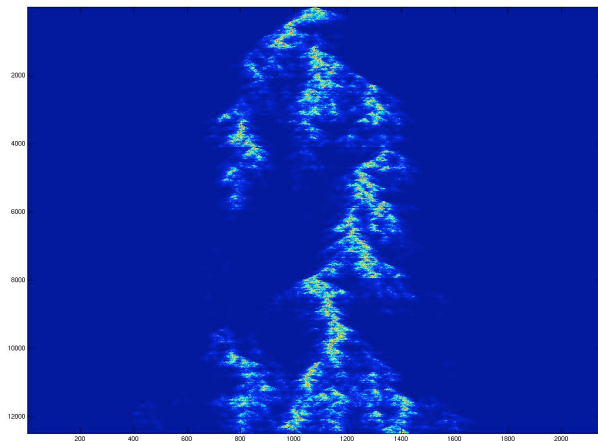
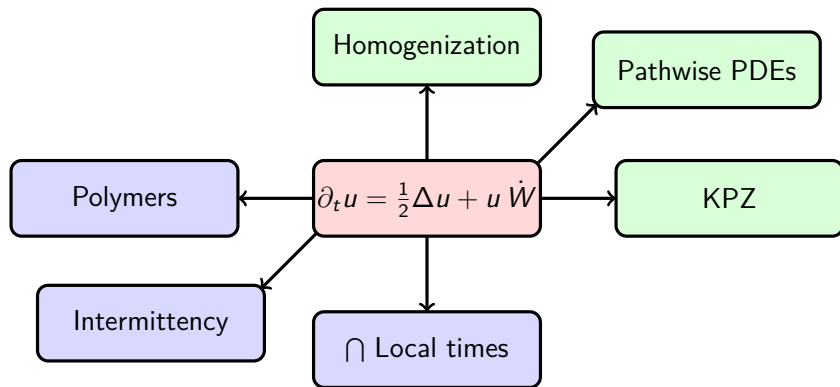


Figure : Distribució del polímer (desordre fort)

Motivació: resum



Outline

1 Introducció

- Motivacions
- Objectiu

2 Resultats principals

- Mètode probabilista
- Mètode trajectorial

3 Elements de demostració

Objectiu

Equació:

Equació de la calor en \mathbb{R}^d :

$$\partial_t u_{t,x} = \frac{1}{2} \Delta u_{t,x} + u_{t,x} \dot{W}_{t,x}.$$

Resultats principals: per un soroll gaussià general:

- Resolució per equacions de tipus Skorohod i Stratonovich.
- Representació de Feynman-Kac.
- Relacions entre solució de Feynman-Kac i trajectorial.
- Estimacions d'intermitència.

Outline

- 1 Introducció
 - Motivacions
 - Objectiu
- 2 Resultats principals
 - Mètode probabilista
 - Mètode trajectorial
- 3 Elements de demostració

Descripció del soroll

El soroll com a distribució aleatòria:

- $W = \{W(\varphi); \varphi \in \mathcal{H}\}$ família gaussiana centrada
- $\mathbf{E}[W(\varphi)W(\psi)] = \langle \varphi, \psi \rangle_{\mathcal{H}}$ amb:

$$\begin{aligned}\langle \varphi, \psi \rangle_{\mathcal{H}} &= \int_{\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}^{2d}} \varphi(s, x) \psi(t, y) \gamma(s-t) \Lambda(x-y) dx dy ds dt \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}^d} \mathcal{F}\varphi(s, \xi) \overline{\mathcal{F}\psi}(t, \xi) \gamma(s-t) \mu(d\xi) ds dt,\end{aligned}$$

- γ, Λ funcions positives definides
- μ mesura temperada

Remark: Hipòtesis clàssiques (Peszat-Zabczyk, Dalang).

Exemples típics de soroll

Covariància	Singularitat en 0	TF: sing. al ∞	Irregularitat
$\gamma(t)$	$ t ^{-\beta}$	Not used	$\mathcal{B}^{-\beta/2}$
$\Lambda(x)$	$ x ^{-\eta}$	$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\mu(d\xi)}{1+ \xi ^\eta} < \infty$	$\mathcal{B}^{-\eta/2}$

Outline

- 1 Introducció
 - Motivacions
 - Objectiu
- 2 Resultats principals
 - **Mètode probabilista**
 - Mètode trajectorial
- 3 Elements de demostració

Equació de Stratonovich

Hipòtesi sobre γ : La funció γ satisfà

$$0 \leq \gamma(t) \leq C_\beta |t|^{-\beta}, \quad \text{amb } \beta \in (0, 1).$$

Hipòtesi sobre μ : Suposem la condició d'integrabilitat

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\mu(d\xi)}{1 + |\xi|^{2-2\beta}} < \infty.$$

Exemple: Nucli de Riesz en espai,

- $\Lambda(x) = |x|^{-\eta}$.
- $0 < \eta < 2 - 2\beta$.
- $0 \leq \gamma(t) \leq C_\beta |t|^{-\beta}$.

