El complex de Cenkl-Porter

Jordi Garriga Puig

S'ha seguit les notes de l'article de Hanke [3], que es basa en [1, 2].

Denotem per $\mathbb{Q}_q$ l'anell

$$\mathbb{Q}_q = \mathbb{Z}[l^{-1} : l \leq q, l \text{ primer}],$$

és a dir, el subanell de $\mathbb{Q}$ més petit pel qual tots els primers $l \leq q$ són invertibles.

1 Introducció

Sigui X un conjunt simplicial. El nostre objectiu és introduir el **complex de Cenkl-Porter** $T^{*,*}(X)$, que és un refinament de l'àlgebra de Sullivan $A^*(X;\mathbb{Q})$ que s'utilitza en homotopia racional.

A diferència de l'àlgebra de Sullivan, que es basa en formes en el símplex estàndard Δ^n, en el complex de Cenkl-Porter utilitzarem formes cúbiques, és a dir, formes en cubs

$$I^n = I \times \cdots \times I.$$

Aquesta construcció ens permetrà definir una filtració en el complex de Cenkl-Porter de manera que en cada nivell de la filtració tindrem una cohomologia en el sentit de [2]. A més, el nivell q de la filtració estarà definit sobre $\mathbb{Q}_q$.

En primer lloc, veurem com podem treballar amb formes cúbiques en un conjunts simplicial, considerant una subdivisió cúbica canònica del símplex estàndard Δ^n.

A continuació, per cada $q \geq 1$ definirem el complex de Cenkl-Porter $T^{*,q}(X)$, provarem que cada nivell de la filtració $T^{*,q}(X)$ defineix una cohomologia i acabarem provant el principal resultat d'aquestes notes, que ens diu que per cada $q \geq 1$ tenim un isomorfisme natural

$$H^*(T^{*,q}(X)) \cong H^*(X;\mathbb{Q}_q)$$

que respecta l'estructura multiplicativa, és a dir, per cada $p_1, p_2 \geq 0$ el següent diagrama commuta

$$\begin{tikzcd}
H^{p_1}(T^{*,q_1}(X)) \otimes H^{p_2}(T^{*,q_2}(X)) \arrow[r, "\wedge"] \arrow[d, "\cong"] & H^{p_1+p_2}(T^{*,q_1+q_2}(X)) \arrow[d, "\cong"] \\
H^{p_1}(X;\mathbb{Q}_{q_1}) \otimes H^{p_2}(X;\mathbb{Q}_{q_2}) \arrow[r, "\cup"] & H^{p_1+p_2}(X;\mathbb{Q}_{q_1+q_2})
\end{tikzcd}$$

2 Conjunts simplicials

Si bé el complex de Cenkl-Porter utilitza formes cúbiques, ens interessa poder-lo definir sobre un conjunt simplicial, així que hem de justificar-ne la compatibilitat. En primer lloc, anem a recordar la definició de conjunt simplicial.

Definició 2.1. *Un **conjunt simplicial** X és un conjunt graduat en els enters no negatius amb aplicacions*

$$\partial_i : X_q \to X_{q-1} \qquad s_i : X_q \to X_{q+1}$$

*per cada $0 \leq i \leq q$ que satisfan les següents **identitats simplicials**:*

a) $\partial_i \partial_j = \partial_{j-1} \partial_i$ *si* $i < j$,

b) $s_i s_j = s_{j+1} s_i$ *si* $i \leq j$,

c) $\partial_i s_j = \begin{cases} s_{j-1}\partial_i & \text{si } i < j \\ id & \text{si } i = j \text{ o } i = j+1 \\ s_j \partial_{i-1} & \text{si } i > j+1. \end{cases}$

*Diem que un elements de X_q és un q-**símplex**, i diem que les aplicacions ∂_i i s_i son els operadors **cara** i **degeneració**, respectivament.*

Més en general, el conjunt X pot incorporar una estructura addicional. Serà especialment interessant el cas de les àlgebres diferencials graduades commutatives simplicials (DGCA simplicial).

Com hem comentat abans, el complex de Cenkl-Porter treballa amb formes cúbiques, concretament amb formes en una descomposició cúbica canònica del símplex estàndard Δ^n. Notem que això ens permet treballar amb conjunts simplicials.

