HOMOTOPIA RACIONAL I MODEL DE LA FIBRACIÓ DE BOREL

ROGER GARRIDO VILALLAVE

Sigui $\mathbb{K}$ un cos de característica zero. Aquestes notes segueixen els llibres [2] i [1].

1. L'àlgebra de Sullivan i el functor $\mathcal{A}_{pl}$

1.1. Àlgebres diferencials graduades commutatives.

Definició 1. Una **àlgebra diferencial graduada commutativa** (DGCA) consisteix en:

(1) Un espai vectorial A que admet una descomposició en graus $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A^n$. Als elements de A^n els anomenem homogenis de grau n, i escrivim $|x| = n$ per $x \in A^n$.

(2) Un endomorfisme $d : A \to A$ que augmenta en 1 el grau ($d(A^n) \subseteq A^{n+1}$) i tal que $d^2 = 0$.

(3) Un producte bilineal $\cdot : A\otimes A \to A$ que és commutatiu (en el sentit graduat): si $x, y \in A$ són homogenis de graus m i n, respectivament, aleshores $x \cdot y = (-1)^{mn} y \cdot x$.

(4) Se satisfà la regla de Leibniz: donats $x, y \in A$, amb x homogeni de grau m, es té que $d(x \cdot y) = d(x) \cdot y + (-1)^m x \cdot d(y)$.

Observació 2. Donada una DGCA (A, d), la seva cohomologia és també una DGCA amb diferencial nul.

Definició 3. Els **morfismes** de DGCAs són les aplicacions $f : (A, d_A) \to (B, d_B)$ que respecten tota l'estructura. Diem que un morfisme de DGCAs és un **quasi-isomorfisme** si indueix un isomorfisme en cohomologia.

Sigui V un espai vectorial graduat. L'àlgebra commutativa graduada generada per V és $\Lambda V = \mathbb{K}[V^{\text{even}}]\otimes E(V^{\text{odd}})$, on E denota l'àlgebra exterior. Si $V = \langle x_1, \dots, x_n\rangle$, també escrivim $\Lambda V = \Lambda(x_1, \dots, x_n)$.

Exemple 4. L'àlgebra de De Rham d'una varietat diferencial, amb el diferencial exterior i el producte de formes, és una DGCA sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

1.2. Construcció del functor $\mathcal{A}_{pl}$.

Sigui ∇_p la DGCA

$$\frac{\Lambda(t_0, \dots, t_p, dt_0 \dots, dt_p)}{(\sum_i t_i = 1,\ \sum_i dt_i = 0)},$$

amb $|t_i| = 0$, $|dt_i| = 1$, $d(t_i) = dt_i$ i $d(dt_i) = 0$.

Definim els morfismes d'àlgebres que estan únicament determinats per:

$$\partial_i : \nabla_p \to \nabla_{p-1}, \quad \partial_i(t_j) := \begin{cases} t_{j-1}, & j > i, \\ 0, & j = i, \\ t_j, & j < i, \end{cases}$$

$$s_i : \nabla_p \to \nabla_{p+1}, \quad s_i(t_j) := \begin{cases} t_{j+1}, & j > i, \\ t_i + t_{i+1}, & j = i, \\ t_j, & j < i. \end{cases}$$

Si fixem $q \geq 0$, la col·lecció $\nabla_*^q := \{\nabla_p^q\}_p$, on ∇_p^q denota la subàlgebra de ∇_p formada pels elements de grau q, forma un conjunt simplicial juntament amb les restriccions de ∂_i i s_i.

Definició 5. Sigui X un espai toplògic, i denotem per $C^{\text{sing}}(X)$ el conjunt simplicial de símplexs singulars de X. Definim l'**àlgebra de Sullivan** (racional) de X com

$$\mathcal{A}_{pl}(X) := \bigoplus_{q \geq 0} \text{Hom}_{\text{sSet}}(C^{\text{sing}}(X),\ \nabla_*^q).$$

Raonant per graus es pot veure que els elements de ∇_n^n són de la forma

$$f(t_0, ..., t_n) dt_0 \cdots dt_n,$$

on $f \in \mathbb{Q}[T_0, \ldots, T_n]$. Així, un element $\omega \in \mathcal{A}_{pl}(X)$ de grau n envia cadenes $\sigma : C_n(X) \to \mathbb{Q}$ de grau n a expressions $f(t_0, \ldots, t_n) dt_0 \cdots dt_n$, de manera que es respecten les cares i les degeneracions. Des d'aquesta perspectiva es pot pensar l'àlgebra de Sullivan com un anàleg racional de l'àlgebra de De Rham.

