NOTES DEL SEMINARI

FUNCIONS THETA

Barcelona, 2003

10

Notes del Seminari de Teoria de Nombres
(UB-UAB-UPC)

FUNCTIONS THETA

Edició a cura de

P. Bayer J. Guàrdia

Amb contribucions de

P. Bayer J. Guàrdia E. Nart
E. Torres A. Travesa M. Vela

P. Bayer
Facultat de Matemàtiques, UB
Gran Via de les Corts Catalanes, 585
08007 Barcelona. Espanya

J. Guàrdia
Escola Politècnica Superior d'Enginyeria de Vilanova i La Geltrú, UPC
Av. Víctor Balaguer, s.n.
08800 Vilanova i La Geltrú

Classificació AMS
Primària: 11F27, 11F46, 11G05, 11G10
Secundària: 14K25, 30F10

Barcelona, 2003
Amb suport parcial de MCYT: BMF2003-01898, BFM2003-06768-C02-02
ISBN: 84-923250-7-0

Índex

Introducció

Aquestes notes contenen les conferències sobre *Funcions theta* impartides en la 17ena edició del Seminari de Teoria de Nombres (UB-UAB-UPC), celebrada del 3 al 7 de febrer de 2003, a Barcelona, a la Facultat de Nàutica de la Universitat Politècnica de Catalunya.

El programa general fou elaborat per P. Bayer i J. Guàrdia, i les sessions foren desenvolupades per persones del seminari. Els objectius proposats en plantejar el tema del seminari foren modestos. Es tractava d'aprendre resultats clàssics sobre funcions theta i algunes de les seves aplicacions, deixant per a una altra ocasió el familiaritzar-nos amb resultats més actuals. Les referències que figuren en les bibliografies d'aquest volum són essencialment textos bàsics, com els de Mumford, Igusa o Lange-Birkenhake, i textos clàssics, com els de Krazer o Baker.

La revisió dels clàssics sota l'òptica actual de la geometria algebraica ha estat un treball d'arqueologia matemàtica molt enriquidor per als autors i editors d'aquest volum. Desitgem que la seva lectura sigui igualment profitosa.

Pilar Bayer, Jordi Guàrdia

Barcelona, 9 de gener de 2004

Capítol 1

Funcions theta de Jacobi i corbes el·líptiques (I)

E. Torres

L'objectiu d'aquest capítol és estudiar les funcions theta de Jacobi així com els lligams que aquestes presenten amb la funció $\wp$ de Weierstrass i les corbes el·líptiques.

1.1 Les funcions theta de Jacobi

1.1.1 Funció theta bàsica

1.1.1 Definició. Es defineix la funció theta bàsica com

$$\theta(z,\tau) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2\pi i n z + \pi i n^2 \tau},$$

on $z \in \mathbb{C}$ i $\tau \in \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

Amb finançament parcial de MCYT BFM2003-06768-C02-02-01

Aquesta sèrie convergeix absolutament i uniforme en conjunts $\{|\mathrm{Im}(z)| < c\} \times \{\mathrm{Im}(\tau) > \epsilon\}$:

$$\left| e^{2\pi inz} \cdot e^{\pi in^2\tau} \right| < (e^{2\pi c})^n \cdot (e^{-\pi\epsilon})^{n^2},$$

si triem n' tal que $(e^{-\pi\epsilon})^{n'} \cdot e^{2\pi c} < 1$, aleshores $|e^{2\pi inz+\pi in^2\tau}| < (e^{-\pi\epsilon})^{n(n-n')}$ i la sèrie està uniformement acotada per una sèrie geomètrica convergent.

1.1.2 Proposició. *$\theta(z,\tau)$ defineix una funció analítica en les dues variables. A més, és quasi-periòdica:*

$$\theta(z+1,\tau) = \theta(z,\tau), \qquad \theta(z+\tau,\tau) = e^{-\pi i\tau - 2\pi iz}\theta(z,\tau).$$

Demostració: La primera periodicitat és trivial. Respecte a la segona:

$$\begin{aligned} \theta(z+\tau,\tau) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2\pi in(z+\tau)+\pi in^2\tau} = e^{-2\pi iz-\pi i\tau} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2\pi i(n+1)z+\pi i(n+1)^2\tau} \\ &= e^{-\pi i\tau-2\pi iz}\theta(z,\tau). \ \square \end{aligned}$$

1.1.3 Proposició. *La funció $\theta(z,\tau)$ satisfà l'equació funcional:*

$$\frac{1}{4\pi i}\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} = \frac{\partial\theta}{\partial\tau}.$$

Demostració: Com que la sèrie que defineix la funció $\theta(z,\tau)$ convergeix uniformement, podem derivar terme a terme. Sigui

$$a_n(z,\tau) = e^{\pi in^2\tau+2\pi inz};$$

aleshores,

$$\frac{\partial a_n(z,\tau)}{\partial z} = 2\pi ine^{\pi in^2\tau+2\pi inz}, \qquad \frac{\partial^2 a_n(z,\tau)}{\partial^2 z} = -4\pi^2n^2e^{\pi in^2\tau+2\pi inz},$$

$$\frac{\partial a_n(z,\tau)}{\partial\tau} = \pi in^2e^{\pi in^2\tau+2\pi inz},$$

i tenim la igualtat. $\square$

1.1.2 Funció theta amb característica

1.1.4 Definició. Es defineix la funció theta amb característica com

$$\theta_{a,b}(z,\tau) := e^{\pi i a^2\tau + 2\pi i a(z+b)}\theta(z+b+a\tau,\tau), \quad a,b\in\mathbb{Q}.$$

Es defineixen també les funcions:

$$\theta_1 = \theta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}, \quad \theta_2 = \theta_{\frac{1}{2},0}, \quad \theta_3 = \theta_{0,0} = \theta, \quad \theta_4 = \theta_{0,\frac{1}{2}}.$$

NOTACIÓ: Fixat $\tau \in \mathbb{H}$, escriurem $\theta_i(z,\tau) = \theta_i(z)$.

Les funcions θ_1, θ_2, i θ_4 es poden expressar en funció de $\theta_3 = \theta$ de la manera següent:

$$\theta_1(z) = e^{\frac{\pi\tau i}{4} + \pi i(z+\frac{1}{2})}\ \theta_3(z + \tfrac{1}{2} + \tfrac{\tau}{2}),$$

$$\theta_2(z) = e^{\frac{\pi\tau i}{4} + \pi i z}\ \theta_3(z + \tfrac{\tau}{2}),$$

$$\theta_4(z) = \theta_3(z + \tfrac{1}{2}).$$

En endavant notarem $p = e^{\pi i z}$ i $q = e^{\pi i\tau}$.

1.1.5 Proposició. *Les diferents expressions de les $\theta_i(z)$ venen donades per:*

$$\begin{aligned}
\theta_1(z) &= i\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n p^{2n-1}q^{(n-1/2)^2} = -2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n-1/2)^2}\sin(\pi(2n-1)z),\\
\theta_2(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}p^{2n-1}q^{(n-1/2)^2} = 2\sum_{n=0}^{\infty}q^{(n-1/2)^2}\cos(\pi(2n-1)z),\\
\theta_3(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}p^{2n}q^{n^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}q^{n^2}\cos(2\pi n z),\\
\theta_4(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n p^{2n}q^{n^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos(2\pi n z).
\end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓ: A partir de la relació:

$$(-1)^n e^{\pi i(2n+1)v}+(-1)^{-n-1}e^{\pi i(2(-n-1)+1)v} = (-1)^n 2i\sin(2\pi(n+1/2)v),$$

tenim que:

$$\begin{aligned}
\theta_1(z) &= e^{\pi i\frac{\tau}{4}+\pi i(z+1/2)}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi in(z+\frac{\tau}{2}+\frac{1}{2})+\pi in^2\tau} \\
&= e^{\pi i(z+1/2)}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i(n^2\tau+n\tau+\frac{\tau}{4})+2\pi in(z+\frac{1}{2})} \\
&= i\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n e^{\pi i\tau(n+\frac{1}{2})^2+\pi i(2n+1)z} \\
&= -2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{\pi i\tau(n-1/2)^2}\sin(\pi(2n-1)z);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_2(z) &= e^{\pi i\frac{\tau}{4}+\pi iz}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2\pi in(z+\frac{\tau}{2})+\pi in^2\tau} = e^{\pi iz}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i(n^2\tau+n\tau+\frac{\tau}{4})+2\pi inz} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i\tau(n+\frac{1}{2})^2+\pi i(2n+1)z} = 2\sum_{n=0}^{\infty} e^{\pi i\tau(n-1/2)^2}\cos(\pi(2n-1)z); \\
\theta_3(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2\pi inz+\pi in^2\tau} = 1+2\sum_{n=1}^{\infty} e^{\pi in^2\tau}\cos(2\pi nz); \\
\theta_4(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2\pi in(z+\frac{1}{2})+\pi in^2\tau} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n e^{\pi in^2\tau+2\pi inz} \\
&= 1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{\pi in^2\tau}\cos(2\pi nz)\,.
\end{aligned}$$

1.1.3 Propietats de les funcions theta

1.1.6 Proposició. *La funció* θ_1 *és senar i les funcions* $\theta_2, \theta_3, \theta_4$ *són parelles. A més:*

$$\theta_1(z+1) = -\theta_1(z), \quad \theta_1(z+\tau) = -e^{-\pi i\tau - 2\pi i z}\ \theta_1(z),$$

$$\theta_2(z+1) = -\theta_2(z), \quad \theta_2(z+\tau) = e^{-\pi i\tau - 2\pi i z}\ \theta_2(z),$$

$$\theta_3(z+1) = \theta_3(z), \quad \theta_3(z+\tau) = e^{-\pi i\tau - 2\pi i z}\ \theta_3(z),$$

$$\theta_4(z+1) = \theta_4(z), \quad \theta_4(z+\tau) = -e^{-\pi i\tau - 2\pi i z}\ \theta_4(z).$$

Demostració: La paritat de les funcions θ es dedueix de la proposició anterior. Quant a les seves periodicitats:

$$\begin{aligned}
\theta_1(z+1) &= -2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n-1/2)^2} \sin((2n-1)\pi(z+1)) \\
&= 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n-1/2)^2} \sin((2n-1)\pi z) = -\theta_1(z), \\
\theta_3(z+1) &= 1+2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos(2\pi n(z+1)) \\
&= 1+2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos(2\pi n z) = \theta_3(z).
\end{aligned}$$

Les periodicitats de θ_2 i θ_4 s'obtenen anàlogament. Ara:

$$\begin{aligned}
\theta_1(z+\tau) &= i\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n e^{\pi i\tau(n+\frac{1}{2})^2+\pi i(2n+1)(z+\tau)} \\
&= -ie^{-2\pi i z-\pi i\tau}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^{n+1} e^{\pi i\tau(n+1+\frac{1}{2})^2+\pi i(2(n+1)+1)z} \\
&= -e^{-2\pi i z-\pi i\tau}\theta_1(z),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_2(z+\tau) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i\tau(n+\frac{1}{2})^2+\pi i(2n+1)(z+\tau)} \\
&= e^{-2\pi i z-\pi i\tau}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i\tau(n+1+\frac{1}{2})^2+\pi i(2(n+1)+1)z} \\
&= e^{-2\pi i z-\pi i\tau}\theta_2(z),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_3(z+\tau) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i n^2\tau+2\pi i n(z+\tau)}\\
&= e^{-2\pi i z-\pi i\tau}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i\tau(n+1)^2+2\pi i(n+1)z}\\
&= e^{-2\pi i z-\pi i\tau}\theta_3(z).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_4(z+\tau) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n e^{\pi i n^2\tau+2\pi i n(z+\tau)}\\
&= e^{-2\pi i z-\pi i\tau}\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n e^{\pi i\tau(n+1)^2+2\pi i(n+1)z}\\
&= -e^{-2\pi i z-\pi i\tau}\theta_4(z).
\end{aligned}$$

1.1.7 Corol·lari. *θ_1,θ_2 tenen període 2 i θ_3,θ_4 tenen període 1. $\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4$ tenen quasi-període τ amb factors de periodicitat*

$$-i(qp^2)^{-1}, (qp^2)^{-1}, (qp^2)^{-1}, -(qp^2)^{-1},$$

respectivament.

Recollim a la taula següent el comportament de les funcions θ:

	$z+\frac{1}{2}$	$z+\frac{\tau}{2}$	$z+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}$	$z+1$	$z+\tau$	$z+1+\tau$
θ_1	θ_2	$ia\theta_4$	$a\theta_3$	$-\theta_1$	$-b\theta_1$	$b\theta_1$
θ_2	$-\theta_1$	$a\theta_3$	$-ia\theta_4$	$-\theta_2$	$b\theta_2$	$-b\theta_2$
θ_3	θ_4	$a\theta_2$	$ia\theta_1$	θ_3	$b\theta_3$	$b\theta_3$
θ_4	θ_3	$ia\theta_1$	$a\theta_2$	θ_4	$-b\theta_4$	$-b\theta_4$

on $a=p^{-1}q^{-1/4}$ i $b=p^{-2}q^{-1}$.

1.1.4 Zeros de les funcions theta

1.1.8 Proposició. *Els zeros de θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 a $\mathbb{C}/\langle 1,\tau\rangle$ són respectivament: $0,\frac{1}{2},\frac{1+\tau}{2},\frac{\tau}{2}$; i a $\mathbb{C}$ són: $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau, \mathbb{Z}+\frac{1}{2}+\mathbb{Z}\tau, \mathbb{Z}+\frac{1}{2}+(\mathbb{Z}+\frac{1}{2})\tau, \mathbb{Z}+(\mathbb{Z}+\frac{1}{2})\tau$.*

DEMOSTRACIÓ: Veure que cadascun d'aquests punts és zero de la funció corresponent és directe a partir de les expressions de les funcions θ i de les seves periodicitats. Per veure la unicitat comptarem,

per exemple, el nombre de zeros de θ_3 ja que tots els casos es fan de la mateixa manera.
Per les propietats de periodicitat, podem identificar cada paral·lelogram amb un tor. Sobre el tor, la vora del rectangle és homotòpica a un punt i per tant podem aplicar el principi de l'argument. Cal triar un t de forma que el perímetre del rectangle $t, t+1, t+\tau, t+1+\tau$ no contingui cap zero de θ_3. (Això sempre és possible ja que en cas contrari θ_3 tindria un punt d'acumulació de zeros i essent analítica, hauria d'ésser zero). Pel principi de l'argument podem calcular el nombre de zeros de θ_3 dins del rectangle indicat mitjançant l'expressió:

$$N = \frac{1}{2\pi i}\int_R \frac{\partial \log \theta_3(z)}{\partial z} dz$$

on R és la vora del rectangle $A = [t, t+1], B = [t+1, t+1+\tau], C = [t+1+\tau, t+\tau], D = [t+\tau, t]$.

$$\begin{aligned}
N &= \frac{1}{2\pi i}\left(\int_A + \int_B + \int_C + \int_D\right)\frac{\partial \log \theta_3(z)}{\partial z} dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_t^{t+1}\left(\frac{\partial \log \theta_3(z)}{\partial z} - \frac{\partial \log \theta_3(z+\tau)}{\partial z}\right) dz \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i}\int_t^{t+\tau}\left(\frac{\partial \log \theta_3(z+1)}{\partial z} - \frac{\partial \log \theta_3(z)}{\partial z}\right) dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_t^{t+1} \frac{\partial}{\partial z} \log\left(\frac{\theta_3(z)}{\theta_3(z+\tau)}\right) dz \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i}\int_t^{t+\tau} \frac{\partial}{\partial z} \log\left(\frac{\theta_3(z+1)}{\theta_3(z)}\right) dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_t^{t+1} \frac{\partial}{\partial z}(\pi i\tau + 2\pi i z) dz = 1
\end{aligned}$$

ja que la integral entre t i $t+\tau$ és 0 per les propietats de θ_3. □

1.1.9 Corol·lari. *Notem que* $\theta_1(0) = 0$ *mentre que per a* $i = 2, 3, 4$ $\theta_i(0) \neq 0$.

1.1.5 Equació de la calor

Sigui $T(z,t)$ la temperatura en temps t en qualsevol punt z d'un material sòlid que té propietats conductores uniformes i isòtropes.

$$\begin{aligned} \rho = & \ \text{densitat del material} \\ s = & \ \text{calor específic} \\ k = & \ \text{conductivitat tèrmica} \\ \kappa = & \ \tfrac{k}{s\rho} = \textit{difusibilitat} \end{aligned}$$

$$T(z,t) \quad \text{satisfà} \quad \tfrac{k}{s\rho}\,\nabla^2 T(z,t) = \tfrac{\partial T(z,t)}{\partial t}.$$

Considerem el conjunt $OXYZ$ i el cas on no hi ha variació de temperatura en les direccions X, Y. Aleshores, el flux de la calor és paral·lel a Z i l'equació es redueix a:

$$\kappa\, \frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2} = \frac{\partial T(z,t)}{\partial t}.$$

Per l'equació funcional que satisfà $\theta(z,\tau)$, es pot considerar com l'única solució de l'equació de la calor amb certes condicions inicials.

Considerem el cas del flux de la calor quan $0 \leq z \leq 1$ on les condicions sobre els plans $z = 0$, $z = 1$ es mantenen constants per a tot t. En aquest cas, el flux de la calor es desplaça completament en la direcció de z i es pot aplicar l'equació anterior.

Suposem primer que les condicions límit són aquelles en què les cares del tros de material es mantenen a temperatura $t = 0$, és a dir, $\theta(0,t) = 0$, $\theta(1,t) = 0$, on $\theta = f(z)$, $0 < z < 1$. Aleshores,

$$\theta(z,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2\kappa t} \sin \pi n z,$$

on $b_n = 2\int_0^1 f(z) \sin \pi n z dz$.

En el cas que $f(z) = \delta(z - \frac{\pi}{2})$ (on δ denota la funció delta de Dirac), el material z està inicialment a $t = 0$, excepte a l'entorn del semiplà $z = \frac{\pi}{2}$, on t és molt alta. Per aconseguir aquesta t, cal injectar una certa quantitat de calor h per unitat d'àrea:

$$h = \rho s \pi \int_{\frac{\pi}{2}-0}^{\frac{\pi}{2}+0} \delta(z - \frac{\pi}{2}) dz = \rho s \pi, \text{ on } b_n = 2 \sin(\frac{\pi n}{2}).$$

La difusió de la calor sobre z ve donada per:

$$\theta(z, \tau) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-(2n+1)^2 \kappa t} \sin \pi(2n+1) z.$$

Si $q = e^{-4\kappa t}$, $\quad \theta = \theta_1(z, q) = -2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \sin \pi(2n+1)z.$

Una altra funció theta prové de canviar les condicions límit en el nostre problema. Suposem ara que les cares del tros de material estan aïllades i la calor no passa a través d'elles $\left(\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0, \quad z = 0, 1\right)$

$$\theta(z, \tau) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 \kappa t} \cos \pi n z \text{ on } a_n = 2 \int_0^1 f(z) \cos \pi n z dt \,.$$

En el cas: $f(z) = \delta(z - \frac{\pi}{2})$, $\quad a_n = 2 \cos(\frac{\pi n}{2})$, la solució és:

$$\theta_4(z, q) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos 2\pi n z.$$

1.2 L'espai $V_N(\tau)$

1.2.1 Definició. Per a cada nombre natural $N \in \mathbb{N}$ denotarem per $\mathbf{V}_N$ l'espai vectorial:

$$\mathbf{V}_N(\tau) = \{f \text{ entera} \mid f(z+N) = f(z), f(z+\tau) = p^{-2N} q^{-N^2} f(z)\}.$$

1.2.2 Proposició.
i) dim $[\mathbf{V}_N(\tau) : \mathbb{C}] = N^2$.
ii) Una base és $\{\theta_{a,b}(z, \tau)\}$ *on* (a, b) *recorre les classes* $\{[(1/N)\mathbb{Z}/\mathbb{Z}]\}^2$.
iii) Cada $f(z) \in \mathbf{V}_N$ *té* N^2 *zeros al paral·lelogram* $N(\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z})$.

Demostració: Per a cada funció $f(z) \in \mathbf{V}_N(\tau)$, la condició $f(z) = f(z+N)$ és equivalent a l'existència d'un desenvolupament de la forma:

$$f(z) = \sum_{n \in \frac{1}{N}\mathbb{Z}} c_n p^{2n} q^{n^2},$$

on $c_n = c_m$ si $n - m \in N\mathbb{Z}$. A partir de condició $f(z+\tau) = p^{-2N} q^{-N^2} f(z)$ i per un canvi de variable, es prova que $c_{n+N^2} = c_n$, per a tot N, independentment de τ. Per tant, la dimensió de $\mathbf{V}_N(\tau)$ és com a màxim N^2. A partir de l'expressió de $\theta_{a,b}$ com a sèrie de Fourier i que tota $f(z) \in \mathbf{V}_N(\tau)$ admet un desenvolupament de la forma que acabem d'indicar, tenim que si a, b recorren tots els representants de $(1/N)\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$, $\theta_{a,b}$ són generadores de $\mathbf{V}_N(\tau)$ (tota $f(z)$ és combinació lineal de $\theta_{a,b}$) i per tant formen una base de $\mathbf{V}_N(\tau)$. Els primers N^2 coeficients de Fourier de $f(z) \in \mathbf{V}_N(\tau)$ són coeficients de Fourier de combinacions lineals de $\theta_{a,b}$. És fàcil comprovar també la independència lineal de les funcions $\theta_{a,b}$.
Respecte als N^2 zeros que té cada $f(z) \in \mathbf{V}_N(\tau)$, es demostra a partir del principi de l'argument i procedint de manera anàloga a com s'ha fet en el cas de les θ_i. $\square$

1.2.3 Corol·lari. $\{\theta_1(z), \theta_2(z), \theta_3(z), \theta_4(z)\}$ *és una base de* $\mathbf{V}_2(\tau)$.

1.3 Fórmules

1.3.1 Desenvolupament de θ_i en producte infinit

1.3.1 Proposició. *Considerem el producte infinit:*

$$F(z) = \prod_{n \in \mathbb{N}} (1 + q^{2n-1} p^{-2})(1 + q^{2n-1} p^2).$$

i) $F(z)$ *convergeix absolutament i uniforme en compactes.*
ii) $F(z)$ *té els mateixos zeros que* θ_3*:* $\mathbb{Z} + \frac{1}{2} + (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})\tau$.
iii) $F(z)$ *satisfà les mateixes condicions de quasi-periodicitat que* θ_3.
iv) $\theta_3(z)/F(z) = c(q)$ *on* $c(q)$ *és una constant independent de* z.
v) $c(q) = \prod_{n \geq 1} (1 - q^{2n})$.