Identifiquem el símplex estàndard Δ^n amb el subconjunt

$$\Delta^n = \left\{ (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : 0 \leq x_i \leq 1, \prod_{i=0}^{n} x_i = 0 \right\},$$

que està contingut en la vora del $(n+1)$-cub I^{n+1}. Els vèrtex $v_0, \ldots, v_n$ de Δ^n venen donats per

$$v_i = (1, \ldots, 1, 0, 1, \ldots, 1),$$

amb un 0 en la posició i. Les aplicacions vora i degeneració

$$\partial_i : \Delta^{n-1} \to \Delta^n \qquad s_i : \Delta^{n+1} \to \Delta^n$$

venen donades per

$$\partial_i(x_0, \ldots, x_{n-1}) = (x_0, \ldots, x_{i-1}, 1, x_i, \ldots, x_{n-1})$$

$$s_i(x_0, \ldots, x_{n+1}) = (x_0, \ldots, x_{i-1}, x_i \cdot x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{n+1}).$$

Es pot provar que aquesta definició del símplex estàndard Δ^n és homeomorfa a la definició habitual.

3 El complex de Cenkl-Porter

Considerem l'àlgebra lliure graduada sobre $\mathbb{Z}$

$$A = \mathbb{Z}[t_0, \dots, t_n] \otimes \Lambda_{\mathbb{Z}}(dt_0, \dots, dt_n)$$

on $|t_i| = 0$ i $|dt_i| = 1$. Diem que un monomi de la forma

$$t_0^{\alpha_0} \cdot \dots \cdot t_n^{\alpha_n} dt_0^{\epsilon_0} \cdot \dots \cdot dt_n^{\epsilon_n},$$

on $\alpha_i \geq 0$ i $0 \leq \epsilon \leq 1$ té **grau de filtració** $\max_{i=0}^{n}\{\alpha_i + \epsilon_i\}$. Notem que els monomis amb grau de filtració 0 són les constants.

Sigui $I \subset A$ l'ideal generat pels monomis amb $\alpha_i + \epsilon_i > 0$ per tot $0 \leq i \leq n$. El quocient

$$A/I = (\mathbb{Z}[t_0, \dots, t_n] \otimes \Lambda_{\mathbb{Z}}(dt_0, \dots, dt_n))/I$$

és una àlgebra graduada que anomenarem l'**àlgebra de formes polinomials compatibles amb la descomposició cúbica del símplex** Δ^n. Podem veure que les formes que sobreviuen en aquesta construcció son les formes no nul·les sobre les cares del $(n+1)$-cub I^{n+1}

$$C_i = I^{n+1} \cap \{x_i = 0\},$$

que són exactament les que identifiquem amb el símplex estàndard Δ^n.

Llavors, per cada $p, q \geq 0$ prenem

$$T_n^{p,q}(\mathbb{Z}) \subset ((\mathbb{Z}[t_0, \dots, t_n] \otimes \Lambda_{\mathbb{Z}}(dt_0, \dots, dt_n))/I)^p$$

el $\mathbb{Z}$-modul generat pels monomis de grau p i amb grau de filtració com a molt q.

El producte exterior de formes indueix un producte

$$\wedge : T_n^{p_1,q_1}(\mathbb{Z}) \otimes T_n^{p_2,q_2}(\mathbb{Z}) \to T_n^{p_1+p_2,q_1+q_2}(\mathbb{Z}).$$

Podem definir una aplicació covora

$$d : T_n^{p,q}(\mathbb{Z}) \to T_n^{p+1,q}(\mathbb{Z})$$

donada per $d(t_i) = dt_i$ i $d(dt_i) = 0$.

Finalment, definint

$$T_n^{p,q} := T_n^{p,q}(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}_q$$

obtenim una àlgebra diferencial graduada commutativa i filtrada (CDGA filtrada). A més, el pullback de les aplicacions vora ∂_i i degeneració s_i indueix aplicacions de CDGA filtrades

$$\partial_i : T_n^{*,*} \to T_{n-1}^{*,*} \qquad s_i : T_n^{*,*} \to T_{n+1}^{*,*},$$

que satisfan les identitats simplicials, amb el que concloem que $(T_n^{*,*})_n$ té una estructura de CDGA filtrada simplicial.