Lema 6. *$\mathcal{A}_{pl}$: $\boldsymbol{Top} \to \boldsymbol{DGCA}_{\mathbb{Q}}$ és un functor contravariant.*

1.3. Integració de formes polinòmiques.

Sigui X un espai topològic, $\omega \in \mathcal{A}_{pl}^n(X)$ una forma racional i $\sigma : \Delta_n \to X$ un n-símplex. Aleshores $\omega(\sigma) \in \nabla_n^n$, així que $\omega(\sigma) = f(t_0, \ldots, t_n) dt_0 \cdots dt_n$ per alguna $f \in \mathbb{Q}[T_i]_i$. Té sentit fer la següent integral si pensem f com una funció real de variable real:

$$\int_\sigma \omega := \int_{\Delta_n} \omega(\sigma) = \int_{\Delta_n} f(t_0, \ldots, t_n) dt_0 \cdots dt_n.$$

Aquesta integració formal es pot estendre linealment a una aplicació

$$\int_{(-)} \omega : C_n(X; \mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}$$

i, per tant, ens defineix un element de $C^n(X; \mathbb{Q})$.

Teorema 7. *Sigui X un espai topològic. La integració formal*

$$\begin{array}{cccc} \int : & \mathcal{A}_{pl}(X) & \to & C^*(X; \mathbb{Q}) \\ & \omega & \mapsto & \int_{(-)} \omega = \left(\sigma \mapsto \int_\sigma \omega\right) \end{array}$$

és un quasi-isomorfisme.

La integració formal deixa entreveure encara més el símil entre l'àlgebra $\mathcal{A}_{pl}(X)$ i l'àlgebra de De Rham.

2. Models minimals

2.1. Definició de model minimal.

Sigui X un espai topològic. L'àlgebra $\mathcal{A}_{pl}(X)$ acostuma a ser molt complicada, però si X és arc-connex admet un *model minimal*, que és una altra àlgebra $M(X)$ quasi-isomorfa a $\mathcal{A}_{pl}(X)$ molt més senzilla (des d'un punt de vista algebraic). A més, aquest model minimal és *únic*.

Definició 8. Sigui (A, d_A) una DGCA. Sigui V un espai vectorial concentrat en grau n, i $d : V \to A^{n+1}$ una aplicació lineal tal que $d_A \circ d = 0$. Definim l'**extensió KS** (Koszul-Sullivan) de grau n determinada per V i d com l'àlgebra $(A \otimes \Lambda V, D)$, on D és l'únic diferencial tal que $D(a \otimes 1) = d_A(a) \otimes 1$ i $D(1 \otimes v) = 1 \otimes d(v)$.

Definició 9. Una àlgebra és una **àlgebra de Sullivan** si es pot obtenir, començant amb $(A, d_A) = (\mathbb{K}, 0)$, utilitzant extensions KS. A més, si aquestes extensions són de grau no-decreixent, diem que és **minimal**.

La idea és que una àlgebra minimal és aquella que s'obté afegint generadors de manera inductiva (l'ordre en el conjunt d'índexs s'interpreta com l'ordre en què s'han afegit els generadors).

Observació 10. Donada una àlgebra de Sullivan minimal $(\Lambda V, d)$, se satisfà que $d(\bar{A}) \subseteq \bar{A} \cdot \bar{A}$, on $\bar{A} := \ker(\varepsilon : A \to \mathbb{K})$.

Exemple 11. L'àlgebra $\Lambda(x, y)$ amb $|x| = 2$, $|y| = 3$, $dx = 0$ i $dy = x^2$ és una àlgebra de Sullivan minimal. En canvi, l'àlgebra $\nabla_0 = \Lambda(t, dt)$ amb $|t| = 0$, $|dt| = 1$, $d(t) = dt$ i $d(dt) = 0$ és de Sullivan però no és minimal. Finalment, l'àlgebra $\Lambda(x, y)$ amb $|x| = |y| = 1$, $dx = 0$ i $dy = xy$ no és ni una àlgebra de Sullivan.