DEMOSTRACIÓ: i) Pel criteri de la suma, tindrem la convergència absoluta si tenim convergència absoluta de la sèrie:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}(q^{2n-1}p^{-2}+q^{2n-1}p^{2}+q^{4n-2}).$$

Tenim que

$$\mid q^{2n-1}p^{-2}+q^{2n-1}p^{2}+q^{4n-2}\mid\leq e^{-\pi b(2n+1)+2\pi y}+e^{-\pi b(2n+1)-2\pi y}+e^{-\pi b(4n+2)},$$

on $b=\mathrm{Im}(\tau), y=\mathrm{Im}(z)$. És clar que les sèries corresponents a cadascun dels tres sumands anteriors convergeixen uniformement en compactes de $\mathbb{C}$.

ii) Respecte als zeros de $F(z)$, com que cada factor és més gran que 1 en valor absolut, el producte infinit no pot convergir a 0, i, per tant, només pot anul·lar-se si s'anul·la un dels seus factors:

$1+q^{2n-1}p^{-2}=0\iff q^{2n-1}p^{-2}=-1\iff e^{2\pi iz}=-q^{2n-1}=e^{\pi i[(2n-1)\tau+1]}\iff z=(n+\frac{1}{2})\tau+\frac{1}{2}+\mathbb{Z}$

$1+q^{2n-1}p^{2}=0\iff q^{2n-1}p^{2}=-1\iff e^{-2\pi iz}=-q^{2n-1}=e^{\pi i[(2n-1)\tau+1]}\iff z=-(n+\frac{1}{2})\tau+\frac{1}{2}+\mathbb{Z}$

Per tant, $F(z)$ s'anul·la en els punts $(\mathbb{Z}+\frac{1}{2})\tau+\frac{1}{2}$. Però com $F(z+1)=F(z)$, els zeros de $F(z)$ són els punts de la forma $\mathbb{Z}+\frac{1}{2}+(\mathbb{Z}+\frac{1}{2})\tau$, que són exactament els mateixos zeros que té $\theta_3(z)$.

iii) És fàcil comprovar que $F(z)$ satisfà les mateixes condicions de quasi-periodicitat que $\theta_3(z)$.

iv)Per la condició anterior, el quocient $\frac{\theta_3(z)}{F(z)}$ és una funció doblement periòdica sense zeros ni pols i, per tant, pel teorema de Liouville, és una constant $c(q)$ que pot dependre de τ. Observem que la constant $c(q)$ defineix una funció analítica en q, ja que és quocient de dues funcions analítiques en q.

v) Veurem que per a $\mid q\mid<1$, $G(q)=\prod_{n\geq1}(1+q^n)(1-q^{2n-1})=1$.

$$G(q)=\prod_{n\geq1}(1+q^n)(1-q^{2n-1})=$$
$$\prod_{n\geq1}(1+q^{2n-1})(1-q^{2n-1})\prod_{n\geq1}(1+q^{2n})=\prod_{n\geq1}(1+q^{2n})(1-q^{4n-2})=$$
$$G(q^2)=\prod_{n\geq1}(1+q^{4n-2})(1-q^{4n-2})\prod_{n\geq1}(1+q^{4n})=$$
$$\prod_{n\geq1}(1+q^{4n})(1-q^{8n-4})=G(q^4)=\ldots=G(q^{2^r}).$$

Per tant, $G(q) = \lim_{x\longrightarrow\infty} G(q^{2r}) = G(\lim_{x\longrightarrow\infty} q^{2r}) = G(0) = 1$, on podem fer el pas al límit ja que G és analítica.
Considerem ara:

$$\theta_3(1/2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} = c(q)F(1/2) = c(q)\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})^2,$$

$$\theta_3(1/4) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n q^{n^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{4k^2} =$$

$$c(q)\prod_{n=1}^{\infty}(1-iq^{2n-1})(1+iq^{2n-1}) = c(q)\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{4n-2}).$$

Sigui $H(q) = c(q)/\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})$. Aquesta funció és analítica perquè és quocient de dues funcions analítiques. Tenim el següent:

$$H(q) = \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2}}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})^2 \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})} = \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2}}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1}) \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{n})},$$

on hem reordenat el denominador passant un $(1-q^{2n-1})$ d'un producte a un altre. Fem el mateix amb la segona igualtat corresponent a $\theta_3(1/4)$:

$$H(q) = \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{4n^2}}{\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{4n-2}) \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})} =$$

$$\frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2}}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{4n}) \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{4n-2}) \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{4n-2})} = H(q^4).$$

Per inducció, $H(q) = H(q^{4k}) = \lim_{k\longrightarrow\infty} H(q^{4k}) = H(0) = 1$. D'aquí obtenim que $c(q) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})$. $\square$

1.3.2 Corol·lari.

$$\begin{aligned}
\theta_3(z) &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n-1}p^2)(1+q^{2n-1}p^{-2}) \\
&= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+2q^{2n-1}\cos 2\pi z+q^{4n-2}), \\
\theta_1(z) &= 2q^{1/4}\sin\pi z\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-q^{2n}p^2)(1-q^{2n}p^{-2}) \\
&= 2q^{1/4}\sin\pi z\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-2q^{2n}\cos 2\pi z+q^{4n}), \\
\theta_2(z) &= 2q^{1/4}\cos\pi z\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n}p^2)(1+q^{2n}p^{-2}) \\
&= 2q^{1/4}\cos\pi z\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+2q^{2n}\cos 2\pi z+q^{4n}), \\
\theta_4(z) &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-q^{2n-1}p^2)(1-q^{2n-1}p^{-2}) \\
&= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-2q^{2n-1}\cos 2\pi z+q^{4n-2}).
\end{aligned}$$

1.3.3 Corol·lari. Valors dels Thetanullwerte (valors per $z=0$)

i) $\theta_1'(0) = 2\pi q^{1/4}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})^3.$

ii)
$$\begin{aligned}
\theta_2(0) &= 2q^{1/4}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n})^2, \\
\theta_3(0) &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n-1})^2, \\
\theta_4(0) &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-q^{2n-1})^2.
\end{aligned}$$

1.3.4 Corol·lari. Fórmula del triple producte de Jacobi

$$\theta_1'(0) = \pi\theta_2(0)\theta_3(0)\theta_4(0).$$

1.3.2 Fórmules d'addició

1.3.5 Proposició. *(Fórmules del producte)*

$$\begin{aligned}
\theta_1(x,\tau)\theta_1(y,\tau) &= \theta_3(x+y,2\tau)\theta_2(x-y,2\tau) - \theta_2(x+y,2\tau)\theta_3(x-y,2\tau)\\
\theta_1(x,\tau)\theta_2(y,\tau) &= \theta_4(x+y,2\tau)\theta_1(x-y,2\tau) + \theta_1(x+y,2\tau)\theta_4(x-y,2\tau)\\
\theta_2(x,\tau)\theta_2(y,\tau) &= \theta_3(x+y,2\tau)\theta_2(x-y,2\tau) - \theta_2(x+y,2\tau)\theta_3(x-y,2\tau)\\
\theta_3(x,\tau)\theta_3(y,\tau) &= \theta_3(x+y,2\tau)\theta_3(x-y,2\tau) + \theta_2(x+y,2\tau)\theta_2(x-y,2\tau)\\
\theta_3(x,\tau)\theta_4(y,\tau) &= \theta_4(x+y,2\tau)\theta_4(x-y,2\tau) - \theta_1(x+y,2\tau)\theta_1(x-y,2\tau)\\
\theta_4(x,\tau)\theta_4(y,\tau) &= \theta_3(x+y,2\tau)\theta_3(x-y,2\tau) - \theta_2(x+y,2\tau)\theta_2(x-y,2\tau).
\end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓ: Per a demostrar la primera fórmula, multipliquem les sèries (que són absolutament convergents) i reordenem els termes:

$$\begin{aligned}
&\theta_1(x,\tau)\theta_1(y,\tau) =\\
&-\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} (-1)^{m+n} q^{(m+1/2)^2+(n+1/2)^2} e^{i\pi(2m+1)x+i\pi(2n+1)y} =\\
&-\sum_{r\equiv s(2)} (-1)^r q^{(r+1)^2/2+s^2/2} e^{i\pi(r+1)(x+y)+i\pi s(x-y)} =\\
&-\sum_{a=-\infty}^{\infty} q^{2(a+1/2)^2} e^{i\pi(2a+1)(x+y)} \sum_{b=-\infty}^{\infty} q^{2b^2} e^{2i\pi b(x-y)}\\
&+\sum_{a=-\infty}^{\infty} q^{2a^2} e^{i\pi 2a(x+y)} \sum_{b=-\infty}^{\infty} q^{2(b+1/2)^2} e^{i\pi(2b+1)(x-y)} =\\
&-\theta_2(x+y,2\tau)\theta_3(x-y,2\tau) + \theta_3(x+y,2\tau)\theta_2(x-y,2\tau),
\end{aligned}$$

on $m+n=r, m-n=s$.

Considerant $y \to y+1/2$

$$\theta_1(x,\tau)\theta_1(y+\tfrac{1}{2},\tau) =$$

$$\theta_3(x+y+\tfrac{1}{2},2\tau)\theta_2(x-y-\tfrac{1}{2},2\tau) - \theta_2(x+y+\tfrac{1}{2},2\tau)\theta_3(x-y-\tfrac{1}{2},2\tau),$$

implica

$$\theta_1(x,\tau)\theta_2(y,\tau) = \theta_4(x+y,2\tau)\theta_1(x-y,2\tau) + \theta_1(x+y,2\tau)\theta_4(x-y,2\tau).$$

Considerant $x \to x + 1/2$ i $y \to y + 1/2$

$$\theta_2(x,\tau)\theta_2(y,\tau) = \theta_3(x+y,2\tau)\theta_2(x-y,2\tau) - \theta_2(x+y,2\tau)\theta_3(x-y,2\tau).$$

Amb un raonament anàleg es prova

$$\theta_3(x,\tau)\theta_3(y,\tau) = \theta_3(x+y,2\tau)\theta_3(x-y,2\tau) + \theta_2(x+y,2\tau)\theta_2(x-y,2\tau)$$

i considerant els mateixos canvis

$$\theta_3(x,\tau)\theta_4(y,\tau) = \theta_4(x+y,2\tau)\theta_4(x-y,2\tau) - \theta_1(x+y,2\tau)\theta_1(x-y,2\tau),$$

$$\theta_4(x,\tau)\theta_4(y,\tau) = \theta_3(x+y,2\tau)\theta_3(x-y,2\tau) - \theta_2(x+y,2\tau)\theta_2(x-y,2\tau).$$

□

1.3.6 Corol·lari. *(Fórmules d'addició)*

$$\begin{aligned}
&\theta_3(x+y)\theta_3(x-y)\theta_3^2(0) = \theta_3^2(x)\theta_3^2(y) + \theta_1^2(x)\theta_1^2(y) = \theta_4^2(x)\theta_4^2(y) + \theta_2^2(x)\theta_2^2(y)\\
&\theta_4(x+y)\theta_4(x-y)\theta_4^2(0) = \theta_3^2(x)\theta_3^2(y) - \theta_2^2(x)\theta_2^2(y) = \theta_4^2(x)\theta_4^2(y) - \theta_1^2(x)\theta_1^2(y)\\
&\theta_2(x+y)\theta_2(x-y)\theta_2^2(0) = \theta_3^2(x)\theta_3^2(y) - \theta_4^2(x)\theta_4^2(y) = \theta_2^2(x)\theta_2^2(y) - \theta_1^2(x)\theta_1^2(y)\\
&\theta_3(x+y)\theta_4(x-y)\theta_3(0)\theta_4(0) = \theta_3(x)\theta_4(x)\theta_3(y)\theta_4(y) - \theta_4(x)\theta_1(x)\theta_4(y)\theta_1(y)\\
&\theta_4(x+y)\theta_3(x-y)\theta_3(0)\theta_4(0) = \theta_3(x)\theta_4(x)\theta_3(y)\theta_4(y) + \theta_4(x)\theta_1(x)\theta_4(y)\theta_1(y)\\
&\theta_3(x+y)\theta_2(x-y)\theta_3(0)\theta_2(0) = \theta_3(x)\theta_2(x)\theta_3(y)\theta_2(y) + \theta_4(x)\theta_1(x)\theta_4(y)\theta_1(y)\\
&\theta_2(x+y)\theta_3(x-y)\theta_2(0)\theta_3(0) = \theta_3(x)\theta_2(x)\theta_3(y)\theta_2(y) - \theta_4(x)\theta_1(x)\theta_4(y)\theta_1(y)\\
&\theta_4(x+y)\theta_2(x-y)\theta_4(0)\theta_2(0) = \theta_3(x)\theta_1(x)\theta_3(y)\theta_1(y) + \theta_4(x)\theta_2(x)\theta_4(y)\theta_2(y)\\
&\theta_2(x+y)\theta_4(x-y)\theta_2(0)\theta_4(0) = \theta_4(x)\theta_2(x)\theta_4(y)\theta_2(y) - \theta_3(x)\theta_1(x)\theta_3(y)\theta_1(y)\\
&\theta_1(x+y)\theta_1(x-y)\theta_3^2(0) = \theta_1^2(x)\theta_3^2(y) - \theta_3^2(x)\theta_1^2(y) = \theta_4^2(x)\theta_2^2(y) - \theta_2^2(x)\theta_4^2(y)\\
&\theta_1(x+y)\theta_3(x-y)\theta_4(0)\theta_2(0) = \theta_3(x)\theta_1(x)\theta_4(y)\theta_2(y) + \theta_2(x)\theta_4(x)\theta_3(y)\theta_1(y)\\
&\theta_3(x+y)\theta_1(x-y)\theta_4(0)\theta_2(0) = \theta_3(x)\theta_1(x)\theta_4(y)\theta_2(y) - \theta_2(x)\theta_4(x)\theta_3(y)\theta_1(y)\\
&\theta_1(x+y)\theta_4(x-y)\theta_3(0)\theta_2(0) = \theta_3(x)\theta_2(x)\theta_4(y)\theta_1(y) + \theta_4(x)\theta_1(x)\theta_3(y)\theta_2(y)\\
&\theta_4(x+y)\theta_1(x-y)\theta_3(0)\theta_2(0) = \theta_4(x)\theta_1(x)\theta_3(y)\theta_2(y) - \theta_3(x)\theta_2(x)\theta_4(y)\theta_1(y)\\
&\theta_1(x+y)\theta_2(x-y)\theta_3(0)\theta_4(0) = \theta_3(x)\theta_4(x)\theta_2(y)\theta_1(y) + \theta_2(x)\theta_1(x)\theta_3(y)\theta_4(y)\\
&\theta_2(x+y)\theta_1(x-y)\theta_3(0)\theta_4(0) = \theta_2(x)\theta_1(x)\theta_3(y)\theta_4(y) - \theta_3(x)\theta_4(x)\theta_2(y)\theta_1(y)
\end{aligned}$$

1.3.7 Corol·lari. *(Altres relacions)*

$$\theta_3^2(x)\theta_3^2(0) = \theta_4^2(x)\theta_4^2(0) + \theta_2^2(x)\theta_2^2(0), \tag{1.1}$$

$$\theta_4^2(x)\theta_2^2(0) = \theta_1^2(x)\theta_3^2(0) + \theta_2^2(x)\theta_4^2(0), \tag{1.2}$$

$$\theta_4^2(x)\theta_3^2(0) = \theta_1^2(x)\theta_2^2(0) + \theta_3^2(x)\theta_4^2(0), \tag{1.3}$$

$$\theta_3^2(x)\theta_2^2(0) = \theta_1^2(x)\theta_4^2(0) + \theta_2^2(x)\theta_3^2(0). \tag{1.4}$$

DEMOSTRACIÓ: A partir de les fórmules d'addició i substituint $y = 0$, obtenim aquestes expressions. □

1.3.8 Corol·lari. Identitat de Jacobi

$$\theta_3^4(0) = \theta_4^4(0) + \theta_2^4(0). \tag{1.5}$$

1.3.3 Derivades de quocients de funcions theta

Considerem ara la fórmula d'addició:

$$\theta_1(x+y)\theta_4(x-y)\theta_3(0)\theta_2(0) = \theta_3(x)\theta_2(x)\theta_4(y)\theta_1(y) + \theta_4(x)\theta_1(x)\theta_3(y)\theta_2(y)$$

Derivem respecte a y, substituïm $y = 0$ i tenint en compte que $\theta_1(0) = \theta_2'(0) = \theta_3'(0) = \theta_4'(0) = 0$, obtenim que:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\theta_1}{\theta_4}\right) = \frac{\theta_4^2(0)\theta_2(x)\theta_3(x)}{\theta_4^2(x)}. \tag{1.6}$$

A partir de les expressions (1.1)-(1.4) del corol·lari anterior, podem reescriure (1.2):

$$\left(\frac{\theta_1(x)}{\theta_4(x)}\right)^2 \theta_3^2(0) + \left(\frac{\theta_2(x)}{\theta_4(x)}\right)^2 \theta_4^2(0) = \theta_2^2(0). \quad (1.2)'$$

Derivant respecte a x i substituint (1.6), obtenim:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\theta_2}{\theta_4}\right) = -\frac{\theta_3^2(0)\theta_1(x)\theta_3(x)}{\theta_4^2(x)} \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\theta_3}{\theta_4}\right) = -\frac{\theta_2^2(0)\theta_1(x)\theta_2(x)}{\theta_4^2(x)} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\theta_1}{\theta_3}\right) = \frac{\theta_3^2(0)\theta_2(x)\theta_4(x)}{\theta_3^2(x)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\theta_2}{\theta_3}\right) = -\frac{\theta_4^2(0)\theta_1(x)\theta_4(x)}{\theta_3^2(x)} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right) = \frac{\theta_2^2(0)\theta_3(x)\theta_4(x)}{\theta_2^2(x)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\theta_4}{\theta_1}\right) = -\frac{\theta_4^2(0)\theta_2(x)\theta_3(x)}{\theta_1^2(x)} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\theta_4}{\theta_2}\right) = \frac{\theta_3^2(0)\theta_1(x)\theta_3(x)}{\theta_2^2(x)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\theta_4}{\theta_3}\right) = \frac{\theta_2^2(0)\theta_1(x)\theta_2(x)}{\theta_3^2(x)} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\theta_3}{\theta_1}\right) = -\frac{\theta_3^2(0)\theta_2(x)\theta_4(x)}{\theta_1^2(x)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\theta_3}{\theta_2}\right) = \frac{\theta_4^2(0)\theta_1(x)\theta_4(x)}{\theta_2^2(x)} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right) = -\frac{\theta_2^2(0)\theta_3(x)\theta_4(x)}{\theta_1^2(x)}$$

A més tenim que les expressions (1.2) i (1.3) també es poden reescriure de la següent manera:

$$\theta_4^2(0)\left(\frac{\theta_2^2(x)}{\theta_4^2(x)}\right) = \theta_2^2(0) - \theta_3^2(0)\left(\frac{\theta_1^2(x)}{\theta_4^2(x)}\right),$$

$$\theta_4^2(0)\left(\frac{\theta_3^2(x)}{\theta_4^2(x)}\right) = \theta_3^2(0) - \theta_2^2(0)\left(\frac{\theta_1^2(x)}{\theta_4^2(x)}\right),$$

Utilitzant (1.6), obtenim:

$$\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2 = \left[\theta_2^2(0) - \theta_3^2(0)\zeta^2\right]\left[\theta_3^2(0) - \theta_2^2(0)\zeta^2\right], \quad \text{on} \quad \zeta = \frac{\theta_1(x)}{\theta_4(x)}.$$

1.4 La funció ℘ de Weierstrass i les funcions theta de Jacobi

1.4.1 La funció ℘ de Weierstrass i les funcions theta

Sigui:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in\Lambda-\{0\}}\left[\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right], \quad \text{on } \Lambda = \langle 1, \tau\rangle.$$

Recordem algunes propietats de la funció $\wp$:

- $\wp$ és parella, meromorfa amb només un pol doble a $z = 0$.

- $\wp$ és periòdica: $\wp(z+\omega) = \wp(z)$, per a tot $\omega \in \Lambda$.

- $\wp'$ és senar, amb només un pol triple a $z = 0$ i zeros: $\frac{1}{2}$, $\frac{1+\tau}{2}$ i $\frac{\tau}{2}$.

- $\wp$ satisfà l'equació funcional següent:

$\wp'^2 = 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3) = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$,

$g_2 = -4(e_1e_2 + e_2e_3 + e_1e_3) = 2(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2)$,

on $e_1 = \wp(1/2)$, $e_2 = \wp(\frac{1+\tau}{2})$, $e_3 = \wp(\tau/2)$.

1.4.1 Proposició. *$\wp$ satisfà la relació següent:*

$$\wp(z) = \frac{-d^2}{dz^2} \log \theta_1(z) + C\,.$$

Demostració: Com que $\wp(z)$ i $\frac{-d^2}{dz^2} \log \theta_1(z)$ tenen la mateixa periodicitat i els mateixos pols, hauran d'ésser iguals llevat d'una constant C. $\square$

Calculem la constant C:

$$\frac{d^2}{dz^2} \log \theta_1(z) = \frac{\theta_1''(z)\theta_1(z) - [\theta_1'(z)]^2}{\theta_1^2(z)}.$$

Desenvolupem el factor de la dreta a partir de la fórmula :

$$\theta_1(x+y)\theta_1(x-y)\theta_3^2(0) = \theta_1^2(x)\theta_3^2(y) - \theta_3^2(x)\theta_1^2(y).$$

Calculem la $\frac{d^2}{dy^2}$, substituïm $z = x$, $y = 0$ i considerant que $\theta_1(0) = 0$, $\theta_3'(0) = 0$ ($\theta_3$parell), $\theta_1''(0) = 0$ ($\theta_1$senar), obtenim:

$$\frac{d^2}{dz^2} \log \theta_1(z) = \frac{\theta_3''(0)}{\theta_3(0)} - \frac{\theta_1'(0)^2}{\theta_3(0)^2} \cdot \frac{\theta_3(z)^2}{\theta_1(z)^2}.$$

Per tant, així podem expressar $\wp$ de la següent manera:

$$\wp(z) = \frac{-d^2}{dz^2} \log \theta_1(z) + C = -\frac{\theta_3''(0)}{\theta_3(0)} + \frac{\theta_1'(0)^2}{\theta_3(0)^2} \cdot \frac{\theta_3(z)^2}{\theta_1(z)^2} + C = C_1 + \left[\frac{\theta_1'(0)}{\theta_3(0)} \cdot \frac{\theta_3(z)}{\theta_1(z)}\right]^2.$$

1.4.2 Corol·lari. *Tenim les relacions següents entre $\wp$, les arrels e_i i els Thetanullwerte:*

$$\wp(z) = e_2 + \left[\frac{\theta_1'(0)}{\theta_3(0)} \cdot \frac{\theta_3(z)}{\theta_1(z)}\right]^2, \quad \wp(z) = e_1 + \left[\frac{\theta_1'(0)}{\theta_2(0)} \cdot \frac{\theta_2(z)}{\theta_1(z)}\right]^2,$$
$$\wp(z) = e_3 + \left[\frac{\theta_1'(0)}{\theta_4(0)} \cdot \frac{\theta_4(z)}{\theta_1(z)}\right]^2,$$

$$\sqrt{e_1 - e_2} = \pi\theta_4(0)^2, \qquad \sqrt{e_1 - e_3} = \pi\theta_3(0)^2, \qquad \sqrt{e_2 - e_3} = \pi\theta_2(0)^2,$$

$$e_1 = \tfrac{\pi^2}{3}(\theta_3^4(0) + \theta_4^4(0)),\ e_2 = \tfrac{\pi^2}{3}(\theta_2^4(0) - \theta_4^4(0)),\ e_3 = \tfrac{-\pi^2}{3}(\theta_2^4(0) + \theta_3^4(0)).$$

Demostració: Avaluant a $z = \frac{1+\tau}{2}$, zero de θ_3, obtenim que $C_1 = e_2$. Per tant:

$$\wp(z) = e_2 + \left[\frac{\theta_1'(0)}{\theta_3(0)} \cdot \frac{\theta_3(z)}{\theta_1(z)}\right]^2.$$

A partir de la relació: $\theta_3^2(z)\theta_2^2(0) = \theta_1^2(z)\theta_4^2(0) + \theta_2^2(z)\theta_3^2(0)$, dividint per $\theta_3^2(0)$, substituint a l'expressió anterior de $\wp(z)$ i avaluant a $z = 1/2$, zero de θ_2, obtenim:

$$\wp(z) = e_1 + \left[\frac{\theta_1'(0)}{\theta_2(0)} \cdot \frac{\theta_2(z)}{\theta_1(z)}\right]^2.$$

Anàlogament:

$$\wp(z) = e_3 + \left[\frac{\theta_1'(0)}{\theta_4(0)} \cdot \frac{\theta_4(z)}{\theta_1(z)}\right]^2.$$

Relacionant ara les arrels:

$$e_1 - e_2 = \left[\frac{\theta_1'(0)}{\theta_1(z)}\right]^2 \cdot \left[\frac{\theta_3^2(z)}{\theta_3^2(0)} - \frac{\theta_2^2(z)}{\theta_2^2(0)}\right].$$

Avaluant a $z = 1/2$ i arreglant, obtenim:

$$\sqrt{e_1 - e_2} = \frac{\theta_1'(0)}{\theta_2(0)} \cdot \frac{\theta_4(0)}{\theta_3(0)} = \frac{\pi\theta_2(0)\theta_3(0)\theta_4(0)^2}{\theta_2(0)\theta_3(0)} = \pi\theta_4(0)^2.$$

Anàlogament s'obtenen les altres dues expressions. Finalment, s'obtenen sense dificultats les expressions indicades. □

1.4.2 L'invariant j, el discriminant Δ i els Thetanullwerte

Partim de l'expressió

$$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 = 16(e_1 - e_2)^2(e_2 - e_3)^2(e_3 - e_1)^2.$$

Podem relacionar els invariants el·líptics j, Δ, i les arrels e_1, e_2, e_3 amb els Thetanullwerte $\theta_1'(0), \theta_2(0), \theta_3(0), \theta_4(0)$ obtenint, a partir de totes les relacions exposades a l'apartat anterior, el conjunt de fórmules següent:

$$\Delta = 16\pi^{12}\ [\theta_2(0)\theta_3(0)\theta_4(0)]^8 = 16\pi^4\ [\theta_1'(0)]^8,$$

$$g_2 = 2(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) = \frac{2}{3}\pi^4\ [\theta_2^8(0) + \theta_3^8(0) + \theta_4^8(0)],$$

$$g_3 = \frac{4}{27}\pi^6\ [\theta_2^4(0) + \theta_3^4(0)][\theta_3^4(0) + \theta_4^4(0)][\theta_4^4(0) - \theta_2^4(0)],$$

$$j = \frac{g_2^3}{\Delta} = \frac{1}{54}\,\frac{[\theta_2^8(0) + \theta_3^8(0) + \theta_4^8(0)]^3}{\theta_2^8(0)\theta_3^8(0)\theta_4^8(0)}.$$

Bibliografia

[Ki 96] R. B. King, *Beyond the Quartic Equation*. Birkhäuser, 1996.