Definició 3.1. *Sigui X un complex simplicial. Definim una CDGA filtrada*

$$T^{*,q}(X) := \mathrm{Hom}_{sSets}(X, T^{*,q})$$

que anomenem el ***complex de formes polinomials sobre*** X ***de Cenkl-Porter****.*

Els elements de $T^{*,q}(X)$ són aplicacions ϕ que associen a cada element cúbic F de la subdivisió cúbica X una forma $\phi(F)$ de T_n^* compatible amb l'estructura de conjunt simplicial, és a dir, per cada cara J de F, $w(J)$ és la restricció de $w(F)$ a la cara J.

4 Teorema de Cenkl-Porter

L'objectiu principal de la construcció de Cenkl-Porter és comparar $H^*(T^{*,q}(X))$ amb la cohomologia simplicial de X. Això ho veurem seguint les eines que desenvolupa [2].

Definició 4.1. *Sigui $A^* = \oplus_{n\geq 0} A^n$ una DGCA simplicial. Diem que A^* satisfà els axiomes d'una* ***teoria cohomològica*** *si*

a) *la successió*

$$A^0 \xrightarrow{d} A^1 \xrightarrow{d} A^2 \to \cdots$$

és exacta i el nucli $Z^0A = \ker(d : A^0 \to A^1)$ (que és una àlgebra simplicial) és simplicialment trivial, és a dir, les aplicacions cara i degeneració són isomorfismes;

b) *per tot $n \geq 0$, A^n es contràctil, és a dir, tots els grups d'homotopia $\pi_p(A^n)$ son nuls.*

Denotem $R(A) = (Z^0A)_0$.

Per comprovar el segon axioma, tenim que el p-èssim grup d'homotopia $\pi_p(A^n)$ ve donat per la p-èssima homologia del complex de cadenes

$$\cdots \to (A^n)_{p+1} \to (A^n)_p \to (A^n)_{p-1} \to \cdots ,$$

on els diferencials venen donats per la suma alternada de l'operador cara.

Si X és un conjunts simplicial i A^* és una DGCA simplicial, denotem

$$A^*(X) = \mathrm{Hom}_{sSets}(X, A^*)$$

Teorema 4.2. *Sigui A^* és una DGCA simpicial que satisfà els axiomes d'una teoria cohomològica, llavors tenim un isomorfisme*

$$H^*(A^*(X)) \cong H^*(X, R(A))$$

natural en el conjunt simplicial X. A més, si B^* és una altra DGCA simplicial que satisfà els axiomes d'una teoria cohomològica i $f : A^* \to B^*$ és un morfisme de teories cohomològiques[1], llavors el següent diagrama és commutatiu

$$\begin{tikzcd} H^n(A^*(X)) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & H^n(B^*(X)) \arrow[d, "\cong"'] \\ H^n(X, R(A)) \arrow[r] & H^n(X, R(B)) \end{tikzcd}$$

Comencem veient un primer resultat sobre la CDGA simplicial $T^{*,q}$.

Proposició 4.3. *Per cada $q \geq 1$, la CDGA simplicial $T^{*,q}$ defineix una teoria cohomològica amb coeficients en $\mathbb{Q}_q$ en el sentit de [2].*

[1]Un morfisme de teories cohomològiques és una aplicació simplicial compatible amb l'estructura de CDGA i de grau zero.

Demostració. La successió
$$T^{0,q} \xrightarrow{d} T^{1,q} \xrightarrow{d} T^{2,q} \to \cdots$$
és exacta, ja que es pot provar que per $q \geq 1$ i $n \geq 1$ la cohomologia de $T_n^{*,q}$ ve donada per
$$H^i(T_n^{*,q}) = \begin{cases} \mathbb{Q}_q & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{si } i > 0. \end{cases}$$
Deduïm que per tot $p \geq 0$ $T^{p,q}$ és contràctil del següent resultat.

Lemma 4.4. *Per tot $p \geq 0$, tota p-forma amb grau de filtració menor o igual que q sobre la vora de la descomposició cúbica de Δ^n és la restricció d'una p-forma de $T_n^{p,q}$.*

Finalment, com que el nucli de $d : T^{0,q} \to T^{1,q}$ està format per monomis constants, obtenim que és simplicialment trivial. □

Notem que en aquest punt és quan necessitem poder dividir per nombre menors o igual que q. Més concretament, per $2 \leq k \leq q$, la forma tancada $t^{k-1}dt$ viu en el nivell de filtració q i és la covora de la forma t^k/k.