Solució de Feynman-Kac

Theorem 1.

Suposem:

- Hipòtesis previes sobre γ i μ , i $u_0 \in C_b(\mathbb{R}^d)$.

Per un Brownià B independent de W , posem

$$V_{t,x} = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \delta_0(B_{t-r}^x - y) W(dr, dy), \quad u_{t,x}^F = \mathbf{E}_B \left[u_0(B_t^x) e^{V_{t,x}} \right]$$

Llavors u^F definit, solució de

$$u_{t,x} = p_t u_0(x) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} p_{t-s}(x-y) u_{s,y} W(ds, dy),$$

interpretat en el sentit de Malliavin - Stratonovich.

Proof:

\hookrightarrow Integrabilitat exponencial de $V_{t,x}$.

Estimacions de moments

Theorem 2.

Suposem:

- $c_0 |t|^{-\beta} \leq \gamma(t) \leq C_0 |t|^{-\beta}$.
- $c_1 |x|^{-\eta} \leq \Lambda(x) \leq C_1 |x|^{-\eta}$.

Llavors, quan està definit, u^F satisfà:

$$\exp\left(c_2 t^{\frac{4-2\beta-\eta}{2-\eta}} k^{\frac{4-\eta}{2-\eta}}\right) \leq \mathbf{E}\left[u_{t,x}^k\right] \leq \exp\left(C_2 t^{\frac{4-2\beta-\eta}{2-\eta}} k^{\frac{4-\eta}{2-\eta}}\right).$$

Remarks: (i) Aquest resulta implica **intermitència**.

(ii) Extensions: altres casos de Λ com δ_0 , cas de soroll en espai.

(iii) Demostració: representació de Feynman-Kac, boles petites.

Equació de Skorohod

Equació de tipus Skorohod:

$$u_{t,x} = p_t u_0(x) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} p_{t-s}(x-y) u_{s,y} \diamond \dot{W}_{s,y} ds dy.$$

Resultats:

- Existència-unicitat, menys condicions sobre μ i γ .
- Feynman-Kac pels moments.
- Estimacions d'intermitència.

Outline

- 1 Introducció
 - Motivacions
 - Objectiu
- 2 Resultats principals
 - Méthode probabilista
 - Méthode trajectorial
- 3 Elements de demostració

Solució trajectorial per PAM

Theorem 3.

Suposem que W té covariància definida per γ i Λ i:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\mu(d\xi)}{1 + |\xi|^{2-2\beta-\varepsilon}} < \infty.$$

Considerem l'equació:

$$\partial_t u_{t,x} = \frac{1}{2} \Delta u_{t,x} + u_{t,x} \dot{W}_{t,x}, \quad (2)$$

interpretada en el sentit de Young. Llavors:

- Eq. (2) té una **única** solució en $C^{\frac{\beta}{2}}([0, T]; \mathcal{B}_{1-\beta})$.
- $\mathcal{B}_{1-\beta}$ és un espai de Besov amb pesos a \mathbb{R}^d .
- La solució única de (2) és u^F .

Outline

- 1 Introducció
 - Motivacions
 - Objectiu
- 2 Resultats principals
 - Mètode probabilista
 - Mètode trajectorial
- 3 Elements de demostració

Funcional de Feynman-Kac

Proposition 4.

Suposem que γ i μ satisfan (amb $\beta \in (0, 1)$):

$$0 \leq \gamma(t) \leq C_\beta |t|^{-\beta}, \quad \text{i} \quad \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\mu(d\xi)}{1 + |\xi|^{2-2\beta}} < \infty.$$

Posem:

$$V_{t,x} = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \delta_0(B_{t-r}^x - y) W(dr, dy),$$

Llavors per tot $\lambda \in \mathbb{R}$ i $T > 0$:

$$\sup_{t \in [0, T], x \in \mathbb{R}^d} \mathbf{E} [\exp(\lambda V_{t,x})] < \infty.$$

Demostració 1: Càlculs Gaussians

Pas Gaussià facil: condicionalment a B , $V_{t,x}$ és Gaussià. Doncs

$$\mathbf{E} [\exp (\lambda V_{t,x})] = \mathbf{E}_B \left[\exp \left(\frac{\lambda^2}{2} Y \right) \right],$$

on

$$Y = 2 \int_{0 \leq r \leq s \leq t} \gamma(r-s) \Lambda(B_r - B_s) dr ds .$$

Objectiu:

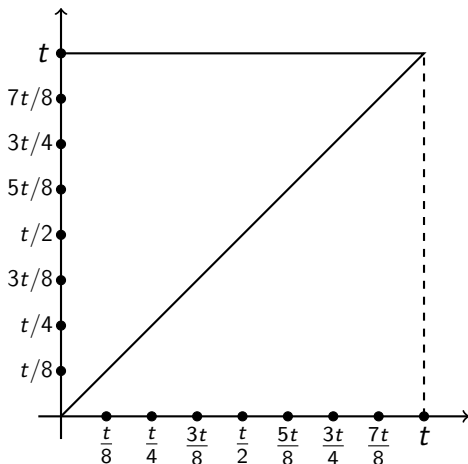
Control singularitats en $r - s$ pels moments de Y .

Mètode:

Inspirat per la renormalització del temps local d'intersecció de Le Gall.

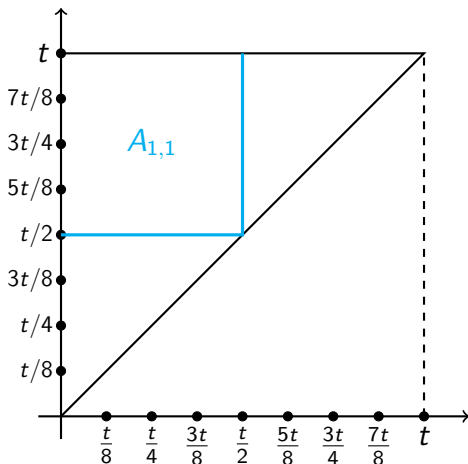
↔ Partició del simplex $0 \leq r \leq s \leq t$.

Demostració 2: Partició de Le Gall



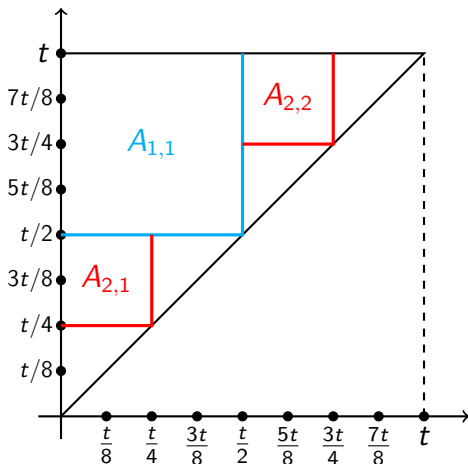
Resultat: Partició $\{A_{n,k}; n \geq 1, k = 1, \dots, 2^{n-1}\}$ del simplex

Demostració 2: Partició de Le Gall



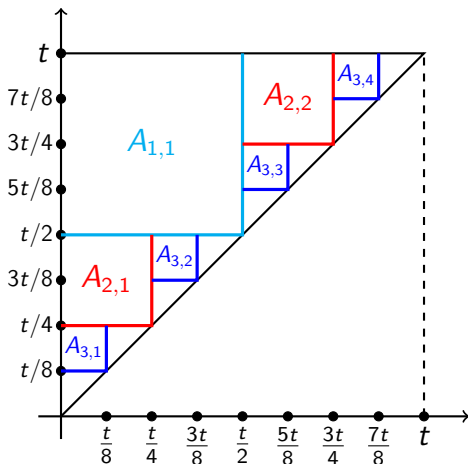
Resultat: Partició $\{A_{n,k}; n \geq 1, k = 1, \dots, 2^{n-1}\}$ del simplex

Demostració 2: Partició de Le Gall



Resultat: Partició $\{A_{n,k}; n \geq 1, k = 1, \dots, 2^{n-1}\}$ del simplex

Demostració 2: Partició de Le Gall



Resultat: Partició $\{A_{n,k}; n \geq 1, k = 1, \dots, 2^{n-1}\}$ del simplex

Demostració 3: treure singularitats

Família de variables aleatòries: posem

$$a_{n,k} = \int_{A_{n,k}} \gamma(r-s) \Lambda(B_r - B_s) dr ds.$$

Relació amb Y : Tenim

- $Y = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} a_{n,k}$
- Per n fixat
 \hookrightarrow Variables aleatòries $\{a_{n,k}; k = 1, \dots, 2^{n-1}\}$ són independents.
- Identitat en llei: per 2 brownians independents B, \tilde{B} ,

$$a_{n,k} \stackrel{(d)}{=} \int_0^{\frac{t}{2^n}} \int_0^{\frac{t}{2^n}} \gamma(r+s) \Lambda(B_r + \tilde{B}_s) ds dr$$

Per tant $(r-s)^{-1} \rightarrow$ singularitat més maca $(r+s)^{-1}$.

- Resta de la demostració: càlculs integrals amb p, γ, Λ .