Definició 12. Sigui (A, d_A) una àlgebra. Diem que (M, d_M) juntament amb $m : M \to A$ és un **model minimal** de A si (M, d_M) és una àlgebra de Sullivan minimal, i m és un quasi-isomorfisme.

Teorema 13. *Si (A, d_A) és c-connexa (i.e. $H^0(A) \cong \mathbb{Q}$) existeix un model minimal $m : M \xrightarrow{\sim} A$ de A. A més, si (A, d_A) admet dos models minimals $m : M \xrightarrow{\sim} A$ i $n : N \xrightarrow{\sim} A$ existeix un isomorfisme $\phi : M \to N$ tal que $n\phi \simeq m$ (això significa que hi ha un morfisme -homotopia- $H : M \to A \otimes \Lambda(t, dt)$ tal que $(id_B \otimes \partial_0) \circ H = n\phi$, i $(id_B \otimes \partial_1) \circ H = m$).*

2.2. Càlcul dels models minimals d'alguns espais.

Exemple 14 (Les esferes S^n)**.** Com que $H^*(\mathcal{A}_{pl}(S^n)) \cong H^*(S^n; \mathbb{Q}) = \langle 1, [\omega] \rangle$ com a $\mathbb{Q}$-espais vectorials, amb $\omega \in \mathcal{A}^n_{pl}(S^n)$, un candidat a ser el model minimal de $\mathcal{A}_{pl}(S^n)$ és $m : (\Lambda(\tilde{\omega}), d = 0) \to \mathcal{A}_{pl}(S^n)$ definit per $m(\tilde{\omega}) := \omega$.

Si n és senar, $H^*(\Lambda(\tilde{\omega}), d = 0) = \langle 1, [\tilde{\omega}] \rangle$ com a $\mathbb{Q}$-espais vectorials, ja que $\tilde{\omega}^2 = 0$. Per tant, m indueix un isomorfisme en cohomologia. Com que $(\Lambda(\tilde{\omega}), d = 0)$ és minimal es dedueix que ja hem trobat el model minimal.

Suposem ara que n és parell. Com que $H^*(\Lambda(\tilde{\omega}), d = 0) = \mathbb{Q}[\tilde{\omega}]$ com a $\mathbb{Q}$-espais vectorials, no és possible que m indueixi un isomorfisme en cohomologia. Per tant, hem de retocar el model minimal candidat una mica.

Com que $[\omega]^2 = 0 \in H^*(\mathcal{A}_{pl}(S^n))$, cal que ω^2 sigui una vora en $\mathcal{A}_{pl}(S^n)$, és a dir, hi ha una $\eta \in \mathcal{A}^{2n-1}_{pl}(S^n)$ tal que $\omega^2 = d\eta$. Prenem l'àlgebra $\Lambda(\tilde{\omega}, \tilde{\eta})$ amb $|\tilde{\omega}| = n$,

$|\tilde{\eta}| = 2n-1$, $d\tilde{\omega} = 0$ i $d\tilde{\eta} = \tilde{\omega}^2$. Definim el morfisme $m : (\Lambda(\tilde{\omega}, \tilde{\eta})) \to \mathcal{A}_{pl}^{2n-1}(S^n)$ que envia $m(\tilde{\omega}) := \omega$ i $m(\tilde{\eta}) := \eta$. Els respectius anells de cohomologia ara sí que són isomorfs, i de fet m hi indueix un isomorfisme. Com que $(\Lambda(\tilde{\omega}, \tilde{\eta}), d)$ és minimal, es dedueix que la DGCA trobada és el model minimal de S^n per n parell.

És important verificar que, en ambdues paritats de n, el morfisme construït m és un morfisme de DGCAs, és a dir, que respecta el producte i el diferencial. Això és cert en aquest cas.