[Law 98] D. F. Lawden, *Elliptic Functions and Applications*. Colledge Press, 1998.

[Mum83-I] D. Mumford, *Tata Lectures on Theta I*. Birkhäuser, 1983.

[McKean-Moll 99] H. McKean, V. Moll, *Elliptic Curves*. Cambridge University Press, 1999.

E. Torres

Dept. de Matemàtica Aplicada IV

Escola Politècnica Superior d'Enginyeria de Vilanova i la Geltrú

Av. Víctor Balaguer s/n

E-08800, Vilanova i la Geltrú

eugenia@mat.upc.es

Capítol 2

Funcions theta de Jacobi i corbes el·líptiques (II)

M. Vela

Aquest segon capítol sobre les funcions theta de Jacobi constarà de quatre parts ben diferenciades. En la primera presentarem les funcions el·líptiques de Jacobi, n'estudiarem les propietats i les expressarem en funció de les funcions theta. La segona part és la dedicada a la immersió del tor en l'espai projectiu mitjançant funcions theta. Estudiarem l'aplicació que ens defineix la immersió i donarem explícitament, en el cas de l'espai projectiu tridimensional, la imatge del tor com a intersecció de dues quàdriques. En la tercera secció farem l'estudi de les funcions theta al variar la variable τ essencialment sota l'acció del grup modular i estudiarem també la relació al multiplicar τ per 2. Per finalitzar aplicarem les funcions theta per resoldre tres problemes clàssics: el càlcul del nombre de representacions d'un enter positiu com a suma de dos o quatre quadrats, la diferència entre les particions parelles i senars d'un enter i la resolució de l'equació general de grau 5.

Amb finançament parcial de MCYT BFM2003-06768-C02-01.

2.1 Funcions el·líptiques de Jacobi: $\mathrm{sn}, \mathrm{cn}, \mathrm{dn}$

La definició i propietats d'aquestes funcions $\mathrm{sn}, \mathrm{cn}, \mathrm{dn}$ es poden trobar a [La 98, Cap. 2 i 3] i a [M-M 99, Cap.2 i 3]. El primer les defineix directament a partir de la seva relació amb les funcions θ i d'aquí en dedueix les propietats. És al capítol 3 on les relaciona amb la inversió d'integrals. Nosaltres donarem la definició tal com ho fa la segona referència, a partir de la inversió d'integrals i deduirem després la seva expressió en funció de les funcions θ.

2.1.1 Inversió d'integrals

Donada la funció $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$, la seva funció inversa és $G(x)$ tal que $x = \displaystyle\int_a^{G(x)} f(t)dt$. És fàcil comprovar que la composició de G amb F és la identitat:

$$(F \circ G)(x) = F(G(x)) = \int_a^{G(x)} f(t)dt = x$$
$$(G \circ F)(x) = G(F(x)) = x \Leftrightarrow F(x) = \int_a^{G(F(x))} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt.$$

Alguns exemples coneguts de la inversió d'integrals són:

1. Si $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{\sqrt{t^2}}dt = Ln(t)$, la seva inversa és e^x perquè $x = \displaystyle\int_1^{e^x} \frac{1}{\sqrt{t^2}}dt$.

2. Si $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$, la seva inversa és $\sin(x)$ perquè

   $$x = \int_0^{\sin(x)} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

   llevat de períodes, com a funció sobre el cilindre $\mathbb{C}/\langle 2\pi\mathbb{Z}\rangle$, ja que $[\arcsin(t)]' = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

   En aquest cas, el període de $\sin(x)$ és $2\pi = 4\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$.

3. Un altre exemple conegut és la funció $\wp(x)$ de Weierstrass que inverteix $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}} dt$, ja que

$$\frac{d\wp}{dz} = \wp'(z) = \sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3} \quad \text{i, aleshores,}$$

$$\frac{d\wp^{-1}}{dz} = \frac{1}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}} = (\wp^{-1}(z))'.$$

Estudiarem les funcions el·líptiques de Jacobi com a inverses de funcions integrals.

2.1.2 Funcions el·líptiques de Jacobi

Considerem la funció $F(x,k) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$.

(Per a $k = 0$ és el cas de $\sin(x)$).

2.1.1 Definició. (Jacobi, 1829) : El sinus amplitudinus $\mathrm{sn}(x,k)$ és la inversa de $F(x,k)$, és a dir, és la funció tal que

$$x = \int_0^{\mathrm{sn}(x,k)} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

Fent el canvi $t = \sin(\alpha)$,

$$x = \int_0^{\mathrm{sn}(x,k)} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^{\phi} \frac{d\alpha}{\sqrt{(1-k^2\sin^2(\alpha))}},$$

on $\phi = \arcsin(\mathrm{sn}(x,k))$ s'anomena amplitud de x i tenim la relació

$$\mathrm{sn}(x,k) = \sin(\phi).$$

2.1.2 Definició. A partir de $\mathrm{sn}(x,k)$ es defineixen les altres funcions el·líptiques de Jacobi:

- $\mathrm{cn}(x,k) = \sqrt{1 - \mathrm{sn}^2(x,k)}$ $(= \cos(\phi))$, és el cosinus amplitudinus.
- $\mathrm{dn}(x,k) = \sqrt{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2(x,k)}$.

Observem que $\mathrm{cn}(x,k)$ inverteix la integral $\displaystyle\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2-k^2t^2)}}$, és a dir, $x = \displaystyle\int_{\mathrm{cn}(x,k)}^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2-k^2t^2)}}$.

Comprovem aquest resultat fent el canvi

$$t = \sqrt{1-u^2} \Leftrightarrow u = \sqrt{1-t^2}$$

en la integral que inverteix $\mathrm{sn}(s,k)$:

$$x = \int_0^{\mathrm{sn}(x,k)} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = -\int_1^{\mathrm{cn}(x,k)} \frac{dt}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2-k^2u^2)}}.$$

De la mateixa manera, fent el canvi $t = \frac{\sqrt{1-u^2}}{k}$, es prova que $\mathrm{dn}(x,k)$ inverteix $\displaystyle\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(t^2-k'^2)}}$, on $k' = \sqrt{1-k^2}$.

Mòdul complementari i integrals el·líptiques de primera espècie

2.1.3 Definició. El mòdul complementari de k és $k' = \sqrt{1-k^2}$, és a dir, el valor que fa que $k^2 + k'^2 = 1$.

Relacionades amb les funcions de Jacobi, tenim les integrals el·líptiques de primera espècie. De fet, el valor en 1 de la integral que inverteix $\mathrm{sn}(x,k)$ és la integral el·líptica de primera espècie:

2.1.4 Definició. La integral

$$K(k) = F(1) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

és la integral el·líptica completa de primera espècie de mòdul k. La integral

$$K'(k) = \int_1^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}} = K(k') = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}}$$

és la integral complementària de primera espècie obtinguda a partir de k', el mòdul complementari de k.

En la segona definició, passem d'una integral a l'altra mitjançant el canvi de variables $t \to \frac{1}{\sqrt{1-k'2t^2}}$.

Observem que $\mathrm{sn}(K,k) = 1$ de la mateixa manera que $\sin(\pi/2) = 1$.

Podem expressar la integral el·líptica de primera espècie en funció de la mitjana aritmètico-geomètrica:

$$K(k) = a\int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha}} = \frac{a\pi}{2MAG(a,b)}$$

per a $k^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$ amb $1 > a > b > 0$ mitjançant el canvi $t = \cos\alpha$.

Propietats de les funcions el·líptiques de Jacobi

2.1.5 Proposició. *Les principals propietats de les funcions el·líptiques de Jacobi són:*

1. $\mathrm{sn}^2(x,k) + \mathrm{cn}^2(x,k) = 1, \quad k^2\,\mathrm{sn}^2(x,k) + \mathrm{dn}^2(x,k) = 1.$
2. $\mathrm{sn}(0,k) = 0$, $\mathrm{sn}(K,k) = 1$, $\mathrm{cn}(0,k) = 1$, $\mathrm{dn}(0,k) = 1$, *per a qualsevol valor de* k.
3. *Derivades:*

$$\frac{d}{dx}\mathrm{sn}(x,k) = \mathrm{cn}(x,k)\ \mathrm{dn}(x,k),$$

$$\frac{d}{dx}\mathrm{cn}(x,k) = -\,\mathrm{sn}(x,k)\ \mathrm{dn}(x,k),$$

$$\frac{d}{dx}\mathrm{dn}(x,k) = -k^2\ \mathrm{sn}(x,k)\ \mathrm{cn}(x,k).$$

4. $\mathrm{sn}(x)$ *parametritza la corba*

$$(y')^2 = (1-y^2)(1-k^2y^2),$$

és a dir, és solució d'aquesta equació diferencial amb condició de contorn $(y')_{x=0} = 1$.

5. $\mathrm{sn}(x)$ *és senar,* $\mathrm{cn}(x), \mathrm{dn}(x)$ *són parelles.*
6. *Són funcions doblement periòdiques. Els períodes són:*

$$\mathrm{sn}(x) : 4K \ i\ 2iK', \quad \mathrm{cn}(x) : 4K \ i\ 2K + 2iK', \quad \mathrm{dn}(x) : 2K \ i\ 4iK'.$$

7. *Zeros. Per a* $\tau = \frac{iK'}{K}$*:*

· $\mathrm{sn}(x)$ *té zeros a* $x = \theta_3^2(0)(m + n\tau)$,
· $\mathrm{cn}(x)$ *té zeros a* $x = \theta_3^2(0)(m + 1/2 + n\tau)$,
· $\mathrm{dn}(x)$ *té zeros a* $x = \theta_3^2(0)(m + 1/2 + (n+1/2)\tau)$.

8. *Singularitats:*

$\cdot\ \mathrm{sn}(x)$ *té pols a* iK' *i* $2K+iK'$ *amb residus* $\frac{1}{k}$ *i* $-\frac{1}{k}$,
$\cdot\ \mathrm{cn}(x)$ *té pols a* iK' *i* $2K+iK'$ *amb residus* $-\frac{i}{k}$ *i* $\frac{i}{k}$,
$\cdot\ \mathrm{dn}(x)$ *té pols a* iK' *i* $3iK'$ *amb residus* $-i$ *i* i.

Demostració: Provarem ara les quatre primeres propietats. La resta es dedueixen de l'expressió de $\mathrm{sn}(x,k), \mathrm{cn}(x,k)$ i $d(x,k)$ en funció de les funcions theta.

1. Aquesta propietat és conseqüència directa de la definició de $\mathrm{sn}(x,k)$ i $\mathrm{dn}(x,k)$.

2. A partir de la definició de $\mathrm{sn}(x,k)$ es veu que $\mathrm{sn}(0,k)=0$ i, de la definició de la integral el·líptica de primera espècie es dedueix $\mathrm{sn}(K,k)=1$. De la definició de cn i dn s'obtenen els altres dos valors.

3. Derivant la igualtat $x = F(\sin(x,k))$, obtenim

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dx}\,\mathrm{sn}(x) = (\frac{d}{dx}F(\mathrm{sn}(x)))^{-1} &= \sqrt{(1-\mathrm{sn}^2(x))(1-k^2\,\mathrm{sn}^2(x))} \\ &= \mathrm{cn}(x)\,\mathrm{dn}(x). \end{aligned}$$

Derivant les relacions de la primera propietat, obtenim les derivades respecte a x de cn i dn.

4. De la derivada anterior, podem deduir que

$$(\frac{d}{dx}\,\mathrm{sn}(x))^2 = (1-\mathrm{sn}^2(x))(1-k^2\,\mathrm{sn}^2(x)),$$

és a dir, $\mathrm{sn}(x,k)$ és solució de l'equació diferencial donada. El valor en $x=0$ de la derivada és 1 perquè $\mathrm{cn}(0,k)\,\mathrm{dn}(0,k)=1$. $\square$

Relació amb la funció $\wp$

El cos de les funcions el·líptiques també es pot generar a partir de les funcions el·líptiques de Jacobi. De fet:

$$\begin{aligned} \mathbb{K} = {} & \mathbb{C}(\wp,\wp') = \\ = {} & \mathbb{C}(\mathrm{sn})[\sqrt{(1-\mathrm{sn}^2)(1-k^2\,\mathrm{sn}^2)}] \text{ per a un mòdul adequat } k^2 \neq 0,1. \end{aligned}$$

Explícitament, podem expressar sn en funció de $\wp$:

$$\mathrm{sn}(x') = \sqrt{\frac{e_1-e_2}{\wp(x)-e_3}}$$

per a $k^2 = \frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}$ i $x' = x\sqrt{e_1 - e_3}$.

La xarxa corresponent a les funcions $\wp, \wp'$ és $\langle 1, \tau\rangle$ on $\tau = i\frac{K'}{K}$.

2.1.3 Funcions el·líptiques de Jacobi i funcions theta

Les funcions $\mathrm{sn}(x), \mathrm{cn}(x), \mathrm{dn}(x)$ es poden expressar en funció de les $\theta_i(z)$. En particular,

2.1.6 Proposició.

$$\mathrm{sn}(x,k) = \frac{\theta_3(0)}{\theta_2(0)} \cdot \frac{\theta_1(z)}{\theta_4(z)},$$

amb $z = \dfrac{x}{\pi\theta_3^2(0)}$ *per a* $k^2 = \dfrac{\theta_2^4(0)}{\theta_3^4(0)}$.

Demostració: La demostració d'aquest resultat es basa en provar que la funció $y = \frac{\theta_3(0)}{\theta_2(0)} \cdot \frac{\theta_1(z)}{\theta_4(z)}$ satisfà l'equació diferencial de la qual era solució $\mathrm{sn}(x)$, $(y')^2 = (1-y^2)(1-k^2y^2)$ amb la mateixa condició inicial $(y')_{x=0} = 1$ per a aquesta k.
Derivant la funció y tenint en compte que $\frac{d}{dx}(\frac{\theta_1(z)}{\theta_4(z)}) = \frac{\theta_4^2(0)\theta_2(z)\theta_3(z)}{\theta_4^2(z)}$, tal com hem vist amb anterioritat, i el valor de z respecte a x, obtenim

$$y' = \frac{\theta_4^2(0)}{\theta_2(0)\theta_3(0)} \cdot \frac{\theta_2(z)\theta_3(z)}{\theta_4^2(z)}.$$

Per altra banda, fent servir diferents igualtats entre valors de les funcions $\theta(z)$, obtenim:

$$1 - y^2 = \left(\tfrac{\theta_4(0)}{\theta_2(0)} \cdot \tfrac{\theta_2(z)}{\theta_4(z)}\right)^2,$$

$$1 - k^2y^2 = \left(\tfrac{\theta_4(0)}{\theta_3(0)} \cdot \tfrac{\theta_3(z)}{\theta_4(z)}\right)^2,$$

d'on es dedueix la igualtat $(y')^2 = (1-y^2)(1-k^2y^2)$.

Per comprovar la condició inicial fem

$$(y')_{x=0} = \frac{\theta_4^2(0)}{\theta_2(0)\theta_3(0)} \cdot \frac{\theta_2(0)\theta_3(0)}{\theta_4^2(0)} = 1.\square$$

2.1.7 Proposició.

$$\operatorname{cn}(x) = \frac{\theta_4(0)}{\theta_2(0)} \cdot \frac{\theta_2(z)}{\theta_4(z)}, \qquad \operatorname{dn}(x) = \frac{\theta_4(0)}{\theta_3(0)} \cdot \frac{\theta_3(z)}{\theta_4(z)},$$

$$k^2 = \frac{\theta_2^4(0)}{\theta_3^4(0)}, \qquad k'^2 = \frac{\theta_4^4(0)}{\theta_3^4(0)},$$

$$K(k) = \frac{\pi}{2}\theta_3^2(0), \qquad iK'(k) = \tau K(k) = \tau\frac{\pi}{2}\theta_3^2(0).$$

Demostració: Aquestes fórmules s'obtenen a partir de la relació de $\operatorname{sn}(x,k)$ amb les altres funcions, aplicant algunes de les múltiples igualtats entre funcions θ. Per exemple:

$$\operatorname{cn}^2(x,k) = 1 - \operatorname{sn}^2(x,k) = \frac{\theta_2^2(0)\theta_4^2(z) - \theta_3^2(0)\theta_1^2(z)}{\theta_2^2(0)\theta_4^2(z)} = \frac{\theta_4^2(0)\theta_2^2(z)}{\theta_2^2(0)\theta_4^2(z)}.$$

Anàlogament, es demostrarien la resta a partir de la relació amb $\operatorname{sn}(x,k)$:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sn}(x) = \operatorname{cn}(x)\ \operatorname{dn}(x) \quad \Rightarrow \operatorname{dn}(x) = \frac{\theta_4(0)}{\theta_3(0)} \cdot \frac{\theta_3(z)}{\theta_4(z)},$$

$$\operatorname{dn}^2(x) + k^2\operatorname{sn}^2(x) = 1 \quad \Rightarrow k^2 = \frac{\theta_2^4(0)}{\theta_3^4(0)},$$

$$k^2 + k'^2 = 1 \quad \Rightarrow k'^2 = \frac{\theta_4^4(0)}{\theta_3^4(0)}.$$

Per demostrar les dues últimes igualtats, avaluem $\operatorname{sn}(x,k)$ en $x = \frac{\pi}{2}\theta_3^2(0)$ amb la qual cosa $z = \frac{x}{\pi\theta_3^2(0)} = \frac{1}{2}$. Així, per a aquest valor

$$\operatorname{sn}(x,k) = \frac{\theta_3(0)}{\theta_2(0)} \cdot \frac{\theta_1(1/2)}{\theta_4(1/2)} = \frac{\theta_3(0)}{\theta_2(0)} \cdot \frac{\theta_2(0)}{\theta_3(0)} = 1,$$

perquè $\theta_1(x+1/2) = \theta_2(x)$ i $\theta_4(x+1/2) = \theta_3(x)$.
Per tant, $K(k) = \frac{\pi}{2}\theta_3^2(0)$ i d'aquí es dedueix el valor de $K'(k)$. $\square$

2.1.8 Corol·lari. *A partir de les expressions de les θ_i com a productes* *infinits, obtenim:*

$$k = 4\,q^{\frac{1}{2}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+q^{2n}}{1+q^{2n-1}} \right)^4,$$

$$k' = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}} \right)^4,$$

$$K = \tfrac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n})^2 (1+q^{2n-1})^4,$$

$$K' = \tfrac{-Lnq}{2} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n})^2 (1+q^{2n-1})^4.$$

A partir de les expressions de $\mathrm{sn}(x,k)$, $\mathrm{cn}(x,k)$, $\mathrm{dn}(x,k)$ en funció de les $\theta_i(z)$, podem acabar de demostrar les seves propietats:

Fi de la demostració de la proposició 2.1.5:

5. Com que $\theta_1(z)$ és senar i $\theta_2(z), \theta_3(z), \theta_4(z)$ són parelles, obtenim que $\mathrm{sn}(x)$ és senar i $\mathrm{cn}(x), \mathrm{dn}(x)$ són parelles.

6. Els períodes de les funcions de Jacobi es calculen a partir de la periodicitat ja estudiada de les funcions θ_i. Farem el cas del $\mathrm{sn}(x,k)$ i els altres es fan de manera anàloga.

És fàcil comprovar que $4K$ i $2iK' = 2\tau K$ són períodes de $\mathrm{sn}(x,k)$:

$$\mathrm{sn}(x+4K,k) = \frac{\theta_3(0)}{\theta_2(0)} \cdot \frac{\theta_1(z+2)}{\theta_4(z+2)} = \frac{\theta_3(0)}{\theta_2(0)} \cdot \frac{\theta_1(z)}{\theta_4(z)} = \mathrm{sn}(x,k),$$

$$\mathrm{sn}(x+2iK',k) = \frac{\theta_3(0)}{\theta_2(0)} \cdot \frac{\theta_1(z+\tau)}{\theta_4(z+\tau)} = \frac{\theta_3(0)}{\theta_2(0)} \cdot \frac{\theta_1(z)}{\theta_4(z)} = \mathrm{sn}(x,k),$$

perquè $2K = \pi\theta_3^2(0)$.

Si tenim un altre valor T tal que $\mathrm{sn}(x+T,k) = \mathrm{sn}(x,k)$, cal que

$$\frac{\theta_1(\frac{x+T}{\pi\theta_3^2(0)})}{\theta_4(\frac{x+T}{\pi\theta_3^2(0)})} = \frac{\theta_1(z)}{\theta_4(z)} \Longleftrightarrow \frac{\theta_1(\frac{x+T}{2K})}{\theta_4(\frac{x+T}{2K})} = \frac{\theta_1(\frac{x}{2K})}{\theta_4(\frac{T}{2K})}.$$

Si denotem $y = x/2K$ i $t = T/2K$, la relació que s'ha de complir és $\frac{\theta_1(y+t)}{\theta_4(y+t)} = \frac{\theta_1(y)}{\theta_4(y)}$. Posant $y = m + n\tau$, amb $m, n \in \mathbb{Z}$ i de les relacions de periodicitat de

θ_1 i θ_4, deduïm que $\frac{\theta_1(y+t)}{\theta_4(y+t)} = (-1)^m \frac{\theta_1(y)}{\theta_4(y)}$. Per tant, tenim la igualtat per a qualsevol valor parell de m, és a dir, sempre que $y = 2r + n\tau$ amb $r \in \mathbb{Z}$. Així tenim

$$\operatorname{sn}(2K(2r + n\tau), k) = \operatorname{sn}(x, k)$$

i obtenim com a períodes $4K$ i $2K\tau = 2iK'$.

7. Calculem els zeros a partir dels zeros de $\theta_1(z), \theta_2(z), \theta_3(z)$:

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(x,k) = 0 \quad & \Leftrightarrow \theta_1(z) = 0 \Leftrightarrow z = m + n\tau = \tfrac{x}{\pi\theta_3^2(0)} \\ & \Longrightarrow x = \theta_3^2(0)(m + n\tau), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{cn}(x,k) = 0 \quad & \Leftrightarrow \theta_2(z) = 0 \Leftrightarrow z = m + 1/2 + n\tau \\ & \Longrightarrow x = \theta_3^2(0)(m + 1/2 + n\tau), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{dn}(x,k) = 0 \quad & \Leftrightarrow \theta_3(z) = 0 \Leftrightarrow z = m + 1/2 + (n + 1/2)\tau \\ & \Longrightarrow x = \theta_3^2(0)(m + 1/2 + (n + 1/2)\tau), \end{aligned}$$

on $m, n \in \mathbb{Z}$ i $\tau = \frac{iK'}{K}$.

8. Les singularitats les obtenim també a partir de les relacions de les funcions de Jacobi amb les funcions θ_i. Com que els zeros de la funció $\theta_4(z)$ estan en els punts $z = n + (m + 1/2)\tau = \frac{x}{2K}$, els pols d'aquestes funcions el·líptiques estan en els punts $x = 2K(n + (m + 1/2)\tau)$.

Dintre del paral·lelogram fonamental per a $\operatorname{sn}(u)$ de vèrtexs $-K, 3K, 3K + 2iK', -K + 2iK'$, hi ha dues singularitats a $u = iK'$ i $u = 2K + iK'$. Les altres periodicitats són punts congruents amb aquests. Fent el desenvolupament de sn en aquests punts, obtenim els residus. Al primer punt:

$$\operatorname{sn}(iK'+u) = \frac{1}{k\operatorname{sn}(u)} = \frac{1}{ku}[1 - \frac{1}{6}(1+k^2)u^2 + \cdots]^{-1} = \frac{1}{ku} + \frac{1}{6}(1+k^2)u + \cdots,$$

per tant, $\operatorname{sn}(u)$ té un pol simple a $u = iK'$ amb residu $\frac{1}{k}$. De manera anàloga,

$$\operatorname{sn}(2K + iK' + u) = -\operatorname{sn}(iK' + u) = -\frac{1}{ku} + \cdots,$$

i, per tant, $\operatorname{sn}(u)$ té un pol simple a $u = 2K + iK'$ amb residu $-\frac{1}{k}$.

$\operatorname{cn}(u)$ té també un parell de singularitats $u = iK', 2K + iK'$ dins del paral·lelogram de vèrtexs $-2K, 2K, 4K + 2iK', 2iK'$. Desenvolupant com abans,

$$\begin{aligned} \operatorname{cn}(iK' + u) \quad & = \tfrac{1}{ik}\tfrac{\operatorname{dn}(u)}{\operatorname{sn}(u)} = \tfrac{1}{iku}(1 - \tfrac{1}{2}k^2u^2 + \cdots)[1 - \tfrac{1}{6}(1 + k^2)u^2 + \cdots]^{-1} \\ & = \tfrac{1}{iku} + \tfrac{1}{6ik}(1 - 2k^2)u + \cdots, \end{aligned}$$

provem que $\mathrm{cn}(u)$ té un pol simple a $u = iK'$ amb residu $\frac{-i}{k}$. Com que $\mathrm{cn}(2K + iK' + u) = -\mathrm{cn}(iK' + u)$, el residu en l'altre pol és $\frac{i}{k}$.