A continuació, considerem la teoria cohomològica $(C_n^{*,q})_n$ amb coeficients en $\mathbb{Q}_q$, on $C_n^{*,q}$ és el complex de cocadenes simplicials sobre el n-símplex simplicial Δ^n amb coeficients en $\mathbb{Q}_q$
$$C_n^{*,q} = C^*(\Delta^n; \mathbb{Q}_q).$$
Per cada $q \geq 1$, definim també el complex de cocadenes simplicials $((T\overline{\otimes}C)_n^{*,q})_n$ sobre $\mathbb{Q}_q$ donat per
$$(T\overline{\otimes}C)_n^{*,q} = T^{*,q} \otimes C_n^{*,q},$$
en què les aplicacions cara i degeneració venen donades pel respectiu producte tensorial. Es pot veure que $(T\overline{\otimes}C)^{*,q}$ també és una teoria cohomològica amb coeficients en $\mathbb{Q}_q$. Llavors, podem considerar les aplicacions de complexes de cadenes simplicials
$$T_n^{*,q} = T_n^{*,q} \otimes (\mathbb{Q}_q \cdot 1) \hookrightarrow T^{*,q} \otimes C_n^{*,q}$$
$$C_n^{*,q} = (\mathbb{Q}_q \cdot 1) \otimes T_n^{*,q} \hookrightarrow T^{*,q} \otimes C_n^{*,q}.$$
Aquestes aplicacions indueixen un isomorfisme entre els coeficients, així que pel Teorema 4.2 s'indueix un isomorfisme natural en cohomologia
$$H^*(T^{*,q}(X)) \cong H^*((T\overline{\otimes}C)^{*,q}(X)) \cong H^*(C^{*,q}(X)).$$
Per acabar, el producte exterior de formes cúbiques i el producte *cup* de cocadenes simplicials defineix aplicacions de complexes de cocadenes
$$T_n^{*,q_1} \otimes T_n^{*,q_2} \to T_n^{*,q_1+q_2}$$
$$C_n^{*,q_1} \otimes C_n^{*,q_2} \to T_n^{*,q_1+q_2}$$
$$(T\overline{\otimes}C)^{*,q_1} \otimes (T\overline{\otimes}C)^{*,q_2} \to (T\overline{\otimes}C)^{*,q_1+q_2}$$
compatibles amb les anteriors aplicacions. Amb tot això, es conclou que.

Teorema 4.5 (Cenkl-Porter)**.** *Per cada $q \geq 1$, tenim un isomorfisme de $\mathbb{Q}_q$-mòduls*

$$H^*(T^{*,q}(X)) \cong H^*(X; \mathbb{Q}_q)$$

que és natural en X i compatible amb l'estructura multiplicativa, és a dir, per tot $q_1, q_2 \geq 1$ tenim el següent diagrama commutatiu

$$\begin{tikzcd}
H^{p_1}(T^{*,q_1}(X)) \otimes H^{p_2}(T^{*,q_2}(X)) \arrow[r, "\wedge"] \arrow[d, "\cong"] & H^{p_1+p_2}(T^{*,q_1+q_2}(X)) \arrow[d, "\cong"] \\
H^{p_1}(X; \mathbb{Q}_{q_1}) \otimes H^{p_2}(X; \mathbb{Q}_{q_2}) \arrow[r, "\cup"] & H^{p_1+p_2}(X; \mathbb{Q}_{q_1+q_2})
\end{tikzcd}$$

Per acabar, per $q \geq 1$ prenem $l > q$. Del Teorema de Cenkl-Porter 4.5 podem deduir que tenim un isomorfisme

$$H^*(T^{*,q}(X) \otimes \mathbb{F}_l) \cong H^*(X; \mathbb{F}_l),$$

compatible amb l'estructura multiplicativa per $q_1, q_2 \geq 0$ amb $l > q_1 + q_2$.

Referències

[1] R. Porter B. Cenkl. "De Rham theorem with cubical forms". A: *Pacific J. Math.* (1984).

[2] H. Cartan. "Théories cohomologiques". A: *Inventiones mathematicae* 35 (1976), pàg. 261 - 271.

[3] B. Hanke. "The stable free rank of symmetry of products of spheres". A: *Inventiones mathematicae* 178 (2009), pàg. 265 - 298.