Exemple 15 (Els r-tors T^r)**.** En general, si $m_X : (\Lambda V, d) \to \mathcal{A}_{pl}(X)$ i $m_Y : (\Lambda W, d) \to \mathcal{A}_{pl}(Y)$ són models, amb X i Y arc-connexos, i tals que la cohomologia d'un dels espais és de dimensió finita, aleshores un model per $\mathcal{A}_{pl}(X \times Y)$ és

$$m_X \cdot m_Y : (\Lambda V, d) \otimes (\Lambda W, d) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{A}_{pl}(X \times Y),$$

on $(m_X \cdot m_Y)(a \otimes b) = (\mathcal{A}_{pl}(p_X) \circ m_X)(a) \cdot (\mathcal{A}_{pl}(p_Y) \circ m_Y)(b)$. Aquí hem denotat per p_i les projeccions del producte cartesià.

Sigui $T^r := S^1 \times \overset{r)}{\cdots} \times S^1$ el r-tor, amb $r \geq 2$. El model minimal de $\mathcal{A}_{pl}(S^1)$ és $(\Lambda(x), d)$, amb $|x| = 1$ i $dx = 0$. Per tant, un model de $\mathcal{A}_{pl}(T^r)$ és

$$m : \left(\bigotimes_{i=1}^{n} (\Lambda(x_i), d) \right) \cong (\Lambda(x_1, \ldots, x_n), d) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{A}_{pl}(T^r),$$

on $|x_i| = 1$ i $dx_i = 0$, i també

$$m(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \prod_{i=1}^{n} (\mathcal{A}_{pl}(p_i) \circ m_i)(a_i).$$

És directe comprovar que aquest model és minimal.

Exemple 16 (Els espais BT^r)**.** Sigui G un grup de Lie de rang r. Se sap que, si $(\Lambda V, 0) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{A}_{pl}(G)$ és un model minimal, aleshores $(\Lambda sV, 0) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{A}_{pl}(BG)$ és també un model minimal.

En el cas del tor $G = T^r$, deduïm que el model minimal de BT^r és

$$(\Lambda(x_1, \ldots, x_r), d = 0) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{A}_{pl}(BT^r),$$

amb $|x_i| = 2$.

3. Model de la fibració de Borel

Fixem $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$.

3.1. **Model minimal de les fibracions.**

En aquest apartat se segueix la construcció feta al capítol 15 de [2].

Considerem una fibració de Serre

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "j"] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\ y_0 \arrow[r] & B \end{tikzcd}.$$

Treballem sota les hipòtesis que B és simplement connex i que un d'entre $H_*(F;\mathbb{K})$ i $H_*(Y;\mathbb{K})$ és de tipus finit.

Si apliquem el functor $\mathcal{A}_{pl}(-)$ al diagrama de la fibració obtenim un diagrama commutatiu de DGCAs

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}_{pl}(F) & \mathcal{A}_{pl}(E) \arrow[l, "\mathcal{A}_{pl}(j)"'] \\ \mathbb{K} \arrow[u] & \mathcal{A}_{pl}(B) \arrow[l, "\varepsilon"] \arrow[u, "\mathcal{A}_{pl}(p)"'] \end{tikzcd} .$$

Es pot demostrar que $\mathcal{A}_{pl}(j)$ admet el que s'anomena un model de Sullivan, que és una aplicació

$$m : (\mathcal{A}_{pl}(Y) \otimes \Lambda V, d) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_{pl}(X)$$

Construïm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}_{pl}(B) \arrow[r, "\mathcal{A}_{pl}(p)"] & \mathcal{A}_{pl}(E) \arrow[r, "\mathcal{A}_{pl}(j)"] & \mathcal{A}_{pl}(F) \\ (\Lambda V_B, d) \arrow[r, hook, "i"'] \arrow[u, "\sim", "m_B"'] & (\Lambda V_B \otimes \Lambda V, D) \arrow[r, "\varepsilon\cdot\mathrm{id}"'] \arrow[u, "\sim", "m"'] & (\Lambda V, \bar{d}) \arrow[u, "\sim", "\bar{m}"'] \end{tikzcd} ,$$

on:

(1) Hem escollit un model $m_B : (\Lambda V_B, d) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_{pl}(B)$,

(2) Hem escollit un model (relatiu respecte ΛV_B) $m : (\Lambda V_B \otimes \Lambda V, D) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_{pl}(E)$ del morfisme $\mathcal{A}_{pl}(p) \circ m_B$. Resulta que $(\Lambda V_B \otimes \Lambda V, D)$ és un model de $\mathcal{A}_{pl}(E)$, és a dir, que no és tan sols un model relatiu respecte $(\Lambda V_B, d)$.