Pel cas de $\mathrm{dn}(u)$ podem considerar com a paral·lelogram el de vèrtexs $-K, K, K + 4iK'$ i $-K + 4iK'$ que inclou les singularitats $u = iK', 3iK'$ sent la resta congruents amb aquestes. A prop de iK',

$$\begin{aligned} \mathrm{dn}(iK' + u) &= \tfrac{1}{i}\tfrac{\mathrm{cn}(u)}{\mathrm{sn}(u)} = \tfrac{1}{iu}(1 - \tfrac{1}{2}u^2 + \cdots)[1 - \tfrac{1}{6}(1 + k^2)u^2 + \cdots]^{-1} \\ &= \tfrac{1}{iu} + \tfrac{1}{6i}(2 - k^2)u + \cdots \end{aligned}$$

i, per tant, $\mathrm{dn}(u)$ té un pol simple a iK' amb residu $-i$. Ara, com $\mathrm{dn}(3iK' + u) = -\mathrm{dn}(iK' + u)$, el pol simple en $3iK'$ té residu i. □

2.1.4 Càlcul de períodes de corbes el·líptiques

Donada la xarxa $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ i la corba el·líptica

$$E : y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3 = 4(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)$$

amb $e_i \in \mathbb{R}$, $e_1 > e_2 > e_3$, podem triar els períodes

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 2\int_{e_1}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}} = \frac{\pi}{2MAG(\sqrt{e_1 - e_3}, \sqrt{e_1 - e_2})}, \\ \omega_2 &= 2i\int_{-\infty}^{e_3} \frac{dt}{\sqrt{g_3 + g_2 t - 4t^3}} = \frac{i\pi}{MAG(\sqrt{e_1 - e_3}, \sqrt{e_2 - e_3})}. \end{aligned}$$

Havíem vist que podíem expressar la mitjana aritmètico-geomètrica en funció de la integral el·líptica de primera espècie mitjançant la fórmula:

$$K(k) = \frac{a\pi}{2MAG(a,b)} \qquad \text{per a } k^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}.$$

D'aquesta manera

$$\begin{aligned} \omega_1 = \quad & \tfrac{K(k)}{\sqrt{e_1 - e_3}} = \tfrac{\frac{\pi}{2}\theta_3^2(0)}{\sqrt{e_1 - e_3}}, \\ & \quad \text{per a } k^2 = 1 - \tfrac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3} = \tfrac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}; \\ \omega_2 = \quad & \tfrac{iK(\overline{k})}{\sqrt{e_1 - e_3}} = \tfrac{iK(k')}{\sqrt{e_1 - e_3}} = \tfrac{iK'(k)}{\sqrt{e_1 - e_3}} = \tau\tfrac{\frac{\pi}{2}\theta_3^2(0)}{\sqrt{e_1 - e_3}}, \\ & \quad \text{per a } \overline{k}^2 = 1 - \tfrac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \tfrac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3} = 1 - k^2 = k'^2 \text{ i } \tau = i\tfrac{K'}{K}. \end{aligned}$$

2.2 Immersió del tor mitjançant funcions theta

Considerem la xarxa complexa $\Lambda = \langle 1, \tau \rangle$ i el tor associat $\mathbb{C}/\Lambda$. És ben conegut que tenim una immersió del tor en $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$:

2.2.1 Teorema. *Tenim una immersió de $\mathbb{C}/\Lambda$ en $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ donada per*

$$\begin{aligned} \mathbb{C}/\Lambda &\longrightarrow E_\Lambda(\mathbb{C}) \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \\ z &\longmapsto (\wp(z) : \wp'(z) : 1) \end{aligned}$$

que és un isomorfisme de grups, on E_Λ és la corba el·líptica d'equació $E_\Lambda : y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$ perquè $(\wp'(z))^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3$.

Amb les funcions θ_i definirem una immersió

$$\varphi : \mathbb{C}/\Lambda \longrightarrow \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$$

tal que $\mathrm{Im}(\varphi)$ és la corba $Q_1 \bigcap Q_2$, intersecció de dues quàdriques.

2.2.1 Immersió del tor a $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$

2.2.2 Teorema. ([Hu 87, Prop. 3.2, Thm. 3.5], [M-M 99, sec. 3.4], [Mu 83, sec. I.4]) Tenim una immersió

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C}/\Lambda &\longrightarrow \mathbb{P}^3(\mathbb{C}) \\ z &\longmapsto (\theta_1(2z) : \theta_2(2z) : \theta_3(2z) : \theta_4(2z)) \end{aligned}$$

de manera que $\varphi(\mathbb{C}/\Lambda)$ és la corba intersecció de les dues quàdriques:

$$\begin{aligned} Q_1 : \theta_3^2(0)\, x_2^2 &= \theta_2^2(0)\, x_1^2 + \theta_4^2(0)\, x_3^2 \\ Q_2 : \theta_3^2(0)\, x_0^2 &= \theta_2^2(0)\, x_3^2 - \theta_4^2(0)\, x_1^2. \end{aligned}$$

També en dimensió superior tenim un resultat anàleg i una immersió del tor en un espai de dimensió superior:

2.2.3 Teorema. *En general, per a $N \in \mathbb{Z}$, tenim una immersió*

$$\begin{aligned} \varphi_N : \mathbb{C}/\Lambda &\longrightarrow \mathbb{P}^{N^2-1}(\mathbb{C}) \\ z &\longmapsto (\cdots : \theta_{a_i,b_i}(Nz, \tau) : \ldots) \end{aligned}$$

on $\{\theta_{a_i,b_i}\}$ és una base de $\mathbf{V}_N(\tau)$.

Com al cas $N=2$, $\varphi_N(\mathbb{C}/\Lambda)$ és una subvarietat analítica (algebraica) complexa de $\mathbb{P}^{N^2-1}(\mathbb{C})$ isomorfa a $\mathbb{C}/\Lambda$ que està definida mitjançant polinomis homogenis.

Demostració de 2.2.2

Considerem la funció:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C}/\Lambda &\longrightarrow \mathbb{P}^3(\mathbb{C}) \\ z &\longmapsto (\theta_1(2z):\theta_2(2z):\theta_3(2z):\theta_4(2z)). \end{aligned}$$

1. φ està ben definida:
Per la configuració dels zeros de les funcions θ_i, no tots els valors $\theta_i(2z)$ són zero a la vegada. Per tant, $\varphi(z)$ representa un punt de $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$.
A més,

$$(\theta_1(z+2):\theta_2(z+2):\theta_3(z+2):\theta_4(z+2)) = (\theta_1(z):\theta_2(z):\theta_3(z):\theta_4(z))$$

i, també,

$$\begin{aligned} &(\theta_1(z+2\tau):\theta_2(z+2\tau):\theta_3(z+2\tau):\theta_4(z+2\tau)) = \\ &e^{-4\pi i\tau-4\pi iz}(\theta_1(z):\theta_2(z):\theta_3(z):\theta_4(z)), \end{aligned}$$

per tant, està ben definida.

2. φ és una immersió:
Suposem que $\varphi(z_1)=\varphi(z_2)$ per a $z_1\neq z_2\in\mathbb{C}/\Lambda$ ó $d\varphi(z_1)=0$ que és el cas d'un zero doble (cas límit quan $z_2\to z_1$). Considerem els punts $x_1=z_1+1/2$ i $x_2=z_2+1/2$ (ó $d\varphi(x_1)=0$). Calculant les imatges de x_1 i x_2,

$$\begin{aligned} \varphi(x_1) = \quad & (\theta_1(2z_1+1):\theta_2(2z_1+1):\theta_3(2z_1+1):\theta_4(2z_1+1)) = \\ & (-\theta_1(2z_1):-\theta_2(2z_1):\theta_3(2z_1):\theta_4(2z_1)), \\ \varphi(x_2) = \quad & (-\theta_1(2z_2):-\theta_2(2z_2):\theta_3(2z_2):\theta_4(2z_2)), \end{aligned}$$

obtenim que $\varphi(x_1)=\varphi(x_2)$.
A més els elements z_1,z_2,x_1,x_2 són tots quatre diferents: Si, per exemple $z_2=x_1=z_1+1/2$, aleshores $\varphi(z_1)=\varphi(z_2)=\varphi(z_1+1/2)$, però $\varphi(z_1+1/2)=(\theta_1(2z_1+1):\theta_2(2z_1+1):\theta_3(2z_1+1):\theta_4(2z_1+1))=(-\theta_1(2z_1):-\theta_2(2z_1):\theta_3(2z_1):\theta_4(2z_1))\neq\varphi(z_1)$.

Considerem ara $y\notin\{z_1,z_2,x_1,x_2\}$ a $\mathbb{C}/\Lambda$. Podem considerar una funció $f=c_1\theta_1+c_2\theta_2+c_3\theta_3+c_4\theta_4\neq 0$ a $\mathbf{V}_2(\tau)$ ($c_i\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$) que té com a zeros $2z_1, 2x_1$ i $2y$. (Això és possible perquè tenim 3 equacions lineals amb 4

incògnites c_i). Observem que $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ formen una base de $\mathbf{V}_2(\tau)$ com hem vist al capítol anterior.
A més, com $\varphi(z_1) = \varphi(z_2) \Rightarrow \theta_i(2z_1) = \lambda\theta_i(2z_2) \Rightarrow f(2z_2) = 0$ i, anàlogament $f(2x_2) = f(2x_1)$. En el cas que $d\varphi(z_1) = 0$, el que obtenim és que f té un zero doble a z_1 i també un zero doble a x_1.
Per tant, f té almenys 5 zeros: $2z_1, 2z_2, 2x_1, 2x_2, 2y$ en 2Λ, la qual cosa és una contradicció perquè, tal com hem vist al primer capítol, el nombre de zeros de qualsevol funció de $\mathbf{V}_2(\tau)$ a 2Λ és 4.
Per tant, no podem tenir dos valors $z_1 \neq z_2$ tal que $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$.

Per a $N > 2$, raonant de manera anàloga i comptant el nombre de zeros de qualsevol funció de $\mathbf{V}_N(\tau)$ en $N\Lambda$, obtenim que φ_N és una immersió.

Per tant, $\varphi(\mathbb{C}/\Lambda) = \mathrm{Im}(\varphi)$ és una subvarietat analítica complexa de $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ isomorfa a $\mathbb{C}/\Lambda$. (Per a $N > 2$, $\varphi_N(\mathbb{C}/\Lambda) = \mathrm{Im}(\varphi_N)$ és una subvarietat analítica complexa de $\mathbb{P}^{N^2-1}(\mathbb{C})$ isomorfa a $\mathbb{C}/\Lambda$).
De fet (Teorema de Chow) podem assegurar que $\mathrm{Im}(\varphi)$ és fins i tot una subvarietat algebraica de $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ (de $\mathbb{P}^{N^2-1}(\mathbb{C})$) i, per tant, $\varphi(\mathbb{C}/\Lambda)$ està definida mitjançant polinomis homogenis.

3. Determinació de $\mathrm{Im}(\varphi)$:
En el cas $N = 2$, $\varphi(\mathbb{C}/\Lambda)$ és la subvarietat de $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ definida com la intersecció de dues quàdriques $C = Q_1 \cap Q_2$. Siguin

$$Q_1 : \theta_3^2(0)\, x_2^2 \;=\; \theta_2^2(0)\, x_1^2 \;+\; \theta_4^2(0)\, x_3^2,$$

$$Q_2 : \theta_3^2(0)\, x_0^2 \;=\; \theta_2^2(0)\, x_3^2 \;-\; \theta_4^2(0)\, x_1^2.$$

Anem a provar que $\mathrm{Im}(\varphi) = C$:
- $\mathrm{Im}(\varphi) \subset C$ perquè tenim les relacions:

$$\theta_3^2(x)\theta_3^2(0) = \theta_4^2(x)\theta_4^2(0) + \theta_2^2(x)\theta_2^2(0),$$

$$\theta_1^2(x)\theta_3^2(0) = \theta_4^2(x)\theta_2^2(0) - \theta_2^2(x)\theta_4^2(0).$$

- $\mathrm{Im}(\varphi) = C$:
Considerem un pla general $H : a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$. Pel Teorema de Bézout, un pla talla la intersecció de dues quàdriques a $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ com a molt en quatre punts, per tant, $\sharp H \cap C \leq 4$. A més, $\sharp H \cap \varphi(\mathbb{C}/\Lambda) = 4$ a $\mathbb{C}/\Lambda$ perquè són els punts z tals que $a_0\theta_1(2z)+a_1\theta_1(2z)+a_2\theta_1(2z)+a_3\theta_1(2z) = 0$, i aquesta funció, com que és de $\mathbf{V}_2(\tau)$, té 4 zeros.

Així, obtenim la igualtat $\varphi(\mathbb{C}/\Lambda) = C$. $\square$

2.2.2 Punts de 2-torsió

Pel teorema que acabem de provar, tenim $\varphi(\mathbb{C}/\Lambda) = C = Q_1 \bigcap Q_2$. A C, podem definir una "suma" traslladant la suma que tenim a la xarxa $\mathbb{C}/\Lambda$.

Els punts de dos torsió a $\mathbb{C}/\Lambda$ són: $0, \frac{1}{2}, \frac{\tau}{2}$ i $\frac{1+\tau}{2}$. Fent la imatge d'aquests punts obtenim:

$$\begin{aligned}
\varphi(0) = &\quad (\theta_1(0) : \theta_2(0) : \theta_3(0) : \theta_4(0)),\\
\varphi(\tfrac{1}{2}) = &\quad (\theta_1(1) : \theta_2(1) : \theta_3(1) : \theta_4(1)) =\\
&\quad (-\theta_1(0) : -\theta_2(0) : \theta_3(0) : \theta_4(0)),\\
\varphi(\tfrac{\tau}{2}) = &\quad (\theta_1(\tau) : \theta_2(\tau) : \theta_3(\tau) : \theta_4(\tau)) =\\
&\quad e^{-\pi i\tau}(-\theta_1(0) : \theta_2(0) : \theta_3(0) : -\theta_4(0)),\\
\varphi(\tfrac{\tau+1}{2}) = &\quad (-\theta_1(\tau) : -\theta_2(\tau) : \theta_3(\tau) : \theta_4(\tau)) =\\
&\quad e^{-\pi i\tau}(\theta_1(0) : -\theta_2(0) : \theta_3(0) : -\theta_4(0)).
\end{aligned}$$

2.3 Comportament de les funcions theta al variar τ

2.3.1 Comportament de les funcions theta de Jacobi respecte de SL(2,$\mathbb{Z}$)

Fins ara, a l'estudiar el comportament i les propietats de les funcions θ, hem mantingut fix el valor de τ i hem estudiat el comportament respecte z. En aquesta secció estudiarem el comportament respecte de τ, en particular el valor de $\theta_i(z, \gamma(\tau))$ on γ és un element del grup especial lineal. [La 98, sec. 1.7 i 1.8] i [Mu 83, sec. I.9] són la bibliografia bàsica d'aquesta secció.

Sigui SL(2,$\mathbb{Z}$)=$\langle\alpha, \beta\rangle$, on $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, el grup especial lineal. Comencem estudiant el comportament de les θ_i al variar τ pels generadors:

1. Considerem $\tau' = \alpha(\tau) = 1 + \tau$. En aquest cas, el nome $q' = e^{\pi i\tau'} = e^{\pi i(\tau+1)} = -e^{\pi i\tau} = -q$. Així:

$$\theta_3(z, \tau') = \sum_{n\in\mathbb{Z}} p^{2n}(q')^{n^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n p^{2n} q^{n^2} = \theta_4(z, \tau).$$

Per la relació d'aquesta amb la resta de les θ_i, tenim:

$$\begin{aligned}\theta_1(z,\tau+1) = \; & e^{\frac{\pi i(\tau+1)}{4}+\pi i(z+1/2)}\theta_3(z+\tfrac{\tau'+1}{2},\tau') = \\ & e^{\pi i/4}e^{\frac{\pi i\tau}{4}+\pi i(z+1/2)}\theta_3(z+1+\tfrac{\tau}{2},\tau') = \\ & e^{\pi i/4}e^{\frac{\pi i\tau}{4}+\pi i(z+1/2)}\theta_3(z+\tfrac{\tau}{2},\tau) = \\ & e^{\pi i/4}e^{\frac{\pi i\tau}{4}+\pi i(z+1/2)}\theta_4(z+\tfrac{\tau}{2},\tau) = e^{\frac{\pi i}{4}}\theta_1(z,\tau),\end{aligned}$$

i, de manera anàloga,

$$\theta_2(z,\tau+1) = \; e^{\frac{\pi i}{4}}\theta_2(z,\tau),$$

$$\theta_3(z,\tau+1) = \; \theta_4(z,\tau).$$

2. Considerem ara $\tau' = \beta(\tau) = \frac{-1}{\tau}$ que es coneix amb el nom de transformació de Jacobi.
La idea és comparar $\theta_i(z,\tau')$ amb $\theta_i(z,\tau)$ mitjançant la fórmula de sumació de Poisson:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n),$$

on $\widehat{f}(n) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi inx}f(x)dx$ és el n-èsim coeficient de Fourier.

Ara ho farem servir per trobar la relació entre els Thetanullwerte $\theta_i(0,\tau')$ i $\theta_i(0,\tau)$. La demostració per a qualsevol valor de z es farà en dimensió superior.

Aplicant la fórmula de sumació de Poisson a $f(x) = e^{\pi i\tau x^2}$ que té com a n-èsim coeficient de Fourier $\widehat{f}(x) = (-i\tau)^{-1/2}e^{-\pi ix^2/\tau}$, tenim:

$$\theta_3(0,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i\tau n^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i\tau)^{-1/2}e^{-\pi in^2/\tau} \Rightarrow$$

$$\theta_3(0,\tfrac{-1}{\tau}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i/\tau)^{-1/2}e^{-\pi in^2\tau} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tau^{1/2}e^{-\pi i/4}\theta_3(0,\tau).$$

Per a un valor qualsevol de z, es té:

$$\theta_3(\frac{z}{\tau},\frac{-1}{\tau}) = (i\tau)^{1/2}e^{\pi ix^2/\tau}\theta_3(z,\tau).$$

Així, tenim la taula de transformacions següent:

$\theta_1(z,\tau+1) = e^{\frac{\pi i}{4}}\,\theta_1(z,\tau)$	$\theta_1(\frac{z}{\tau},\frac{-1}{\tau}) = -(i\tau)^{\frac{1}{2}}\,e^{\frac{\pi i z^2}{\tau}}\;\theta_1(z,\tau)$
$\theta_2(z,\tau+1) = e^{\frac{\pi i}{4}}\,\theta_2(z,\tau)$	$\theta_2(\frac{z}{\tau},\frac{-1}{\tau}) = (i\tau)^{\frac{1}{2}}\,e^{\frac{\pi i z^2}{\tau}}\;\theta_4(z,\tau)$
$\theta_3(z,\tau+1) = \theta_4(z,\tau)$	$\theta_3(\frac{z}{\tau},\frac{-1}{\tau}) = (i\tau)^{\frac{1}{2}}\,e^{\frac{\pi i z^2}{\tau}}\;\theta_3(z,\tau)$
$\theta_4(z,\tau+1) = \theta_3(z,\tau)$	$\theta_4(\frac{z}{\tau},\frac{-1}{\tau}) = (i\tau)^{\frac{1}{2}}\,e^{\frac{\pi i z^2}{\tau}}\;\theta_2(z,\tau)$

I en el cas dels Thetanullwerte no nuls, tenim:

$\theta_2(0,\tau+1) = e^{\frac{\pi i}{4}}\,\theta_2(0,\tau)$	$\theta_2(0,\frac{-1}{\tau}) = (i\tau)^{\frac{1}{2}}\;\theta_4(0,\tau)$
$\theta_3(0,\tau+1) = \theta_4(0,\tau)$	$\theta_3(0,\frac{-1}{\tau}) = (i\tau)^{\frac{1}{2}}\;\theta_3(0,\tau)$
$\theta_4(0,\tau+1) = \theta_3(0,\tau)$	$\theta_4(0,\frac{-1}{\tau}) = (i\tau)^{\frac{1}{2}}\;\theta_2(0,\tau)$

Hem obtingut aquestes relacions per als generadors del grup modular. Per a una transformació qualsevol del grup tenim el següent resultat que serà demostrat en dimensió superior al capítol següent:

2.3.1 Teorema. *Donats* $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$, $\quad ad-bc=1$, $\quad ab, cd$ *parells, tenim que:*

$$\theta_3\left(\frac{z}{c\tau+d},\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \zeta(c\tau+d)^{\frac{1}{2}}\;e^{\frac{\pi i c z^2}{c\tau+d}}\;\theta_3(z,\tau)\quad \textit{on } \zeta^8=1.$$

Per fixar ζ*, suposem que* $c>0$ *o* $c=0$ *i* $d>0$ *(si cal, multipliquem la matriu* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ *per -1). Aleshores,* $\mathrm{Im}(c\tau+d)\geq 0$ *i triant* $\mathrm{Re}(c\tau+d)\geq 0$*:*

1) Si c *parell,* d *senar* $\Longrightarrow \zeta = i^{1/2(d-1)}\;\left(\frac{c}{|d|}\right)$.

2) Si c *senar,* d *parell* $\Longrightarrow \zeta = e^{\frac{-\pi i c}{4}}\;\left(\frac{d}{c}\right)$.

En particular:

$$\theta_3(0, \frac{a\tau + b}{c\tau + d}) = \zeta(c\tau + d)^{\frac{1}{2}}\ \theta_3(0, \tau).$$

2.3.2 Transformació de Landen

La transformació de Landen és la que relaciona θ_i amb paràmetre 2τ (nome q^2) amb θ_i amb paràmetre τ (nome q).

2.3.2 Teorema. (Les transformacions de Landen)

$$\theta_1(2x, 2\tau) = \frac{\theta_1(x,\tau)\theta_2(x,\tau)}{\sqrt{\theta_3(0,\tau)\theta_4(0,\tau)}},$$

$$\theta_2(2x, 2\tau) = \frac{\theta_3^2(x,\tau) - \theta_4^2(x,\tau)}{\sqrt{2[\theta_3^2(0,\tau) - \theta_4^2(0,\tau)]}},$$

$$\theta_3(2x, 2\tau) = \frac{\theta_3^2(x,\tau) + \theta_4^2(x,\tau)}{\sqrt{2[\theta_3^2(0,\tau) + \theta_4^2(0,\tau)]}},$$

$$\theta_4(2x, 2\tau) = \frac{\theta_3(x,\tau)\theta_4(x,\tau)}{\sqrt{\theta_3(0,\tau)\theta_4(0,\tau)}}.$$

La transformació de Landen (1775) es va escriure originàriament en funció de les $K(\tau)$: Posem $k_1 = \frac{1-k'}{1+k'}$. Així:

$$k(2\tau) = \frac{\theta_2^2(0,2\tau)}{\theta_3^2(0,2\tau)} = \frac{\theta_3^2(0,\tau) - \theta_4^2(0,\tau)}{\theta_3^2(0,\tau) + \theta_4^2(0,\tau)} = \frac{1 - \frac{\theta_4^2(0,\tau)}{\theta_3^2(0,\tau)}}{1 + \frac{\theta_4^2(0,\tau)}{\theta_3^2(0,\tau)}} = \frac{1 - k'(\tau)}{1 + k'(\tau)} = k_1(\tau)$$

i, a partir d'aquí, es prova

$$K(k(\tau)) = (1 + k_1(\tau))K(k_1(\tau))$$

o, equivalentment (canviant k per a k_1),

$$K(k(\tau)) = \frac{1}{(1 + k(\tau))} K\left(\frac{2\sqrt{k(\tau)}}{1 + k(\tau)}\right),$$

que és la transformació de Landen original.

Algebraicament, podem veure la transformació de Landen com la descripció de la multiplicació per 2:

$$\begin{array}{llll} \mathbb{C}/\langle 1,\tau\rangle \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{C}/\langle 1,2\tau\rangle & \rightsquigarrow & C(\tau) & \to C(2\tau) \\ & & (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) & \mapsto \left(\frac{x_0x_1}{a_1} : \frac{x_2^2-x_3^2}{a_2} : \frac{x_2^2+x_3^2}{a_3} : \frac{x_2x_3}{a_1}\right) \end{array}$$

on

$$a_1 = \sqrt{\theta_3(0,\tau)\theta_4(0,\tau)},\ a_2 = \sqrt{2[\theta_3^2(0,\tau) - \theta_4^2(0,\tau)]},$$

$$a_3 = \sqrt{2[\theta_3^2(0,\tau) + \theta_4^2(0,\tau)]}.$$

Demostració de 2.3.2: Havíem provat les relacions següents de les funcions theta:

$$\theta_1(x,\tau)\theta_2(y,\tau) = \theta_1(x+y,2\tau)\theta_4(x-y,2\tau) + \theta_4(x+y,2\tau)\theta_1(x-y,2\tau),$$

$$\theta_3(x,\tau)\theta_3(y,\tau) = \theta_3(x+y,2\tau)\theta_3(x-y,2\tau) + \theta_2(x+y,2\tau)\theta_2(x-y,2\tau),$$

$$\theta_3(x,\tau)\theta_4(y,\tau) = \theta_4(x+y,2\tau)\theta_4(x-y,2\tau) - \theta_1(x+y,2\tau)\theta_1(x-y,2\tau),$$

$$\theta_4(x,\tau)\theta_4(y,\tau) = \theta_3(x+y,2\tau)\theta_3(x-y,2\tau) - \theta_2(x+y,2\tau)\theta_2(x-y,2\tau).$$

Fent $x = y$ a aquestes relacions tenim:

$$\theta_1(x,\tau)\theta_2(x,\tau) = \theta_1(2x,2\tau)\theta_4(0,2\tau),$$

$$\theta_3^2(x,\tau) = \theta_3(2x,\tau)\theta_3(0,2\tau) + \theta_2(2x,2\tau)\theta_2(0,2\tau),$$

$$\theta_3(x,\tau)\theta_4(x,\tau) = \theta_4(2x,2\tau)\theta_4(0,2\tau),$$

$$\theta_4^2(x,\tau) = \theta_3(2x,\tau)\theta_3(0,2\tau) - \theta_2(2x,2\tau)\theta_2(0,2\tau).$$

Substituint x per 0 en les tres últimes identitats ens queda:

$$\theta_3^2(0,\tau) = \theta_3(0,\tau)\theta_3(0,2\tau) + \theta_2^2(0,2\tau),$$

$$\theta_3(0,\tau)\theta_4(0,\tau) = \theta_4^2(0,2\tau),$$

$$\theta_4^2(0,\tau) = \theta_3(0,\tau)\theta_3(0,2\tau) - \theta_2^2(0,2\tau).$$

I resolent, obtenim els valors dels Thetanullwerte de 2τ:

$$\theta_2^2(0,2\tau) = \tfrac{1}{2}\left[\theta_3^2(0,\tau) - \theta_4^2(0,\tau)\right],$$

$$\theta_3^2(0,2\tau) = \tfrac{1}{2}\left[\theta_3^2(0,\tau) + \theta_4^2(0,\tau)\right],$$

$$\theta_4^2(0,2\tau) = \theta_3(0,\tau)\theta_4(0,\tau).$$

Substituint el valor d'aquests Thetanullwerte en les fórmules, obtenim les transformacions de Landen:

$$\theta_1(2x,2\tau) = \frac{\theta_1(x,\tau)\theta_2(x,\tau)}{\sqrt{\theta_3(0,\tau)\theta_4(0,\tau)}}, \qquad \theta_2(2x,2\tau) = \frac{\theta_3^2(x,\tau) - \theta_4^2(x,\tau)}{\sqrt{2[\theta_3^2(0,\tau) - \theta_4^2(0,\tau)]}}$$

$$\theta_3(2x,2\tau) = \frac{\theta_3^2(x,\tau) + \theta_4^2(x,\tau)}{\sqrt{2[\theta_3^2(0,\tau) + \theta_4^2(0,\tau)]}}, \quad \theta_4(2x,2\tau) = \frac{\theta_3(x,\tau)\theta_4(x,\tau)}{\sqrt{\theta_3(0,\tau)\theta_4(0,\tau)}}.\square$$

2.3.3 La funció η de Dedekind i els Thetanullwerte

Anem a expressar la funció η de Dedekind en funció dels Thetanullwerte. Recordem que la funció η de Dedekind és

$$\eta(\tau) := q^{\frac{1}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}), \quad \eta \in \mathbb{H}.$$

En particular tenim la relació $\Delta(\tau) = (2\pi)^{12}\ \eta(\tau)^{24}$.

Aquesta funció satisfà les relacions:

$$\eta(\tau+1) = e^{\frac{\pi i}{12}}\,\eta(\tau) \quad \text{i} \quad \eta(\frac{-1}{\tau}) = (-i\tau)^1/2\,\eta(\tau).$$

Es pot escriure en funció dels Thetanullwerte a partir de l'expressió del discriminant $\Delta(\tau)$:

$$16\pi^{12}[\frac{1}{\pi^8}\theta_1'(0,\tau)]^8 = (2\pi)^{12}\ \eta(\tau)^{24} \Rightarrow \eta(\tau)^3 = \zeta_8 \frac{1}{2\pi}\theta_1'(0,\tau).$$

També es pot calcular

$$\theta_{\frac{1}{6},\frac{1}{2}}(0,3\tau) = e^{\pi i/6}\eta(\tau)$$

i, per una altra banda,

$$[\theta_{\frac{1}{6},\frac{1}{2}}(0,3\tau)]^3 = \frac{1}{2\pi i}\theta_1'(0,\tau).$$

Per tant,

2.3.3 Proposició. *Se satisfà que*

$$\eta(\tau)^3 = -\frac{1}{2\pi}\theta_1'(0,\tau).$$

2.4 Algunes aplicacions

2.4.1 Sumes de quadrats i Thetanullwerte

Sigui

$$r_k(m) = \sharp\{\text{representacions de } m = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + ... + a_k^2\},$$

és a dir, la funció que compta el nombre de representacions de l'enter m com a suma de k quadrats.
Fent servir el valor dels Thetanullwerte, trobarem expressions per a $r_2(m)$ i $r_4(m)$, és a dir, pel nombre de representacions d'un enter com a suma de dos ó quatre quadrats. A partir de les expressions de $\theta_3^2(0)$ i $\theta_3^4(0)$:

$$\theta_3^2(0) = \left[\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2}\right]^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}^2} q^{n_1^2+n_2^2} = \sum_{m=0}^{\infty} r_2(m)q^m,$$

$$\theta_3^4(0) = \left[\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2}\right]^4 = \sum_{n\in\mathbb{Z}^4} q^{n_1^2+n_2^2+n_3^2+n_4^2} = \sum_{m=0}^{\infty} r_4(m)q^m,$$

trobarem el valor de $r_2(m)$ i $r_4(m)$ calculant el coeficient de q^m en les expressions de $\theta_3^2(0)$ i de $\theta_3^4(0)$ respectivament.

2.4.1 Teorema.

$$r_2(m) = 4(d_1(m) - d_3(m)),$$

on $d_k(n)$ denota el nombre de divisors de n congruents a k mòdul 4.

Demostració: A [Gr 85, Secció 9.4, Fórmula 9.10] es dóna una expressió de les potències de $\theta_3(0)$. En particular,

$$\theta_3^2(0) = 1 + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}}.$$

A partir d'aquí,

$$\begin{aligned}
\theta_3^2(0) &= 1+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}} = 1+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{\infty}q^{k(2n-1)} \\
&= 1+4\sum_{n=1}^{\infty}q^m\sum_{2n-1|m}(-1)^{n-1} = 1+4\sum_{n=1}^{\infty}q^m\left(\sum_{4n+1|m}1-\sum_{4n+3|m}1\right) \\
&= 1+4\sum_{m=1}^{\infty}q^m(d_1(m)-d_3(m)).
\end{aligned}$$

Així

$$\sum_{m=0}^{\infty}r_2(m)q^m = \theta_3^2(0) = 1+4\sum_{m=1}^{\infty}q^m(d_1(m)-d_3(m))$$

i comparant les dues expressions

$$r_2(m) = 4(d_1(m)-d_3(m)).\square$$

Anàlogament:

2.4.2 Teorema.

$$r_4(m) = 8\sigma'(m),$$

on $\sigma'(m)$ denota la suma dels divisors de m que no són múltiples de 4.

Demostració: En la mateixa referència que abans podem trobar l'expressió

$$\theta_3^4(0) = 1+8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^n}{1-q^{2n}} - 8\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}}.$$

Desenvolupant-la

$$\begin{aligned}
\theta_3^4(0) &= \textstyle\sum_{r=0}^{\infty} r_4(r)q^r = \\
& 1+8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^n}{1-q^{2n}} - 8\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}} = ... \\
& 1+8\sum_{n=1}^{\infty}n\sum_{j\geq 0}q^{(2j+1)n} - 8\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2mq^{4m}}{1-q^{4m}} + 8\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2m+1)q^{2(2m+1)}}{1-q^{2(2m+1)}} = \\
& 1+8\sum_{n=1}^{\infty}n\sum_{j\geq 0}q^{(2j+1)n} - 8\sum_{m=1}^{\infty}2m\sum_{j\geq 1}q^{4mj} + 8\sum_{m=1}^{\infty}(2m+1)\sum_{j\geq 1}q^{2j(2m+1)}.
\end{aligned}$$

Per calcular el coeficient de q^r de l'última expressió distingim casos:

$-$ Si r és senar, només apareixen sumands de q^r en el primer sumatori i els coeficients són els divisors de r, que són senars.

$-$ Si $r \equiv 2(4)$, només tenim aportació del primer sumatori (que són els divisors parells de r) i del tercer sumatori (divisors senars de r). És a dir, obtenim tots els divisors de r.

$-$ Si $r \equiv 0(4)$ posem $r = 2^e t$ amb $2 \nmid t$. Tenim aportacions de tots tres sumatoris. En el tercer, apareixen els divisors senars de r. Els coeficients que surten en el primer són $\sum_{d|t} 2^e d$. Els que apareixen en el segon sumatori són $\sum_{d|2^{e-2}t} 2d$. Tenim

$$\sum_{d|t} 2^e d - \sum_{d|2^{e-2}t} 2d =$$

$$= 2^e \sum_{d|t} d - 2\sum_{d|t} d(1 + 2 + \cdots + 2^{e-2}) = 2^e \sum_{d|t} d - 2(2^{e-1} - 1)\sum_{d|t} d = \sum_{d|t} 2d.$$

És a dir, obtenim tots els divisors de r llevat dels que són múltiples de 4. Així

$$r_4(m) = 8\sigma'(m).\square$$

2.4.2 El teorema d'Euler sobre els nombres pentagonals

Recordem que un enter $m \in \mathbb{Z}$ és pentagonal si $m = \frac{1}{2}n(3n \pm 1)$. Aquests nombres reben el nom de pentagonals perquè compten el nombre de punts de tots els costats dels pentàgons regulars de costat n.

Denotem per $p_e(m)$ (respectivament $p_o(m)$) el nombre de particions de l'enter m com a suma d'un nombre parell (respectivament senar) $n \geq 1$ d'enters diferents. Fent servir les expressions de les funcions theta, podem provar el conegut resultat d'Euler:

2.4.3 Teorema. (Euler) ([M-M 99, sec. 3.8])

$$p_e(m) - p_o(m) = \begin{cases} (-1)^m & \textit{si } m = \frac{1}{2}n(3n \pm 1), \text{ i.e. si és pentagonal} \\ 0 & \textit{si } m \neq \frac{1}{2}n(3n \pm 1). \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓ: La demostració es basa en avaluar la funció θ_3 en $z = \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}$, és a dir, $p \mapsto iq^{1/4}$, $q \mapsto q^{3/2}$ i comparar les dues expressions d'aquesta funció com a suma i com a producte infinit.

Com $\theta_3(z,\tau) = \theta_3(p,q) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} p^{2n} q^{n^2}$, obtenim

$$\theta_3(\frac{1+\tau}{2}, \tau) = \theta_3(iq^{1/4}, q^{3/2}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n \, q^{\frac{n(3n+1)}{2}}.$$

Per altra banda, a partir de l'expressió de $\theta_3(z,\tau) = \theta_3(p,q)$ com a producte infinit

$$\theta_3(z,\tau) = \theta_3(p,q) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 + q^{2n-1}p^2)(1 + q^{2n-1}p^{-2})$$

obtenim

$$\theta_3(iq^{1/4}, q^{3/2}) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{3n})(1 - q^{3n-1})(1 - q^{3n-2}) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n).$$

Per tant,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n \, q^{\frac{n(3n+1)}{2}} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n).$$

Desenvolupant el producte infinit en potències de q,

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n \, q^{\frac{n(3n+1)}{2}} &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) \\
&= \sum_{d=0}^{\infty} (-1)^d \sum_{n_1,\ldots,n_d \geq 1} q^{n_1+\ldots+n_d} \\
&= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} q^m \sum_{n_1+\cdots+n_d=m} (-1)^d \\
&= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} q^m [p_e(m) - p_o(m)]
\end{aligned}$$

i igualant, obtenim el resultat. □

A [M-M 99, sec. 3.8] podem trobar d'altres relacions entre sumes i productes i que es relacionen amb particions que s'obtenen de manera anàloga a l'anterior. A tall d'exemple tenim:

1. $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{-1} = 1+\sum_{d=1}^{\infty}\sum_{n_1,\cdots,n_d\geq 1} q^{n_1+\cdots n_d} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}p(n)q^n,$
   on $p(n)$ denota el nombre de particions de l'enter $n \geq 1$ en nombre positius (sense comptar l'ordre),

2. $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1}) = 1+\sum_{n=1}^{\infty}q^{n^2}\,[(1-q^2)(1-q^4)(1-q^{2n})]^{-1},$

3. $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n}) = 1+\sum_{n=1}^{\infty}q^{n(n+1)}\,[(1-q^2)(1-q^4)(1-q^{2n})]^{-1},$

4. $\displaystyle\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{5n+1})(1-q^{5n+4})(1-q^{5n+5}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{(5n+3)n}{2}},$

5. $\displaystyle\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{5n+2})(1-q^{5n+3})(1-q^{5n+5}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{(5n+1)n}{2}},$

6. $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)(1-q^n p)(1-q^{n-1}p^{-1})(1-q^{2n-1}p^2)(1-q^{2n-1}p^{-2})$
   $\displaystyle= \sum_{n\in\mathbb{Z}}(p^{3n}-p^{-3n-1})q^{\frac{n(3n+2)}{2}}.$

2.4.3 Aplicació dels Thetanullwerte a la resolució de la quíntica

En aquesta darrera secció donem les idees de com podem aplicar el que hem estudiat sobre els Thetanullwerte a la resolució de l'equació de grau 5. Els detalls de tot aquest estudi es pot trobar a [M-M 99, sec. 5.5-5.6].

Considerem l'equació general de grau 5

$$P_5(X) = X^5 - C_1X^4 + C_2X^3 - C_3X^2 + C_4X - C_5 = 0.$$

Jenard, en 1834, va provar que $P_5(X)$ pot reduir-se a la forma:

$$Q_5(X) = X^5 - X + C = 0$$

adjuntant radicals al cos base $K_0 = \mathbb{Q}(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5)$. Observem que el grup de Galois de $Q_5(X)$ sobre $\mathbb{Q}(C)$ és A_5. Si $C = C(\tau)$, les solucions d'aquesta equació són valors de funcions modulars.

Siguin $x(\tau) := -\sqrt[4]{k(5\tau)}$, $y(\tau) := \sqrt[4]{k(\tau)}$. Aquestes funcions satisfan l'equació

$$F_5(X,Y) = X^6 - Y^6 + 5X^2Y^2(X^2-Y^2) - 4XY(X^4Y^4-1) = 0.$$

El grup de Galois de $F_5(X,Y)$ sobre $\mathbb{Q}(Y)$ és A_5.

Si fixem $y(\tau)$, les sis arrels de $F_5(X,y(\tau))$ són

$$x_\infty(\tau) = -\sqrt[4]{k(5\tau)}, \quad x_n(\tau) = \sqrt[4]{k\left(\frac{\tau+16n}{5}\right)}, \quad 0 \le n < 4.$$

A partir d'aquestes definim

$$\begin{aligned}
\chi_0(\tau) &:= (x_\infty(\tau)-x_0(\tau))(x_1(\tau)-x_4(\tau))(x_2(\tau)-x_3(\tau))y(\tau),\\
\chi_1(\tau) &:= (x_\infty(\tau)-x_1(\tau))(x_2(\tau)-x_0(\tau))(x_3(\tau)-x_4(\tau))y(\tau),\\
\chi_2(\tau) &:= (x_\infty(\tau)-x_2(\tau))(x_1(\tau)-x_3(\tau))(x_0(\tau)-x_4(\tau))y(\tau),\\
\chi_3(\tau) &:= (x_\infty(\tau)-x_3(\tau))(x_2(\tau)-x_4(\tau))(x_1(\tau)-x_0(\tau))y(\tau),\\
\chi_4(\tau) &:= (x_\infty(\tau)-x_4(\tau))(x_0(\tau)-x_3(\tau))(x_1(\tau)-x_2(\tau))y(\tau),
\end{aligned}$$

i el polinomi

$$F(X) := (X-\chi_0(\tau))(X-\chi_1(\tau))(X-\chi_2(\tau))(X-\chi_3(\tau))(X-\chi_4(\tau))$$

que pertany a $\mathbb{Q}[X,y(\tau)]$.

Hermite (1859) calcula aquest polinomi que no és res més que el polinomi mínim de $\chi_0(\tau)$ sobre $\mathbb{C}(k(\tau))$:

$$F(X) = X^5 - 2^4\,5^3\,k^2(1-k^2)^2X - 2^6\,5^{\frac{5}{2}}k^2(1-k^2)^2(1+k^2), \qquad k=k(\tau).$$

Així, considerant $G(X) = F\left(\frac{X}{5^{\frac{3}{4}}\sqrt{k(1-k^2)}}\right)$ obtenim:

$$G(X) = F\left(\frac{X}{5^{\frac{3}{4}}\sqrt{k(1-k^2)}}\right) = X^5 - X + \frac{2}{5^{\frac{5}{4}}}\frac{(1+k^2)}{\sqrt{k(1-k^2)}}$$

que és una equació del tipus $Q_5(X)$ de les quals volíem trobar les arrels. Per fer-ho:

Esquema d'Hermite (1859) per trobar les arrels α_i de

$$Q_5(X) = X^5 - X - C = 0:$$

1. Calculem k^2 com a arrel de $2^4(1+k^2)^4 = 5^5\,C^4\,k^2(1-k^2)^2$ (és una equació de grau 4, per la qual cosa k^2 s'obté per radicals).
2. Calculem $\tau = iK'(k)/K(k)$.
3. Una arrel de $Q_5(X)$ és $\alpha_1 = 2\cdot 5^{\frac{3}{4}}\sqrt{k(1-k^2)\chi_0(\tau)}$.
4. Les altres quatre arrels $\alpha_n = 2\cdot 5^{\frac{3}{4}}\sqrt{k(1-k^2)\chi_n(\tau)}$, $n=1,2,3,4$ es poden extreure per radicals sobre $\mathbb{Q}(C)[x_1]$.

Equacions de grau més gran o igual que 5:

Seguint aquesta idea de fer servir les funcions theta, d'altres autors han trobat les arrels d'equacions de grau superior. Els exemples més significatius són:

Umemura([Um 84]): Expressa les arrels del polinomi $f(X) \in \mathbb{C}[X]$ com a quocients de Thetanullwerte $\theta[\begin{smallmatrix} a_i \\ b_i \end{smallmatrix}](0, Z)$ on Z és la matriu de períodes de

$$C_F : Y^2 = F(X),$$

on

$$F(X) := \begin{cases} X(X-1)f(X) & \text{si } \deg(f) \text{ és senar,} \\ X(X-1)(X-2)f(X) & \text{if } \deg(f) \text{ és parell.} \end{cases}$$

Simplificant aquests resultats, Guàrdia [Gu 01] expressa les arrels de $f(X) \in \mathbb{C}[X]$ com a quocients de Thetanullwerte jacobians associats a la matriu de períodes de

$$Y^2 = f(X).$$

Bibliografia

[Gr 85] Grosswald, E.: *Representations of integers as sums of squares.* Springer V., 1985.

[Gu 01] Guàrdia, J.: Jacobian nullwerte and algebraic equations, *Journal of Algebra*, 253, pàgs. 112-132, (2002).

[Hu 87] Husemöller, D.: *Elliptic Curves*. GTM 111, Springer-Verlag 1987.

[La 98] Lawden, D. F.: *Elliptic Functions and Applications*. Colledge Press, 1998.

[M-M 99] McKean, H.; Moll, V.: *Elliptic Curves*. Cambridge University Press, 1999.

[Mu 83] Mumford, D.: *Tata Lectures on Theta I*. Birkhäuser, 1983.

[Mu 84] Mumford, D.: *Tata Lectures on Theta II.* Progress in Math. **43**. Birkhäuser, 1984.

[Um 84] Umemura, H.: Resolution of algebraic equations by theta constants. Apèndix a [Mu 84].

M. Vela

Dept. de Matemàtica Aplicada 2

Universitat Politècnica de Catalunya

Pau Gargallo, 5

E-08028, Barcelona

Montse.Vela@upc.es

Capítol 3

Funcions theta clàssiques (I)

J. Guàrdia

En aquest capítol introduirem la funció theta en dimensió superior, i provarem les relacions bàsiques que satisfà. En la primera secció del capítol ens centrarem en la definició, la caracterització i la convergència de la funció theta. En les seccions posteriors ens ocuparem de les nombroses fórmules de transformació de la funció theta, que caracteritzen tant el seu comportament per isogènia (seccions 3 i 4) com el seu comportament modular (seccions 5, 6 i 7).

Els resultats d'aquest capítol són tots ben coneguts, i la majoria de les demostracions són *elementals.* Sovint els textos actuals es centren en aspectes més teòrics de les funcions theta, passant molt de pressa per aquests resultats bàsics, de manera que les demostracions s'han de perseguir en els clàssics. Aquestes notes semblen una bona ocasió per tractar amb un cert detall el que podríem anomenar *beceroles* de la funció theta. Essencialment, la primera part del capítol és una versió actualitzada dels primers capítols del llibre de Krazer [Kr03]. Per a l'estudi del comportament modular de la funció theta, però, hem seguit el llibre d'Igusa [Ig72]. El lector avesat es complaurà en la lectura d'ambdues referències.

Amb finançament parcial de MCYT BFM2000-0627, BFM2003-06768-C02-02.

3.1 Definicions

3.1.1 Sèries theta

Una sèrie theta en dimensió g és una expressió del tipus

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^g} F(m) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^g} \exp(\pi i\, {}^t m Z m + 2\pi i\, {}^t m b + c)$$

on $b, c \in \mathbb{C}^g$ i $Z = {}^t Z \in M_g(\mathbb{C})$ és una matriu simètrica.

3.1.1 Teorema. *La sèrie anterior convergeix si i només si la matriu* $Y :=$ $\operatorname{Im} Z = (r_{jk})_{jk}$ *és definida positiva.*

Demostració: Si la sèrie anterior convergeix, el seu terme general tendeix a zero:

$$\begin{array}{c}\lim_{m_k\to\pm\infty} F(m) = 0 \\ \Downarrow \\ \lim_{m_k\to\pm\infty} |F(m)F(-m)| = \lim_{m_k\to\pm\infty} e^{-2\,{}^t mYm} = 0 \\ \Downarrow \\ \lim_{m_k\to\pm\infty} {}^t mYm = +\infty. \qquad (*)\end{array}$$

Denotem per $r_{jk}^{(i)}$ el determinant del menor de la matriu Y format per les files $1, 2, \ldots, i-1, j$ i les columnes $1, 2, \ldots, i-1, k$. Aquests nombres satisfan:

a) $r_{jk}^{(1)} = r_{jk}$ (=element j, k de la matriu Y).

b) $r_{jk}^{(i)} = r_{kj}^{(i)}$.

c) $r_{jk}^{(i+1)} r_{i-1,i-1}^{(i-1)} = r_{ii}^{(i)} r_{jk}^{(i)} - r_{ik}^{(i)} r_{ij}^{(i)}$.

Tenim que

$$\begin{aligned}{}^t mYm = r_{11}^{(1)} \left(m_1 + \frac{r_{12}^{(1)}}{r_{11}^{(1)}} m_2 + \cdots + \frac{r_{1g}^{(1)}}{r_{11}^{(1)}} m_g \right)^2 + \\ + \frac{r_{22}^{(2)}}{r_{11}^{(1)}} \left(m_2 + \cdots + \frac{r_{2g}^{(2)}}{r_{22}^{(2)}} m_g \right)^2 + \ldots \frac{r_{gg}^{(g)}}{r_{g-1,g-1}^{(g-1)}} m_g^2.\end{aligned}$$

i per tant la condició $(*)$ implica

$$r_{11}^{(1)} > 0, r_{22}^{(2)} > 0, \ldots, r_{gg}^{(g)} = \det Y > 0,$$

la qual cosa equival a què Y sigui definida positiva. Recíprocament, aquesta condició ens permet afirmar que

$$^{t}m.Y.m \geq \frac{r_{gg}^{g}}{r_{g-1,g-1}^{g-1}} m_g^2.$$

Atès que el paper dels m_k és simètric, de fet tenim que

$$^{t}m.Y.m \geq \frac{\det Y}{Y_{kk}} m_k^2,$$

on hem denotat per Y_{kk} l'adjunt de l'element r_{kk} de Y. D'aquí traiem que

$$^{t}m.Y.m \geq \sum_{k=1}^{g} \lambda_k m_k^2, \quad \text{amb } \lambda_k = \frac{1}{g}\frac{\det Y}{Y_{kk}} > 0.$$

Ara tenim que

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{m\in\mathbb{Z}^g} F(m) \right| &\leq \sum_{m\in\mathbb{Z}^g} |F(m)| = \sum_{m\in\mathbb{Z}^g} \exp\left(-\pi\, {}^{t}mYm + 2\pi\, {}^{t}m \operatorname{Re}(b) + \operatorname{Re}(c)\right) \\
&\leq e^{\operatorname{Re}(c)} \sum_{m\in\mathbb{Z}^g} \exp\left(-\pi \sum_{k=1}^{g} \lambda_k m_k^2 + 2m_k \operatorname{Re}(b_k)\right) \\
&\leq e^{\operatorname{Re}(c)} \prod_{k=1}^{g} \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp(-\pi\lambda_k m_k^2 + 2\pi m_k \operatorname{Re}(b_k)) \right)
\end{aligned}$$

i cadascun dels factors d'aquest producte és una sèrie theta en dimensió 1, la convergència de la qual és immediata pel criteri del quocient. □

La demostració anterior es deu a Krazer i Prym ([Kr-Pr1892]) que culminen els treballs de Weierstrass, Christoffel, Briot, Thomae i Rosenhain. Riemann ([Ri1876]) dóna una demostració diferent, basant-se en un criteri integral propi.