(3) Hem definit $(\Lambda V, \bar{d})$ com la imatge de $\varepsilon \cdot \mathrm{id}$, on $\varepsilon : (\Lambda V_B \otimes \Lambda V, D) \to (\mathbb{K}, 0)$ és l'única augmentació. Com que $\mathcal{A}_{pl}(j) \circ m$ factoritza a través de $\varepsilon \cdot \mathrm{id}$, definim $\bar{m}$ tal que el darrer quadrat commuta. Es pot demostrar que $\bar{m}$ és un quasi-isomorfisme i dóna lloc a un model de $\mathcal{A}_{pl}(F)$.

En aquesta construcció hem vist que, donat un model de B obtenim un model de E que és de la forma $(\Lambda V_B \otimes \Lambda V, D)$. Però a priori no sabem res de l'espai ΛV. Es podria arribar a pensar, equívocament, que donats models $m_B : (\Lambda V_B, d) \to \mathcal{A}_{pl}(B)$ i $\bar{m} : (\Lambda V, \bar{d}) \to \mathcal{A}_{pl}(F)$ aleshores $(\Lambda V_B \otimes \Lambda V, D)$ és un model de $\mathcal{A}_{pl}(E)$, però això no és el que hem vist en la construcció! Resulta que, si el model que es dóna per F és minimal, sí que es té aquest recíproc:

Teorema 17 (Halperin, [3])**.** *Siguin $m_B : (\Lambda V_B, d) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_{pl}(B)$ i $\bar{m} : (\Lambda V, \bar{d}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_{pl}(F)$ models, amb $\bar{m}$ minimal. Aleshores E té un model de la forma $(\Lambda V_B \otimes \Lambda V, D)$ que és minimal respecte $(\Lambda V_B, d)$, i que satisfà que $Dv - \bar{d}v \in \Lambda^+ V_B \otimes \Lambda V$ per cada $v \in V$.*

3.2. **Fibració de Borel.**

Sigui M una varietat compacta, nilpotent, amb l'acció d'un r-tor T^r. L'objectiu és aplicar la proposició anterior a la fibració de Borel $M \to M_{T^r} \to BT^r$ per tal d'obtenir un model per $M_{T^r} = ET^r \times_{T^r} M$. Tenim:

- Un model minimal per $\mathcal{A}_{pl}(BT^r)$ és $(\Lambda(x_1, \ldots, x_r), d = 0) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_{pl}(BT^r)$, on $|x_i| = 2$.

- Escollim un model minimal $\bar{m} : (\Lambda V, d) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_{pl}(M)$.

Aleshores, tenim un model

$$(\Lambda(x_1, \ldots, x_r) \otimes \Lambda V, D) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_{pl}(M_{T^r}),$$

on $D(x_i) = 0$ per tota i (perquè aquest model és minimal respecte $(\Lambda(x_1, \ldots, x_r), d = 0)$, així que la restricció del diferencial ha de coincidir), i per tot $v \in V$ es té que $Dv - \bar{d}v \in \Lambda^+(x_1, \ldots, x_r) \otimes \Lambda V$.

També sabem que, si l'acció és quasi-lliure (per cada $g \in T^r$ el grup d'isotropia M_g és finit; en particular, les accions lliures són quasi-lliures), aleshores la cohomologia $H^*(M_{T^r}) \cong H^*(\Lambda(x_1, \ldots, x_r) \otimes \Lambda V, D)$ és de dimensió finita. Aquest fet imposa encara més restriccions al diferencial D.

Observació 18. Es pot calcular el model de $\mathcal{A}_{pl}(M_G)$ per grups de Lie G més generals seguint la mateixa construcció. Només caldrà canviar el model minimal de $\mathcal{A}_{pl}(T^r)$ per un model de $\mathcal{A}_{pl}(G)$.

References

[1] Allday, C., Puppe, V.: *Cohomological methods in transformation groups.*
[2] Félix, Y., Halperin, S., Thomas, J.: *Rational Homotopy Theory.*
[3] Halperin, S.: *Lectures on minimal models.*