3.1.2 La funció theta

La funció θ de mòdul Z i argument u ve definida per la sèrie:

$$\theta(u, Z) := \sum_{m\in\mathbb{Z}^g} F(m, u, Z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^g} \exp(\pi i\, {}^{t}mZm + 2\pi i\, {}^{t}mu),$$

on $u \in \mathbb{C}^g$, i $Z = {}^tZ \in M_g(\mathbb{C}), \mathrm{Im}(Z) > 0$.

La funció theta en dimensió 1 apareix per primer cop el 1822, en el tractat de Fourier sobre la teoria de la calor ([Fo1822]). Jacobi n'inicia l'estudi sistemàtic en els *Fundamenta Nova* ([Ja1829]). Göpel ([Gö1847]) i Rosenhain ([Ro1851]) introdueixen la funció theta en dimensió 2, gairebé al mateix temps que Weierstrass ([We1849]) i Riemann ([Ri1857]) estudien ja la funció theta en dimensió qualsevol.

La convergència puntual de la funció queda garantida pel teorema 3.1.1, però en realitat tenim molt millors propietats de convergència:

3.1.2 Teorema. *La funció $\theta(u, Z)$ convergeix absolutament i uniformement en ambdues variables u, Z en conjunts*

$$\left\{(u, Z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{H}_g : |\,\mathrm{Im}\, u\,|_\infty < \frac{c_1}{2\pi}, \,\mathrm{Im}\, Z > c_2 Id\right\}$$

i per tant defineix una funció holomorfa $\mathbb{C}^g \times \mathbb{H}_g \longrightarrow \mathbb{C}$.

Demostració: Tenim que:

$$\begin{aligned} |\exp(\pi i\, {}^tmZm + 2\pi i\, {}^tmz)| \leq\ & \exp\left(-\pi c_2 \textstyle\sum_{k=1}^g m_k^2\right) \exp\left(\pi c_1 \textstyle\sum_{k=1}^g m_k\right) \\ & \qquad\qquad \shortparallel \\ & \prod_{k=1}^{g} \left(\sum_{m_k \geq 0} \exp\left(-\pi c_2 m_k^2 + \pi c_1 m_k\right) \right). \end{aligned}$$

Per tant, la sèrie que defineix la funció theta és dominada per la sèrie $\left(\sum_{m \geq 0} \exp\left(-\pi c_2 m^2 + \pi c_1 m\right) \right)^g$. Com que

$$\sum_{m_k \geq 0} \exp\left(-\pi c_2 m^2 + \pi c_1 m\right) = \text{constant} \times \sum_{m \geq 0} \left(-\pi c_2 \left(m - \frac{c_1}{2\pi c_2} \right)^2 \right)$$

la convergència d'aquesta sèrie és trivial. A més, el **criteri M de Weierstrass** ens garanteix ara la convergència uniforme, i per tant, l'holomorfia de la funció θ. $\square$

Les **propietats de quasi-periodicitat** de la funció θ són ben conegudes, i s'obtenen trivialment de les propietats de quasi-periodicitat del terme general que les defineix:

- $F(m, u+n, Z) = F(m, u, Z) \Rightarrow \theta(u+n, Z) = \theta(u, Z)$.
- $F(m, u+Zn, Z) = \frac{F(m,u,Z)}{F(n,u,Z)} \Rightarrow \theta(u+Zn, Z) = e^{-\pi i\, {}^t nZn - 2\pi i\, {}^t nu}\theta(u, Z)$.

La funció theta satisfà les equacions en derivades parcials:

$$\frac{\partial^2\theta(u,Z)}{\partial u_j \partial u_k} = 2^{1+\delta_{jk}} \frac{\partial\theta(u,Z)}{\partial Z_{jk}}, \qquad i, j = 1, \ldots, g,$$

conegudes genèricament com **equació de la calor**.

Aquestes propietats caracteritzen essencialment la funció θ llevat d'una constant de proporcionalitat:

3.1.3 Teorema. *Sigui $G : \mathbb{C}^g \longrightarrow \mathbb{C}$ una funció de tipus $\mathcal{C}^1$.*

a) Si G satisfà les propietats de quasi-periodicitat anteriors, ha de ser $G(u) = A(Z)\theta(u, Z)$ per a certa constant $A(Z) \in \mathbb{C}$.

b) Si a més $G(u)$ és solució de l'equació de la calor, llavors $A(Z)$ és una constant que no depèn de Z.

Demostració: La periodicitat de $G(u)$ respecte $\mathbb{Z}^g$ garanteix l'existència d'un desenvolupament en sèrie de Fourier:

$$G(u) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} c_m \exp\left(2\pi i\, {}^t mu\right).$$

(La convergència d'aquest desenvolupament a la funció queda garantida per la hipòtesi que la funció és de tipus $\mathcal{C}^1$.) La quasi-periodicitat de $G(u)$ respecte les columnes de la matriu $Z = (Z_1, \ldots, Z_g) = (Z_{rs})_{rs}$, combinada amb la unicitat dels coeficients de Fourier d'una funció periòdica, dóna la recurrència

$$c_{m+\epsilon_k} = c_m \times \exp\left(2\pi i\, {}^t mZ_k + \pi i Z_{kk}\right), \qquad \epsilon_k = (0, \ldots, \overset{\overset{k}{\downarrow}}{1} \ldots, 0)$$

Així doncs, la funció $G(u)$ queda determinada unívocament pel coeficient $A(Z) = c_{(0,\ldots,0)}$, i veiem a més que $G(u) = A(Z)\theta(u, Z)$. Si alhora $G(u)$ és solució de l'equació de la calor, llavors:

$$\begin{array}{ccc}
 & \dfrac{\partial^2 G(u)}{\partial u_j \partial u_k} & = & A(Z)\dfrac{\partial^2 \theta(u,Z)}{\partial u_j \partial u_k} \\
 & \shortparallel & & \shortparallel \\
 & 2^{1+\delta_{jk}}\dfrac{\partial G(u)}{\partial Z_{jk}} & = & 2^{1+\delta_{jk}} A(Z)\dfrac{\partial \theta(u,Z)}{\partial Z_{jk}} \\
 & \shortparallel & & \\
\theta(u,Z)\dfrac{\partial A(Z)}{\partial Z_{jk}} & + A(Z)\dfrac{\partial \theta(u,Z)}{\partial Z_{jk}} & &
\end{array}$$

i cal que $\frac{\partial A(Z)}{\partial Z_{jk}} = 0$. $\square$

La demostració dels teoremes 3.1.1 i 3.1.2 ha consistit essencialment en reduir una funció theta en dimensió g a un producte de g funcions theta unidimensionals. Aquesta tècnica s'empra amb molta freqüència. De fet, es pot fer amb una major generalitat, tenint en compte l'observació següent

$$\text{Si } Z = \begin{pmatrix} Z_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Z_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & Z_h \end{pmatrix} \in M_{gh}(\mathbb{C}),\ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_h \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{gh}, \text{ llavors}$$

$$\theta(u,Z) = \prod_{j=1}^{h} \theta(u_j, Z_j).$$

3.1.3 Funcions theta amb característiques

Per moltes raons que quedaran paleses en els capítols següents, és interessant considerar funcions obtingudes a partir $\theta(u,\mathbb{Z})$ traslladant l'argument u per un vector complex $c \in \mathbb{C}^g$. Atès que $\mathbb{C}^g = \mathbb{R}^g + Z\mathbb{R}^g$, qualsevol $c \in \mathbb{C}^g$ s'escriu de manera única com $c = a + Zb$, amb $a, b \in \mathbb{R}^g$. Això ens porta a les definicions següents:

3.1.4 Definició. Siguin $a, b \in \mathbb{R}^g$ dos vectors qualssevol.

- La funció theta amb característica $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ és

$$\theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(u, Z) := \exp(\pi i\, {}^t a Z a + 2\pi i\, {}^t a(z+b))\theta(u + Za + b, Z)$$

$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} \exp(\pi i\, {}^t(m+a)Z(m+a) + 2\pi i(m+a)(u+b))$$

$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} F(m, u, Z, a, b).$$

- La funció theta amb característica $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ i factor exponencial és

$$\tilde{\theta} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(u, Z) := \exp(\pi i\, {}^t u Y^{-1} u)\theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(u, Z)$$

Observeu que $H(u, v) := 2i\, {}^t\overline{u} Y^{-1} v$ és una forma hermítica de Riemann sobre $\mathbb{C}^g$.

Aquestes noves funcions theta amb característica tenen propietats completament anàlogues a les de la funció theta original. Són quasi-periòdiques:

$$\begin{aligned} \theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(u+n, Z) &= \exp(2\pi i\, {}^t a n)\theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(u, Z), \\ \theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(u+Zn, Z) &= \exp(-\pi i\, {}^t n Z n - 2\pi i\, {}^t n(z+b))\theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(u, Z); \end{aligned}$$

i també són solucions de l'equació de la calor (i aquestes propietats les determinen unívocament llevat de constants). A més a més, satisfan algunes relacions elementals com ara:

$$\begin{aligned} \theta \begin{bmatrix} a+a' \\ b+b' \end{bmatrix}(u, Z) &= e^{\pi i\, {}^t a' Z a' + 2\pi i\, {}^t a'(z+b+b')}\theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(u + Za' + b', Z), \\ \theta \begin{bmatrix} -a \\ -b \end{bmatrix}(u, Z) &= \theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(-u, Z). \end{aligned}$$

3.1.4 Funcions theta amb nivell

3.1.5 Definició. Una funció theta de nivell N, mòdul Z i característica $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ és una funció contínua $G_N \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(\cdot, Z) : \mathbb{C}^g \longrightarrow \mathbb{C}$ que satisfà:

- $G_N \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (u+n, Z) = \exp(2\pi i\, {}^t a n) G_N \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (u, Z)$
- $G_N \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (u+Zn, Z) = \exp(-\pi i N\, {}^t n Z n - 2\pi i N\, {}^t b u) G_N \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (u, Z)$

Els exemples típics de funcions theta amb nivell són

$$\theta \begin{bmatrix} \frac{a+k}{N} \\ \\ b \end{bmatrix} (Nu, NZ), \qquad \theta \begin{bmatrix} a \\ \\ \frac{b+k}{N} \end{bmatrix} (u, \frac{1}{N} Z), \qquad \theta \begin{bmatrix} \frac{a+j}{N} \\ \\ \frac{b+k}{N} \end{bmatrix} (u, Z).$$

El conjunt de totes les funcions theta de nivell N, mòdul Z i característica $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ és clarament un espai vectorial complex, que denotarem per $V_N^Z \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. La quasi-periodicitat que satisfan les funcions theta amb característica i nivell donats imposa certes relacions de recurrència en els coeficients de les seves sèries de Fourier, i a partir d'aquestes recurrències es comprova que $\dim V_N^Z \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = N^g$. Disposem de diverses bases de $V_N^Z \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$:

- (Prym) $\left\{ \theta \begin{bmatrix} \frac{a+k}{N} \\ 0 \end{bmatrix} (Nu, NZ) \right\}_{k \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^g}$;
- (Schottky) $\left\{ \theta \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{b+k}{N} \end{bmatrix} (u, \frac{1}{N} Z) \right\}_{k \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^g}$;
- Si $N = r^2$: $\left\{ \theta \begin{bmatrix} \frac{a+j}{r} \\ \frac{b+k}{r} \end{bmatrix} (Nu, Z) \right\}_{j,k \in (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^g}$.

3.2 Equacions funcionals

L'interès geomètric de la funció theta té dos objectius bàsics:

(1) La construcció d'immersions projectives de tors complexos $\mathbb{C}^g/\Lambda$.

(2) La construcció d'immersions projectives de varietats modulars $\Gamma \backslash \mathbb{H}_g$.

El primer objectiu va lligat a l'existència de relacions algèbriques entre les funcions theta amb un mateix mòdul però característiques diferents. Les fórmules més conegudes són la **fórmula d'addició** i la **fórmula de Riemann**. De fet, ambdues són casos particulars d'una fórmula més general que descriu el comportament de la funció theta a través d'**isogènies**. Aquestes fórmules s'obtenen de manera elemental, reordenant convenientment les sèries que defineixen les diverses funcions theta.

La possibilitat de dur a terme el segon objectiu és deguda al que se sol anomenar **equació funcional de la funció theta** i que reflecteix el comportament de la funció theta a través de l'acció del grup modular. La demostració d'aquesta equació funcional es basa en l'ús de la transformada de Fourier i la fórmula de sumació de Poisson.

En la resta del capítol ens ocuparem de provar aquestes relacions. Malgrat que les tècniques concretes són diferents en cada cas, totes les demostracions tenen una filosofia comuna. Si denotem per $F(m, u, Z, a, b)$ el terme general de la sèrie que defineix $\theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (u, Z)$ el punt de partida sempre serà l'observació que *les transformacions del terme general* $F(m, u, Z)$ *donen transformacions de* $\theta(u, Z)$. En la taula següent resumim les diverses transformacions que s'apliquen al terme general amb les equacions funcionals que generen, així com les aplicacions geomètriques que se n'obtenen.

Transformació	Fórmula	Aplicació
$F(m,f(u),Z,a,b)$	$\theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (u+Za+b,Z) \leftrightsquigarrow \theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (u,Z)$	$\mathbb{C}^g/(\mathrm{Id}\vert Z) \overset{\varphi}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^N$
$F(\phi(m),u,Z,a,b)$	$\theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (u+v,Z) \leftrightsquigarrow \theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (u,Z)\, \theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (v,Z)$	Equacionsde $\mathrm{Im}\,\varphi$
$\hat{F}(m,u,Z,a,b)$	$\theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (u_0,Z) \leftrightsquigarrow \theta \begin{bmatrix} Ma \\ Mb \end{bmatrix} (Mu_0,MZ)$	$\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z}) \backslash \mathcal{H}_g \hookrightarrow \mathbb{P}^N$

3.3 Comportament per isogènies

3.3.1 Reordenació de sèries absolutament convergents

Una sèrie $S = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(m)$ absolutament convergent pot ser reordenada de qualsevol manera. Per als nostres interessos, hi ha dues reordenacions bàsiques. Donat un nombre natural D qualsevol, podem escriure:

$$\begin{aligned} S = {} & \dots + (f(0) + f(D) + f(2D) + \dots) \\ & \dots + (f(1) + f(D+1) + f(2D+1) + \dots) \\ & \dots + (f(2) + f(D+2) + f(2D+2) + \dots) + \dots \\ = {} & \sum_{k=0}^{D-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(Dn+k). \end{aligned}$$

Donat $r \in \mathbb{N}$ tenim també

$$\begin{array}{rrrrr} rS = \dots + f(-1) + f(\frac{-1}{r}) + \dots + & f(0)+ & f(\frac{1}{r})+ & f(\frac{2}{r}) + \dots + & f(1) + \dots \\ \dots + f(-1) + \zeta_r^{-1} f(\frac{-1}{r}) + \dots + & f(0)+ & \zeta_r f(\frac{1}{r})+ & \zeta_r^2 f(\frac{2}{r}) + \dots + & f(1) + \dots \\ \dots + f(-1) + \zeta_r^{-2} f(\frac{-1}{r}) + \dots + & f(0)+ & \zeta_r^2 f(\frac{1}{r})+ & \zeta_r^4 f(\frac{2}{r}) + \dots + & f(1) + \dots \\ \dots + f(-1) + \zeta_r^{-r+1} f(\frac{-1}{r}) + \dots + & f(0)+ & \zeta_r^{r-1} f(\frac{1}{r})+ & \zeta_r^{2(r-1)} f(\frac{2}{r}) + \dots + & f(1) + \dots \\ = \sum_{j=0}^{r-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \zeta_r^{nj} f(n/r). & & & & \end{array}$$

on $\zeta_r = e^{2\pi i/r}$ i definim $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Z}$. Òbviament, aquestes reordenacions elementals poden combinar-se, donant lloc a noves reordenacions. Tot seguit descrivim la versió més general d'aquestes reordenacions, per a una sèrie multidimensional.

Sigui $S = \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} f(m)$ una sèrie absolutament convergent. Triem una matriu $D \in M_g(\mathbb{Z})$ amb determinant $\Delta = \det D$, i un nombre natural $r \in \mathbb{N}$. Aplicant el canvi de variable $rm = Dn$ en el sumatori que defineix S obtenim la fórmula

$$\boxed{sr^g S = \sum_{k \in (\mathbb{Z}/\Delta\mathbb{Z})^g} \sum_{j \in (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^g} \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} \zeta_r^{{}^t nDj} f\left(\frac{1}{r} Dn + k\right)} \tag{3.1}$$

on $s = \sharp\{x \in (\mathbb{Z}/\Delta\mathbb{Z})^g \mid \mathrm{Adj}(D)x \equiv 0 \pmod{\Delta}\}$, i com abans hem pres $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Z}^g$. Les dues reordenacions bàsiques exposades anteriorment s'obtenen amb aquesta fórmula prenent $g = 1, r = 1, D =\mid \Delta \mid$ i $g = 1, D = 1$ respectivament.

3.3.2 Transformació general de la funció θ

Un cop tenim una fórmula general per reordenar sèries absolutament convergents, podem aplicar-la a les sèries que defineixen les funcions theta. Escrivim:

$$\theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (u, Z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} F(m),$$

on $F(m) = F(m,u,Z,a,b) = e^{\pi i\, {}^t(m+a)Z(m+a)+2\pi i(m+a)(u+b)}$. El canvi de variable $m = \frac{1}{r}Dn + k$ transforma aquest terme general segons la regla:

$$F(m,u,Z,a,b) = F\left(n, \frac{1}{r}Du, \frac{1}{r^2}\,{}^tDZD, rD^{-1}(a+k), \frac{1}{r}Db\right).$$

Així doncs, la reordenació (3.1) ens dóna:

$$sr^g\theta\left[\begin{array}{c} a \\ b \end{array}\right](u,Z) =$$

$$\sum_{k\in(\mathbb{Z}/\Delta\mathbb{Z})^g}\ \sum_{j\in(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^g}\ \sum_{n\in\mathbb{Z}^g} \zeta_r^{\,{}^tnj} F\left(n, \frac{1}{r}Du, \frac{1}{r^2}\,{}^tDZD, rD^{-1}(a+k), \frac{1}{r}Db\right) =$$

$$\sum_{k\in(\mathbb{Z}/\Delta\mathbb{Z})^g}\ \sum_{j\in(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^g}\ \sum_{n\in\mathbb{Z}^g} e^{-2\pi i\,{}^taj} F\left(n, \frac{1}{r}Du, \frac{1}{r^2}\,{}^tDZD, rD^{-1}(a+k), \frac{1}{r}D(b+j)\right),$$

la qual cosa ens dóna la fórmula següent, deguda originalment a Krazer i Prym:

$$\boxed{\begin{array}{c} sr^g\theta\left[\begin{array}{c} a \\ b \end{array}\right](u,Z) \\ \shortparallel \\ \displaystyle\sum_{k\in(\mathbb{Z}/\Delta\mathbb{Z})^g}\ \sum_{j\in(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^g} e^{-2\pi i\,{}^taj}\theta\left[\begin{array}{c} rD^{-1}(a+k) \\ \frac{1}{r}D(b+j) \end{array}\right]\left(\frac{1}{r}Du, \frac{1}{r^2}\,{}^tDZD\right). \end{array}} \tag{3.2}$$

En realitat, aquesta fórmula pot interpretar-se com el comportament de la funció theta a través d'isogènies.

Una observació a tenir en compte en aquesta fórmula és que la transformació del mòdul Z és una transformació modular:

$${}^tDZD = ({}^tDZ + 0)(0Z + {}^tD^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} {}^tD & 0 \\ 0 & {}^tD^{-1} \end{pmatrix} Z.$$

Alguns casos particularment interessants d'aquesta fórmula són:

- $D = \mathrm{Id}$,

$$\theta\left[\begin{array}{c} a \\ b \end{array}\right](u,Z) = \sum_{j\in(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^g} e^{-2\pi i\,{}^taj}\,\theta\left[\begin{array}{c} ra \\ \frac{1}{r}(b+j) \end{array}\right]\left(\frac{1}{r}u, \frac{1}{r^2}Z\right)$$

- $D = q\,\mathrm{Id}, r = 1$

$$\theta\left[\begin{array}{c} a \\ b \end{array}\right](u,Z) = \sum_{k\in(\mathbb{Z}/q^g\mathbb{Z})^g} \theta\left[\begin{array}{c} \frac{1}{q}(a+k) \\ qb \end{array}\right](qu, q^2Z)$$

- $g = 1, a, b \in \{0, \frac{1}{2}\}$ $D = 2, r = 2$,

$$\theta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(z,\tau) = \theta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(z/2,\tau/4) + \theta\begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}(z/2,\tau/4),$$

$$\theta\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}(z,\tau) = \theta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(z/2,\tau/4) - \theta\begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}(z/2,\tau/4),$$

$$\theta\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}(z,\tau) = \theta\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}(z/2,\tau/4) + \theta\begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}(z/2,\tau/4),$$

$$\theta\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}(z,\tau) = \theta\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}(z/2,\tau/4) - \theta\begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}(z/2,\tau/4).$$

3.4 Transformacions de productes

Un altre fet bàsic de les funcions theta és que un producte de funcions theta pot expressar-se com una sola funció theta. Fixem una matriu de períodes Z, una família de característiques $\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} a_h \\ b_h \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2g}$ i una família de nombres naturals $p_1, \ldots, p_h \in \mathbb{N}$. Considerem la funció $H : \mathbb{C}^g \longrightarrow \mathbb{C}$ donada per:

$$H(u_1, \ldots, u_h) := \prod_{l=1}^{h} \theta\begin{bmatrix} a_l \\ b_l \end{bmatrix}(u_l, p_l Z).$$

Manipularem l'expressió anterior per arribar a igualar-la a una funció theta h-dimensional:

$$H(u_1, \ldots, u_h) := \prod_{l=1}^{h} \sum_{m_l \in \mathbb{Z}^g} e^{\pi i\, {}^t(m_l + a_j) p_l Z (m_l + a_l) + 2\pi i\, {}^t(m_l + a_l)(u_l + b_j)}$$

$$= \sum_{m_1, \ldots, m_h \in \mathbb{Z}^g} e^{\pi i \sum_{l=1}^{h} {}^t(m_l + a_l) p_l Z (m_l + a_l)} e^{2\pi i \sum_{l=1}^{h} {}^t(m_l + a_l)(u_l + b_l)}$$

$$= \sum_{\tilde{m} \in \mathbb{Z}^{gh}} e^{\pi i\, {}^t(\tilde{m} + \tilde{a}) \tilde{Z} (\tilde{m} + \tilde{a})} e^{2\pi i (\tilde{m} + \tilde{a})(\tilde{u} + \tilde{b})} = \theta\begin{bmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{b} \end{bmatrix}(\tilde{u}, \tilde{Z}_p)$$

on

$$\tilde{m} = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_h \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{gh}, \qquad \tilde{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_h \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{gh}, \qquad \tilde{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_h \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{gh},$$

$$\tilde{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_h \end{pmatrix}, \qquad \tilde{Z}_p = \left(\begin{array}{c|c|c|c} p_1 Z & & & \\ \hline & p_2 Z & & \\ \hline & & \ddots & \\ \hline & & & p_h Z \end{array}\right) \in M_{gh}(\mathbb{C}).$$

Ara podem aplicar la transformació general 3.2 a $\theta \left[\begin{array}{c} \tilde{a} \\ \tilde{b} \end{array} \right] (\tilde{u}, \tilde{Z}_p)$ amb $D = \tilde{C}$ on $C = (c_{jk}) \in M_h(\mathbb{Z})$, que per simplificar suposarem que satisfà

$$\frac{1}{r^2}\,{}^tC \begin{pmatrix} p_1 & & \\ & \ddots & \\ & & p_h \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} q_1 & & \\ & \ddots & \\ & & q_h \end{pmatrix} =: Q \in M_h(\mathbb{N})$$

i

$$\tilde{C} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc} c_{11} & & & c_{12} & & & & c_{1h} & & \\ & \ddots & & & \ddots & & \ddots & & \ddots & \\ & & c_{11} & & & c_{12} & & & & c_{1h} \\ \hline c_{21} & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & \ddots & & & & \vdots & \\ & & c_{21} & & & & & & & \\ \hline & \ddots & & & & & \ddots & & \vdots & \\ \hline c_{h1} & & & & & & & c_{hh} & & \\ & \ddots & & & \cdots & & \cdots & & \ddots & \\ & & c_{h1} & & & & & & & c_{hh} \end{array}\right)$$

Obtenim:

$$sr^{gh}\theta \left[\begin{array}{c} \tilde{a} \\ \tilde{b} \end{array} \right] (\tilde{u}, \tilde{Z}_p) =$$

$$\sum_{\tilde{k} \in (\mathbb{Z}/\Delta\mathbb{Z})^{gh}} \sum_{\tilde{j} \in (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^{gh}} e^{-2\pi i\,{}^t\tilde{a}j} \theta \left[\begin{array}{c} r\tilde{C}^{-1}(\tilde{a} + \tilde{k}) \\ \frac{1}{r}\tilde{C}(\tilde{b} + \tilde{j}) \end{array} \right] \left(\frac{1}{r}\tilde{C}\tilde{u}, \frac{1}{r^2}\,{}^t\tilde{C}\tilde{Z}_p\tilde{C} \right).$$

Però

$${}^t\tilde{C}\tilde{Z}_p\tilde{C} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} q_1 Z & & & \\ \hline & q_2 Z & & \\ \hline & & \ddots & \\ \hline & & & q_h Z \end{array}\right) =: \tilde{Z}_q$$

i per tant

$$\theta\begin{bmatrix} r\tilde{C}^{-1}(\tilde{a}+\tilde{k}) \\ \frac{1}{r}\tilde{C}(\tilde{b}+\tilde{j}) \end{bmatrix}\left(\frac{1}{r}\tilde{C}\tilde{u}, \frac{1}{r^2}\,{}^t\tilde{C}\tilde{Z}_p\tilde{C}\right) = \prod_{l=1}^{h}\theta\begin{bmatrix} a'_l \\ b'_l \end{bmatrix}(v_l, q_l Z)$$

on

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_h \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_h \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_h \end{pmatrix} = rC^{-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_h \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_h \end{pmatrix} = \frac{1}{r}C\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j_1 \\ \vdots \\ j_h \end{pmatrix}.$$

La conclusió de tot aquest maremàgnum de thetes és el

3.4.1 Teorema. *Donada una matriu $C = (c_{jk}) \in M_h(\mathbb{Z})$ tal que*

$$\frac{1}{r^2}\,{}^tC\begin{pmatrix} p_1 & & \\ & \ddots & \\ & & p_h \end{pmatrix}C = \begin{pmatrix} q_1 & & \\ & \ddots & \\ & & q_h \end{pmatrix}$$

amb $p_1, \ldots, p_h, q_1, \ldots, q_h \in \mathbb{N}$, es té que

$$\boxed{\begin{array}{c} (r^h \mid \det C\mid^{h-1} s)^g \displaystyle\prod_{l=1}^{h}\theta\begin{bmatrix} a_l \\ b_l \end{bmatrix}(u_l, p_l Z) \\ \| \\ \displaystyle\sum_{\substack{k\in(\mathbb{Z}/(\det C)\mathbb{Z})^{gh} \\ j\in(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^{gh}}} \prod_{l=1}^{h} e^{-2\pi i\,{}^ta_l j_l}\theta\begin{bmatrix} a'_l + k_l \\ b'_l + j_l \end{bmatrix}\left(v_l, \frac{1}{r^2}\,{}^tq_l Z\right), \end{array}}$$

on $s = \sharp\{x \in (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^h \mid Cx \equiv 0 \pmod{r}\}$ i

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_h \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_h \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a'_{1k} \\ \vdots \\ a'_{hk} \end{pmatrix} = rC^{-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_h \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} b'_{1k} \\ \vdots \\ b'_h \end{pmatrix} = \frac{1}{r} C \begin{pmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_h \end{pmatrix}.$$

Aquest teorema és una autèntica màquina de fer fórmules: per a cada matriu C satisfent la hipòtesi del teorema tenim una fórmula de transformació de productes de funcions thetes. Tot seguit repassem les relacions més famoses que s'obtenen a partir d'aquest resultat.

3.4.1 Fórmula de Riemann

En el teorema 3.4.1 prendrem $r = 2$, $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 1$, i la matriu $C = T := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, que satisfà $\frac{1}{2^2}\,{}^tT \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tenim que

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2} T \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u_1+u_2+u_3+u_4}{2} \\ \frac{u_1+u_2-u_3-u_4}{2} \\ \frac{u_1-u_2+u_3-u_4}{2} \\ \frac{u_1-u_2-u_3+u_4}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2} T \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v_1+v_2+v_3+v_4}{2} \\ \frac{v_1+v_2-v_3-v_4}{2} \\ \frac{v_1-v_2+v_3-v_4}{2} \\ \frac{v_1-v_2-v_3+v_4}{2} \end{pmatrix}$$

Donats $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}^{2g}$ definim:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma), \quad \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(\alpha+\beta), \quad \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(\alpha+\gamma), \quad \begin{bmatrix} a_4 \\ b_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\alpha.$$

Llavors, per a $\epsilon \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^{2g}/\mathbb{Z}^{2g}$

$$\begin{bmatrix} a'_1 \\ b'_1 \end{bmatrix} + \epsilon = \tfrac{1}{2}T \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} + \epsilon \equiv \tfrac{1}{2}(\epsilon + \beta + \gamma) \pmod{\mathbb{Z}},$$

$$\begin{bmatrix} a'_2 \\ b'_2 \end{bmatrix} + \epsilon = \tfrac{1}{2}T \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} + \epsilon = \tfrac{1}{2}(\epsilon + \beta) \pmod{\mathbb{Z}},$$

$$\begin{bmatrix} a'_3 \\ b'_3 \end{bmatrix} + \epsilon = \tfrac{1}{2}T \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \end{bmatrix} + \epsilon = \tfrac{1}{2}(\epsilon + \gamma) \pmod{\mathbb{Z}},$$

$$\begin{bmatrix} a'_4 \\ b'_4 \end{bmatrix} + \epsilon = \tfrac{1}{2}T \begin{bmatrix} a_4 \\ b_4 \end{bmatrix} + \epsilon = \tfrac{1}{2}\epsilon \pmod{\mathbb{Z}}.$$

i el teorema 3.4.1 ens dóna la **fórmula de Riemann**:

$$\boxed{\begin{aligned} &\theta\left[\ \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\ \right]\left(\tfrac{u_1+u_2+u_3+u_4}{2}, Z\right)\theta\left[\ \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\ \right]\left(\tfrac{u_1+u_2-u_3-u_4}{2}, Z\right)\times \\ &\quad \theta\left[\ \tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma)\ \right]\left(\tfrac{u_1-u_2+u_3-u_4}{2}, Z\right)\theta\left[\ \tfrac{1}{2}\alpha\ \right]\left(\tfrac{u_1-u_2-u_3+u_4}{2}, Z\right) = \\ &2^{-g}\sum_{\epsilon\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}^g/\mathbb{Z}^g} (-1)^{{}^t\alpha\epsilon}\theta\left[\ \tfrac{1}{2}(\epsilon+\beta+\gamma)\ \right](u_1, Z)\theta\left[\ \tfrac{1}{2}(\epsilon+\beta)\ \right](u_2, Z)\times \\ &\qquad\qquad \theta\left[\ \tfrac{1}{2}(\epsilon+\gamma)\ \right](u_3, Z)\theta\left[\ \tfrac{1}{2}\epsilon\ \right](u_4, Z). \end{aligned}}$$

Especialitzant aquesta fórmula en els valors $u_1 = u_2, u_3 = u_4$ obtenim **lleis d'addició** en la immersió projectiva de $\mathbb{C}^g/(\mathrm{Id} \mid Z)$ donada per les funcions θ amb característiques semienteres.

$$\begin{aligned} &\theta\left[\ \tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma)\ \right](0, Z)^2 \times \theta\left[\ \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\ \right](u_1+u_3, Z)\theta\left[\ \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\ \right](u_1-u_3, Z) = \\ &2^{-g}\sum_{\epsilon\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}^g/\mathbb{Z}^g} (-1)^{\langle\alpha,\epsilon\rangle}\theta\left[\ \tfrac{1}{2}(\epsilon+\beta+\gamma)\ \right](u_1, Z)\theta\left[\ \tfrac{1}{2}(\epsilon+\beta)\ \right](u_1, Z)\times \\ &\qquad\qquad \theta\left[\ \tfrac{1}{2}(\epsilon+\gamma)\ \right](u_3, Z)\theta\left[\ \tfrac{1}{2}\epsilon\ \right](u_3, Z) \end{aligned}$$

3.4.2 Fórmula d'addició

Apliquem el teorema 3.4.1 amb $r = 1$, $p_1 = p_2 = 1$, $q_1 = q_2 = 2$ i la matriu $C = T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, que satisfà ${}^tT\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Tenim que:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}T\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + v_2 \\ v_1 - v_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}T\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u_1+u_2}{2} \\ \frac{u_1-u_2}{2} \end{pmatrix}$$

Donats $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}^g$, **la fórmula d'addició** ens diu:

$$\boxed{\begin{gathered}\theta\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}(v_1+v_2,Z)\theta\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}(v_1-v_2,Z) \\ \| \\ \frac{1}{2^g}\sum_{j\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}^g/\mathbb{Z}^g} e^{-4\pi i a_1 j}\theta\begin{bmatrix} a_1+j \\ \frac{b_1+b_2}{2} \end{bmatrix}(u_1,2Z)\,\theta\begin{bmatrix} a_2+j \\ \frac{b_1-b_2}{2} \end{bmatrix}(u_2,2Z)\,. \end{gathered}}$$

Observem que aquesta fórmula ens descriu com el comportament de les funcions theta a través de la isogènia donada per la multiplicació per 2.

3.5 Comportament modular: translació

Ens encaminem ja cap a l'estudi de les transformacions modulars de la funció theta. Un primer pas modest és l'estudi del comportament per translació. Sigui $E = {}^tE \in M_g(Z)$. És molt senzill comprovar que se satisfà la relació següent:

$$\boxed{\theta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(u,Z) = e^{\pi i({}^t aEa-\mathrm{diag}(E)a)}\theta\begin{bmatrix} a \\ b+\frac{1}{2}\,\mathrm{diag}\,E-Ea \end{bmatrix}(u,Z+E)} \tag{3.3}$$

Com a casos particulars d'aquesta fórmula obtenim les relacions entre les quatre funcions theta de Jacobi bàsiques:

$$\theta_2(\tau+1) = \theta\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}(0,\tau+1) = e^{-\pi i/4}\theta\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}(0,\tau) = e^{-\pi i/4}\theta_2(\tau);$$

$$\theta_3(\tau+1) = \theta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(0,\tau+1) = \theta\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}(0,\tau) = \theta_4(\tau);$$

$$\theta_4(\tau+1) = \theta\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}(0,\tau+1) = \theta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(0,\tau) = \theta_3(\tau).$$

3.6 La transformada de Fourier i la fórmula de Poisson

Abans de completar l'estudi del comportament modular de la funció theta, hem d'introduir una eina bàsica: la transformada de Fourier. Seguirem la presentació de [Ig72], restringint-nos a l'àmbit que ens interessa: els espais de funcions integrables.

Els espais de funcions

$$L_p(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C} \mid \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx < +\infty \right\} \qquad (1 \le p < \infty)$$

amb la norma

$$\|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$

són espais mètrics complets. L'espai $L_2(\mathbb{R}^n)$ de funcions de quadrat integrable és un espai de Hilbert amb el producte escalar

$$(f, g) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(\overline{g(x)})dx.$$

Una aplicació $\mathbb{C}$-lineal $T : L_2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$ es diu afitada si hi ha una constant $c \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|T(f)\|_2 \le c\|f\|_2$ per a cada funció $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$. Diem que T conserva la norma si $\|T(f)\|_2 = \|f\|_2$ per a qualsevol $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$. En aquest cas, T ha de ser injectiva Diem que T és unitària si conserva la norma i és exhaustiva (i per tant, bijectiva). Atès que $L_2(\mathbb{R}^n)$ és complet, la imatge d'una aplicació que conserva la norma és tancada. Per tant, si T conserva la norma i $T(L_2(\mathbb{R}^n))$ conté un subconjunt dens de $L_2(\mathbb{R}^n)$, automàticament T és unitària.

El conjunt d'operadors unitaris de $L_2(\mathbb{R}^n)$:

$$\mathrm{Aut}(L_2(\mathbb{R}^n)) = \{T : L_2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L_2(\mathbb{R}^n) \text{ unitari}\}$$

és un **grup topològic**, dotat amb la *topologia forta dels operadors*, que és la topologia més feble per la qual totes les aplicacions

$$\begin{array}{rcl} \varphi_\Phi : \mathrm{Aut}(L_2(\mathbb{R}^n)) & \longrightarrow & L_2(\mathbb{R}^n) \\ T & \longrightarrow & T(\Phi), \end{array} \qquad \Phi \in L_2(\mathbb{R}^n)$$

són contínues. Amb aquesta topologia, tenim que una aplicació
$U : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(L_2(\mathbb{R}^n))$ d'un grup topològic G en $\mathrm{Aut}(L_2(\mathbb{R}^n))$ és contínua si i només si totes les aplicacions:

$$\begin{array}{rcl} \varphi_\Phi^G : G & \longrightarrow & L_2(\mathbb{R}^n) \\ g & \longrightarrow & U(g)(\Phi), \end{array} \qquad \Phi \in L_2(\mathbb{R}^n)$$

són contínues (de fet, només cal que les φ_Φ^G siguin contínues per a les Φ d'un subespai dens de $L_2(\mathbb{R}^n)$). Una aplicació contínua $U : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(L_2(\mathbb{R}^n))$ s'anomena **representació unitària**.

En l'espai $L_p(\mathbb{R}^n)$ dues funcions es consideren iguals si els seus valors coincideixen llevat d'en un conjunt de mesura zero, és a dir, $f = g \Leftrightarrow \|f - g\|_p = 0$.

Si G és un grup topològic localment compacte, la seva **representació regular** per la dreta és la representació unitària:

$$\begin{array}{rcl} R : G & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(L_2(G)) \\ g & \longrightarrow & \begin{array}{rcl} R(g) : L_2(G) & \longrightarrow & L_2(G) \\ \Phi & \longrightarrow & R(g)(\Phi)(x) := \Phi(xg) \end{array} \end{array}$$

Per a l'estudi dels espais $L_p(\mathbb{R}^n)$ és convenient conèixer-ne alguns subespais densos. Per aquest objectiu necessitem tres resultats de càlcul, la demostració dels quals reproduïm per a la comoditat del lector:

3.6.1 Lema. $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

DEMOSTRACIÓ: Considerem les funcions

$$f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2, \qquad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1} dt.$$

Les seves derivades satisfan $f'(x) + g'(x) = 0$, i per tant, $f(x) + g(x)$ és una constant que podem calcular com $f(0) + g(0) = \pi/4$. Ara podem calcular la nostra integral impròpia de la forma següent:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx &= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{f(x)} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\pi/4 - g(x)} \\ &= \sqrt{\pi/4 - \lim_{x\to+\infty} \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1} dt} = \sqrt{\pi/4}. \end{aligned}$$

□

3.6.2 Lema. *Donats* $a, b \in \mathbb{C}$, *amb* $\mathrm{Re}(a) > 0$

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(-ax^2 + 2bx) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2}{a}\right), \quad \mathrm{Re}\left(\sqrt{\frac{\pi}{a}}\right) > 0.$$

DEMOSTRACIÓ: Atès que $e^{-ax^2+2bx} = e^{b^2/a} e^{-a(x-b/a)^2}$ només ens cal provar que $\int_{\mathbb{R}} e^{a(x-c)^2} dx = \sqrt{\pi/a}$. Considerem la funció $F(a, c) = \sqrt{\pi/a} -$

Per definir l'espai $L_2(G)$ es fixa una mesura de Haar sobre G.

$\int_{\mathbb{R}} e^{-a(x-c)^2}dx$. Tenim que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial c} &= -\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial e^{-a(x-c)^2}}{\partial c} dx = \\ & \left(\lim_{A\to-\infty}\int_A^0 + \lim_{B\to+\infty}\int_0^B\right) \frac{\partial e^{-a(x-c)^2}}{\partial c} dx \\ &= \lim_{A\to-\infty}\left[-e^{-a(x-c)^2}\right]_A^0 + \lim_{B\to+\infty}\left[-e^{-a(x-c)^2}\right]_0^B \\ &= \lim_{A\to-\infty} e^{-a(A-c)^2} + \lim_{B\to+\infty} -e^{-a(B-c)^2} = 0. \end{aligned}$$

Així doncs, $F(a,c)$ no depèn del paràmetre c. El lema 3.6.1 ens dona el seu valor per a $c=0$, $a>0$:

$$F(a,0) = \sqrt{\pi/a} - \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2}dx = 0.$$

Com que $F(a,0)$ és una funció holomorfa d'a en el semiplà $\mathrm{Re}(a)>0$ i és idènticament nul·la sobre el semieix $\mathbb{R}_{>0}$, ha de ser idènticament nul·la en tot el semiplà $\mathrm{Re}(a)>0$. $\square$

3.6.3 Lema. *Donada una matriu* ***simètrica*** $A\in M_g(\mathbb{C})$ *amb* $\mathrm{Re}\,A>0$ *i un vector* $b\in\mathbb{C}^g$

$$\int_{\mathbb{R}^g} \exp(-{}^t xAx + 2\,{}^t bx)dx = \sqrt{\det(\pi A^{-1})}\exp\left({}^t bA^{-1}b\right),$$

on $\sqrt{\det \pi A^{-1}} \longrightarrow \sqrt{\det \pi \mathrm{Re}(A)^{-1}} > 0$ *quan* $\mathrm{Im}\,A \to 0$.

Demostració: Considerem les funcions

$$F_1^g(A,b) := \textstyle\int_{\mathbb{R}^g} \exp(-{}^t xAx + 2bx)dx,$$

$$F_2^g(A,b) := \sqrt{\det(\pi A^{-1})}\exp({}^t bA^{-1}b).$$

Aquestes funcions satisfan certa relació d'automorfia:

$$\forall M \in \mathrm{GL}_g(\mathbb{R}) \quad F_k({}^t MAM, bM) = |\det M|^{-1} F_k(A,b).$$

Les hipòtesis sobre la matriu A garanteixen l'existència d'una $M\in\mathrm{GL}_g(\mathbb{R})$ tal que ${}^t MAM = 1_g + iD$, amb D una matriu diagonal, i la relació anterior ens permet reduir-nos al cas que la pròpia matriu A és diagonal amb els elements diagonals amb part real positiva. En aquesta situació:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_g \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} F_1^g(A,b) = \prod_{k=1}^g F_1^1(a_k,b_k) \\ \\ F_2^g(A,b) = \prod_{k=1}^g F_2^1(a_k,b_k), \end{cases}$$

i ara cada terme del primer producte coincideix amb el corresponent terme del segon producte, pel lema 3.6.2. □

Considerem la família de funcions

$$\Phi_b(x) = \exp(-\pi\, {}^t x x + 2\pi i\, {}^t b x)$$

i l'espai $H_g = \langle \Phi_b(x) \rangle_{b \in \mathbb{C}^g}$. El lema 3.6.3 ens diu que

$$\|\Phi_b(x)\|_p = p^{-g/(2p)} \exp(\pi\, {}^t \operatorname{Im}(b \operatorname{Im}(b))), \quad 1 \leq p < +\infty,$$

i per tant, $H_g \subseteq L^p(\mathbb{R}^g)$. Ara tenim en compte dos resultats forts d'anàlisi:

- L'espai de funcions $\mathcal{C}^\infty$ amb suport compacte és un subespai dens de $L^p(\mathbb{R}^g)$.
- Qualsevol funció periòdica diferenciable amb continuïtat admet un desenvolupament en sèrie de Fourier absolutament convergent, és a dir, pertany a l'espai H_g.

3.6.4 Teorema. (Teorema de Plancherel) *Existeix una aplicació unitària*

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}^g) & \longrightarrow & L^2(\mathbb{R}^g) \\ \Phi & \longrightarrow & \widehat{\Phi}, \end{array}$$

anomenada **transformada de Fourier**, *tal que:*

- $\widehat{\widehat{\Phi}} = \Phi$*;*
- *Quan* $\Phi \in L^1(\mathbb{R}^g)$ *és* $\widehat{\Phi} = \int_{\mathbb{R}^g} \Phi(y) \exp(-2\pi i\, {}^t x y) dy$.

No entrarem en els detalls de la demostració, però el guió és clar: es comença definint la transformada sobre l'espai H_2 mitjançant la fórmula anterior, i tot seguit s'estén la definició de manera única a tot $L^2(\mathbb{R}^g)$ tenint en compte que H_2 és un subespai dens de $L^2(\mathbb{R}^g)$.

Per la mateixa definició, queden clares les propietats bàsiques següents de la transformada de Fourier:

- Linealitat: $\widehat{f+g} = \hat{f} + \hat{g}$.
- Translació: $g(x) = f(x+a) \Rightarrow \widehat{g}(y) = e^{2\pi i\, {}^t ay}\hat{f}(y)$.
- Exponencial: $f(x) = \exp({}^t xx) \Rightarrow \hat{f} = f$.

La propietat que més ens interessa, la fórmula de Poisson, és una mica més complicada. Fa referència a les anomenades *funcions de Schwartz.* Una funció de Schwartz $\Phi : \mathbb{R}^g \to \mathbb{C}$ és una funció $\mathcal{C}^\infty$ de decreixement fort, és a dir, tal que per a qualsevol operador diferencial invariant per translació D i per a qualsevol polinomi P

$$\|P.D\Phi\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^g} |P(x)(D\Phi)(x)| < +\infty.$$

Les funcions de Schwartz formen un subespai vectorial topològic dens de $L^p(\mathbb{R}^g)$. Donat un polinomi quadràtic $q(x) = {}^t xAx + {}^t bx$, amb $\operatorname{Im} A > 0$, la funció $\Phi_q(x) = \exp(2\pi i q(x))$ és una funció de Schwartz.

Donada una funció de Schwartz Φ, la sèrie

$$F^\Phi(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^g} |\Phi(x+m)|$$

defineix una sèrie uniformement convergent en compactes de $\mathbb{R}^g$. Ara ja estem en condicions de provar la:

3.6.5 Proposició. (Fórmula de Poisson) *Una funció de Schwartz Φ satisfà:*

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^g} \Phi(m) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^g} \widehat{\Phi}(m).$$

DEMOSTRACIÓ: La funció F^Φ associada a Φ és $\mathcal{C}^\infty$ i $\mathbb{Z}^g$-periòdica, per la qual cosa:

- $DF^\Phi = F^{D\Phi}$ per a qualsevol operador diferencial invariant per translació.
- F^Φ admet un desenvolupament en sèrie de Fourier absolutament convergent $F^\Phi(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^g} a_m e^{2\pi i\, {}^t mx}$.

Els coeficients a_m d'aquest desenvolupament venen donats per:

$$\begin{aligned} a_m &= \textstyle\int_{\mathbb{R}^g/\mathbb{Z}^g} F^\Phi(x) e^{2\pi i\, {}^t mx} dx = \int_{\mathbb{R}^g/\mathbb{Z}^g} \sum_{u\in\mathbb{Z}^g} \Phi(x+u) e^{2\pi i\, {}^t mx} dx \\ &= \textstyle\int_{\mathbb{R}^g} F^\Phi(x) e^{2\pi i\, {}^t mx} dx = \widehat{\Phi}(m). \end{aligned}$$

Per tant $F^\Phi(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^g} \widehat{\Phi}(m) e^{2\pi i\, {}^t mx}$, i avaluant aquesta igualtat en $x = 0$ obtenim la fórmula de Poisson. □

3.7 L'equació funcional de la funció theta

Hem introduït la transformada de Fourier amb l'objectiu d'obtenir l'equació funcional de la funció theta. L'eina clau, com veurem, serà la fórmula de Poisson. Obtindrem l'equació funcional més general, corresponent a una funció theta amb característica. Partim de la pròpia definició:

$$\theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (u, Z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} F(m),$$

on $F(x) := F(x, u, Z, a, b) := e^{\pi i\, {}^t(x+a) Z (x+a) + 2\pi i\, {}^t(x+a)(u+b)}$. Les propietats bàsiques de la transformada de Fourier ens permeten calcular molt fàcilment la transformada del terme general $F(x)$:

$$\begin{aligned}
\widehat{F}(x) &= \int_{\mathbb{R}^g} e^{-2\pi i\, {}^t x y} F(t) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^g} e^{-2\pi i\, {}^t x(y+a) + 2\pi i\, {}^t a x} e^{\pi i\, {}^t(y+a) Z (y+a) + 2\pi i\, {}^t(y+a)(u+b)} dy \\
&\overset{\substack{w=y+a \\ \downarrow}}{=} \int_{\mathbb{R}^g} e^{2\pi i\, {}^t a x} e^{-2\pi i\, {}^t w x} e^{\pi i\, {}^t w Z w + 2\pi i\, {}^t w(u+b)} dw \\
&= e^{2\pi i\, {}^t a x} \int_{\mathbb{R}^g} e^{\pi i\, {}^t w Z w + 2\pi i\, {}^t w(u+b-x)}.
\end{aligned}$$

En aquest punt, apliquem el lema 3.6.3, amb $b = \pi i(u + b - x)$ i $A = -\pi i Z$, de forma que $A^{-1} = i\pi^{-1} Z^{-1}$. Obtenim:

$$\begin{aligned}
\widehat{F}(x) &= e^{2\pi i\, {}^t a x} \det(iZ^{-1})^{1/2} e^{\pi i\, {}^t(u+b-x) i\pi^{-1} Z^{-1}(u+b-x)} \\
&= i^{g/2} \det(Z)^{-1/2} e^{2\pi i\, {}^t a x - \pi i\, {}^t(u+b-x) Z^{-1}(u+b-x)} \\
&= i^{g/2} \det(Z)^{-1/2} e^{-\pi i\, {}^t(b-x) Z^{-1}(b-x) + 2\pi i\, {}^t(b-x)(Z^{-1}u + a)} e^{-\pi i\, {}^t u Z^{-1} u} \\
&= i^{g/2} \det(Z)^{-1/2} e^{-\pi i\, {}^t u Z^{-1} u} F(x, Z^{-1}u, -Z^{-1}, -b, a).
\end{aligned}$$

Ara ja és el moment d'aplicar la fórmula de Poisson:

$$\begin{aligned}
\theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (u, Z) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} F(m, u, Z, a, b) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} F(m) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} \widehat{F}(m) \\
&= i^{g/2} \det(Z)^{-1/2} e^{-\pi i\, {}^t u Z^{-1} u} \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} F(m, Z^{-1}u, -Z^{-1}, -b, a) \\
&= i^{g/2} \det(Z)^{-1/2} e^{-\pi i\, {}^t u Z^{-1} u} \theta \begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix} (Z^{-1}u, -Z^{-1}).
\end{aligned}$$

Hem obtingut doncs:

3.7.1 Teorema. *La funció theta satisfà l'equació funcional*

$$\boxed{\theta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(u,Z) = i^{g/2}\det(Z)^{-1/2}e^{-\pi i\,{}^t uZ^{-1}u}\,\theta\begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix}(Z^{-1}u,-Z^{-1})}$$

on el signe del factor $i^{g/2}\det(Z)^{-1/2}$ *s'escull, tal com indica el lema 3.6.3, de forma que*

$$\det(iZ^{-1}) \xrightarrow{\operatorname{Re} Z\to 0} \sqrt{\det(-\pi(\operatorname{Im} Z)^{-1})}\,.$$

3.8 Resum: les tres transformacions bàsiques de la funció theta

Acabem el capítol recollint en una taula les tres transformacions bàsiques de la funció theta que hem presentat.

Isogènia: $Z \longrightarrow \frac{1}{r^2}\begin{pmatrix} {}^tD & 0 \\ 0 & {}^tD^{-1}\end{pmatrix} Z$

$$sr^g\theta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(u,Z) = \sum_{k\in(\mathbb{Z}/\Delta\mathbb{Z})^g}\ \sum_{j\in(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^g} e^{-2\pi i\,{}^t aj}\,\theta\begin{bmatrix} rD^{-1}(a+k) \\ \frac{1}{r}D(b+j) \end{bmatrix}\left(\frac{1}{r}u, \frac{1}{r^2}\,{}^tDZD\right).$$

Translació: $Z \longrightarrow \begin{pmatrix} \mathrm{Id} & E \\ 0 & \mathrm{Id}\end{pmatrix} Z$

$$\theta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(u,Z) = e^{\pi i({}^t aEa-\operatorname{diag}(E)a)}\,\theta\begin{bmatrix} a \\ b+\frac{1}{2}\operatorname{diag}E - Ea \end{bmatrix}(u,Z+E)$$

Inversió: $Z \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id} \\ -\mathrm{Id} & 0\end{pmatrix} Z$

$$\theta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(u,Z) = i^{g/2}\det(Z)^{-1/2}e^{-\pi i\,{}^t uZ^{-1}u}\,\theta\begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix}(Z^{-1}u,-Z^{-1})$$

Bibliografia

[Fo1822] Fourier, J-B. J.: *Théorie analytique de la chaleur*. Paris, 1822.

[Gö1847] Göpel, A.: Theoria trascendentium Abelianorum primi ordinis adumbratio levis, *J. fur Math.*, vol 35 (1847).

[Ig72] Igusa, K.: *Theta Functions*. GMW **194**. Springer, 1972.

[Ja1829] Jacobi, C. G. J.: *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum*, 1829. Gesammelte Werke Bd. 1. Berlin, 1881.

[Kr03] Krazer, A.: *Lehrbuch der Thetafunktionen*. Chelsea, 1970. Primera ed.: Leipzig, 1903.

[Kr-Pr1892] Krazer, A., Prym, F. E.: *Neue Grundlagen eine Theorie der algemeine Thetafunktionen*, Leipzig, 1892.

[Mum83-I] Mumford, D.: *Tata Lectures on Theta I*. Progress in Math. **28**. Birkhäuser, 1983.

[Mum84-II] Mumford, D.: *Tata Lectures on Theta II*. Progress in Math. **43**. Birkhäuser, 1984.

[Mum91-III] Mumford, D. with Nori, M. and Norman, P.: *Tata Lectures on Theta III*. Progress in Math. **97**. Birkhäuser, 1991.

[Ri1857] Riemann, B.: *Theorie der Abel'schen Functionen*, 1857. Gesammelte mathematische Werke. Teuber, 1892.

[Ri1876] Riemann, B.: *Convergenz der p-fach unendlichen Theta-Reihe*. Gesammelte mathematische Werke. Teuber, 1892.

[Ro1851] Rosenhain, G.: Memoire sur les fonctions de deux variables et a quatre périodes qui sont les inverses des intégrakes ultra-elliptiques de la première classe, *Mémoires des Savants Étrangers*, t. 11 (1851).

[We1849] Weierstrass, K.: *Beitrag zur Theorie der Abelschen Integrale*, 1849. Math. Werke, Bd. 1, Berlin, 1894.

J. Guàrdia

Dept. de Matemàtica Aplicada IV

Escola Politècnica Superior d'Enginyeria de Vilanova i la Geltrú

Av. Víctor Balaguer s/n

E-08800, Vilanova i la Geltrú

guardia@mat.upc.es

Capítol 4

Funcions theta clàssiques (II)

P. Bayer

Aquest capítol versa sobre les funcions theta clàssiques i les funcions theta en el sentit de Weil.

Les funcions theta són una creació genuïna de la matemàtica del segle XIX. Com veurem, una munió d'investigadors hi dedicaren el seu esforç. Les seves fites exerciren una notable influència en el desenvolupament posterior de la geometria algebraica. En particular, les funcions theta condicionaren el naixement de la teoria de les varietats abelianes. El tractament de Weil de les funcions theta conduí cap a una teoria de funcions theta sobre cossos algebraicament tancats, que es desenvolupà en ple segle XX.

4.1 Cronologia

En el segle XVIII, i en contextos diferents, D. Bernoulli (1700-1782), Euler (1707-1783) i Fourier (1768-1830) utilitzaren sèries trigonomètriques. L'exemple més significatiu és troba a [Fou1822]. En aquest treball, Fourier estudia l'equació diferencial que regeix la difusió de la calor en una barra i obté solucions en forma de sèries trigonomètriques que, depenent de condi-

Amb finançament parcial de MCYT BFM2000-0627 i BFM2003-01898.

cions de contorn, proporcionen la temperatura en un punt i en un instant donats (cf. Cap. 1).

Les funcions $\sin z, \cos z$ són periòdiques i, com que són enteres, admeten desenvolupaments globals en sèrie de potències. Euler fou el primer en desenvolupar-les, a més, en forma de productes infinits, tenint en compte els seus zeros.

Les integrals el·líptiques i les seves transformacions foren estudiades abastament per Legendre (1752-1833). En invertir-les, s'obtenen les funcions el·líptiques, que són doblement periòdiques i meromorfes i, per tant, no admeten desenvolupaments globals en sèrie de Taylor. En tenir en compte els seus zeros i els seus pols,

Gauss (1777-1855),

Abel (1802-1829),

Jacobi (1804-1851),

n'obtingueren representacions globals en forma de quocients de productes infinits. En aïllar i desenvolupar el numerador i el denominador de les tres funcions el·líptiques $\mathrm{sn}, \mathrm{cn}, \mathrm{dn}$, Jacobi [Ja1829] obtingué quatre sèries trigonomètriques, dependents de dues variables: $\vartheta_i = \vartheta_i(z, \tau)$ (cf. Cap. 2). L'elecció d'aquesta notació per Jacobi s'ha relacionat amb el fet que la lletra $\vartheta \sim$ th és la inicial de la paraula grega $\vartheta\varepsilon\varrho\mu o\tau\eta\varsigma$, que significa calor (l'adjectiu $\vartheta\varepsilon\varrho\mu o\varsigma$ significa calent).

Les integrals hiperel·líptiques són de la forma $\displaystyle\int \frac{R(x)}{\sqrt{P(x)}}\,dx$, on $R(x)$ és una funció racional i $P(x)$ un polinomi. Més generalment, les integrals abelianes són de la forma $\displaystyle\int f(x,y)\,dx$, on $f(x,y)$ és una funció racional i les variables x, y estan lligades per una relació algebraica $F(x,y) = 0$.

Recerques sobre la inversió d'integrals hiperel·líptiques conduïren a l'estudi de les funcions hiperel·líptiques i les funcions theta hiperel·líptiques. Recerques posteriors sobre la inversió d'integrals abelianes conduïren a l'estudi de les funcions abelianes i les funcions theta abelianes.

Les funcions theta, $\vartheta = \vartheta(u, Z)$, depenen d'una variable vectorial $u \in \mathbb{C}^g$, anomenada *argument*, i una variable matricial $Z \in \mathrm{M}(g, \mathbb{C})$, anomenada *mòdul*. Més endavant es consideraren funcions theta amb *característiques*: $\vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(u, Z)$, ${}^t a, {}^t b \in \mathbb{R}^g$; i *nivell*: $N \in \mathbb{N}$ (cf. Cap. 3).

Entre els creadors de la teoria de les funcions theta clàssiques, mencionem

Göpel (1812-1847),
Weierstrass (1815-1897),
Rosenhain (1816-1887),
Hermite (1822-1901),
Kronecker (1823-1891),
Riemann (1826-1866),
Königsberger (1837-1921),
Thomae (1840-1921),
Prym (1841-1915),
Weber (1842-1913),
Noether, M. (1844-1921),
Frobenius (1849-1917),
Klein (1849-1925),
Kowalewska, S. (1850-1891),
Schottky (1851-1935),
Poincaré (1854-1912),
Picard (1856-1941),
Bolza (1857-1942),
Humbert (1859-1921),
Wirtinger (1865-1945).

Els resultats de Jacobi sobre la inversió d'integrals el·líptiques foren estesos per Göpel i Rosenhain a integrals hiperel·líptiques en què $P(x)$ és un polinomi de grau ≤ 6. El problema d'inversió planteja obtenir els valors z_1, z_2 a partir d'equacions

$$u_1 = \int_{p_1}^{z_1} \omega_1 + \int_{p_2}^{z_2} \omega_1, \quad u_2 = \int_{p_1}^{z_1} \omega_2 + \int_{p_2}^{z_2} \omega_2,$$

Sorgiren així funcions 4-periòdiques i funcions theta de dos arguments $u = (u_1, u_2)$.

Weierstrass s'ocupà del problema d'inversió d'integrals hiperel·líptiques per a un polinomi $P(x)$ de grau arbitrari. Riemann ho feu del problema d'inversió d'integrals abelianes. Sorgiren així funcions $2g$-periòdiques i funcions theta $\vartheta(u, Z)$ de g arguments $u = (u_1, \ldots, u_g)$, on g és un nombre qualsevol.

Un dels treballs cabdals en aquest context és la memòria de Riemann [Rie1857]. En la primera part, Riemann hi desenvolupa una teoria de superfícies analítiques (superfícies de Riemann) associades a una equació polinòmica irreductible $F(x, y) = 0$. En particular, s'hi troba la noció de deficiència p de la superfície (gènere g) i la desigualtat de Riemann (primera part del teorema de Riemann-Roch).

En la segona part de la memòria, Riemann presenta la seva teoria de funcions theta i l'aplicació al problema d'inversió de Jacobi. Riemann considera diferencials de primera espècie (abelianes), segona espècie i tercera espècie. En estudiar les retro-seccions de la superfície (una base de l'homologia), Riemann conclou que els períodes de les diferencials de primera i segona espècie han de satisfer certes relacions bilineals (relacions de Riemann, polarització principal), generalitzant relacions que havien estat obtingudes per Legendre en el cas el·líptic. Les relacions li permeten la reducció canònica de la xarxa de períodes (Λ) de les integrals abelianes, obtenint una matriu simètrica de part imaginària definida positiva $Z \in \mathrm{M}(g, \mathbb{C})$. Aquesta matriu intervindrà com a mòdul de la sèrie theta $\vartheta(u, Z)$. Riemann proposa una solució del problema d'immersió; és a dir, el càlcul dels valors $\{z_1, \ldots, z_g\}$ solució de l'equació

$$(u_1, \ldots, u_g) \equiv (\sum_{k=1}^{g} \int_{p_k}^{z_k} \omega_1, \ldots, \sum_{k=1}^{g} \int_{p_k}^{z_k} \omega_g), \quad (u_1, \ldots, u_g) \in \mathbb{C}^g/\Lambda,$$

on $\omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_g\}$ és una base de les diferencials de primera espècie. Fixat un punt p_0 i, per a cada vector $u = (u_1, \ldots, u_g) \in \mathbb{C}^g/\Lambda$, els valors $\{z_1, \ldots, z_g\}$ coincideixen amb els zeros de l'anomenada funció theta de Riemann (sobre la superfície), quan aquesta no és idènticament nul·la:

$$\Theta(z) := \vartheta\left(\int_{p_0}^{z} \omega - u - \kappa, Z\right).$$

Aquí, $\kappa \in \mathbb{C}^g$ és un vector (vector de Riemann) que depèn únicament de p_0 i Z, però que és independent de u.

En el llenguatge actual, si denotem per C la corba projectiva i no singular associada a una superfície de Riemann de gènere g, el problema d'inversió planteja la inversió de l'aplicació d'Abel-Jacobi $C^{(g)} \to J(C)$, on $C^{(g)}$ és el g-èsim producte simètric de C. Les funcions abelianes de gènere g constitueixen el cos de funcions de la jacobiana $J(C) = \mathbb{C}^g/\Lambda$.

El problema d'inversió de Jacobi fou estudiat abastament per altres autors. Destaquen, pel seu caràcter efectiu, les recerques de Weierstrass i Klein. Weierstrass considerà el cas hiperel·líptic, posant-hi de manifest el paper de g nombres naturals n_i, $1 \leq n_i \leq 2g - 1$ (llacunes de Weierstrass).

Klein estudià les corbes canòniques, definides per equacions

$$F(x,y) = y^n - x^m + (\text{termes d'ordre inferior}).$$

Donada una corba canònica C de gènere g, Klein construí les seves funcions abelianes en termes de funcions $\wp_{i,j}$ (de Klein):

$$\wp_{ij}(u) := -\frac{\partial^2}{\partial u_i\, \partial u_j} \log \sigma(u), \quad 1 \leq i,j \leq g.$$

La funció σ de Klein s'obté per una normalització convenient de la funció theta de Riemann $\vartheta(u,Z)$. És anàloga a la funció σ de Weierstrass, i és una funció automorfa per al grup simplèctic modular. En aquest cas, les coordenades dels punts $z_k(u) = (x_k(u), y_k(u))$ solució del problema d'inversió s'obtenen a partir de les arrels d'equacions algebraiques (Bolza). Les funcions simètriques elementals de les arrels proporcionen funcions abelianes, que s'expressen en termes de les funcions $\wp_{i,j}$ i les seves derivades.

Weierstrass i Riemann s'havien adonat que les funcions theta que obtenien en imposar la convergència de les sèries theta eren més generals que les estrictament necessàries per expressar les funcions abelianes de gènere g. En efecte, el mòdul Z de les sèries depenia de $\frac{1}{2}g(g+1)$ paràmetres; en canvi, les funcions hiperel·líptiques depenien únicament de $2g-1$ paràmetres i, més generalment, les funcions abelianes ho feien de $3g-3$ paràmetres. Aquests nombres de paràmetres eren els mínims necessaris en la definició de la classe d'equivalència birracional de $F(x,y) = 0$.

Riemann havia demostrat que una funció meromorfa no constant de n variables no podia tenir més de $2n$ períodes linealment independents, generalitzant així un resultat obtingut per Liouville i Weierstrass en gènere 1. Weierstrass demostrà que el cos de les funcions meromorfes de n variables i $2n$-periòdiques és finitament generat sobre $\mathbb{C}$ i de grau de transcendència $\leq n$ sobre $\mathbb{C}$. Al mateix temps, Riemann estava convençut que qualsevol funció meromorfa periòdica era expressable com a quocient de funcions theta.

L'any 1862, Hermite posà de manifest que els períodes de qualsevol funció meromorfa periòdica, provingués o no de la inversió d'integrals abelianes, satisfeien unes relacions bilineals semblants a les obtingudes per Riemann. Aquestes relacions s'expressen per mitjà d'una forma hermítica positiva. La forma canònica de les relacions s'obté a partir de la reducció, deguda a Frobenius, d'una forma alternada de coeficients enters associada a la forma hermítica. (Les polaritzacions que en resulten poden no ser principals.)

El problema general de l'expressió de les funcions de n variables meromorfes i $2n$-periòdiques com a quocients de funcions theta fou resolt per

Poincaré i Picard [P-P1883] per mitjà de funcions theta abelianes de g variables amb $g \geq n$. Poincaré [Poi1884], [Poi1904] provà així mateix que el caràcter algebraic d'un tor complex implica l'existència d'una forma de Riemann; el tor complex $\mathbb{C}^n/\Lambda$ és de dimensió algebraica n si, i només si, la forma de Riemann és no degenerada. En aquest cas, el tor s'nomenà una varietat de Picard (varietat abeliana). Poincaré obtingué també el teorema de reductibilitat completa per a aquestes varietats [Poi1884].

El problema d'expressar qualsevol funció periòdica com a quocient de funcions theta estigué en un principi relacionat amb el problema de la reducció d'integrals abelianes. Un teorema degut a Wirtinger permeté, mitjançant l'ús de transformades enteres d'ordre superior de funcions theta (isogènies), caracteritzar les funcions theta abelianes de g variables expressables com a producte de funcions theta de $g-n$ variables i de funcions theta generals de n variables. D'aquesta manera, la teoria de les funcions theta generals es recuperà a partir de la teoria de les funcions theta abelianes, no de manera directa, sinó a través de quocients.

Molt més difícil resultà el càlcul de les

$$\frac{1}{2}g(g+1) - (3g-3) = \frac{1}{2}(g-2)(g-3)$$

relacions que satisfan els mòduls Z de les funcions theta abelianes. En aquesta direcció, resultats particulars foren obtinguts per Schottky i Poincaré en el cas $g = 4$.

Els clàssics dividiren les transformacions que fixen un mòdul en multiplicacions complexes, dites principals per Frobenius, o més generals, dites singulars per Humbert. Königsberger demostrà que quan el mòdul Z admet multiplicacions complexes, aleshores les funcions theta corresponents descomponen en producte de funcions theta d'un nombre inferior de variables.

Les referències bibliogràfiques dels treballs esmentats es troben majoritàriament a [Kra03].

A la primera meitat del segle XX es produí una transició de resultats analítics sobre funcions theta vers resultats geomètrics, vàlids sobre un cos algebraicament tancat qualsevol. La teoria de les funcions abelianes i les funcions theta abelianes derivà en l'estudi de les corbes i les seves jacobianes. Sembla ser que Klein fou el primer en utilitzar el terme varietat jacobiana. La teoria de les funcions periòdiques i les funcions theta generals derivà en l'estudi de les varietats abelianes. La base analítica de les isogènies de les varietats abelianes fou la teoria de les transformacions enteres d'ordre superior de les funcions theta.

Entre els autors que estudiaren les funcions theta a la fi del període clàssic, hi trobem:

Lefschetz (1884-1972),
Weyl (1885-1955),
Hecke (1887-1947),
Torelli [1913],
de Franchis [1913; 1943],
Scorza [1916; 1921],
Rosati [1918],
Castelnuovo (1865-1952),
Severi (1879-1961),
Siegel (1896-1981),
Weil (1906-1998).[1]

L'any 1921, Lefschetz demostrà el teorema d'immersió de tota varietat abeliana complexa en un espai projectiu. El terme varietat abeliana s'imposà a partir de la publicació de la memòria de Lefschetz [Lef21]. En ella hi llegim:

> *An* Abelian *variety of genus p, V_p, is a variety whose non-homogeneous point coordinates are equal to $2p$-ply periodic meromorphic functions of p arguments $u_1, \ldots, u_p$, or whose homogeneous point coordinates are proportional to theta's of the same order and continuous characteristic. The variety is algebraic* (*Weierstrass*) *and of dimensionality p. When the periods are those of an algebraic curve of genus p, V_p is called a* Jacobi *variety.*

4.2 Conceptes preliminars

Començarem per recordar alguns conceptes, habituals en la literatura, que necessitarem tot seguit.

1. Desconec la data del naixement i de la mort d'alguns autors; en aquest cas, la data que segueix al nom indica l'any d'una publicació rellevant; les referències corresponents es poden trobar a la bibliografia de [Lan-Bir92].

4.2.1 Espais hermítics

Sigui T un $\mathbb{C}$-espai vectorial de dimensió g, que interpretarem, també, com a un $\mathbb{R}$-espai vectorial de dimensió $2g$. Definim els $\mathbb{C}$-espais vectorials

$$T' = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T, \mathbb{C}), \quad T'' = \mathrm{AntHom}_{\mathbb{C}}(T, \mathbb{C}),$$

per als quals se satisfà que $\dim_{\mathbb{C}} T' = \dim_{\mathbb{C}} T'' = g$. Es té que

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T, \mathbb{R}) \simeq T' \oplus T'', \quad f \mapsto \frac{1}{2}(f' + f''),$$

on $f'(u) := f(u) - if(iu), \quad f''(u) = f(u) + if(iu)$.

Una forma hermítica sobre l'espai vectorial T és una aplicació $H : T \times T \to \mathbb{C}$ que satisfà les propietats

(i) $H(u_1 + u_2, v) = H(u_1, v) + H(u_2, v)$,

(ii) $H(\lambda u, v) = \lambda H(u, v)$,

(iii) $H(u, v) = \overline{H(v, u)}$; per a $u_i, u, v \in T$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Els espais hermítics (T, H) es relacionen amb els espais simètrics i amb els hemisimètrics. En efecte, les fórmules

$$H(u, v) = S(u, v) + iA(u, v), \quad S(u, v),\ A(u, v) \in \mathbb{R}$$

permeten associar a tota forma hermítica H una forma $\mathbb{R}$-bilineal simètrica $S(u, v)$ i una forma $\mathbb{R}$-bilineal alternada $A(u, v)$ ambdues satisfent les igualtats

$$S(iu, iv) = S(u, v), \quad A(iu, iv) = A(u, v).$$

A la vegada, la fórmula $\Phi(u) := H(u, u) = S(u, u)$ proporciona una forma quadràtica de 2g variables.

Cadascuna d'aquestes formes determina les restants, tal com mostren les identitats

$$2S(u, v) = \Phi(u + v) - \Phi(u) - \Phi(v),$$
$$S(u, v) = A(iu, v), \quad A(u, v) = -S(iu, v).$$

La matriu de A s'obté a partir de la matriu de H. Si $T' = \langle \omega_1, \ldots, \omega_g \rangle$, aleshores de

$$H(u, v) = \sum_{i,j=1}^{g} h_{i,j} \omega_i(u) \overline{\omega}_j(v), \quad h_{i,j} \in \mathbb{R},$$

s'obté

$$A(u, v) = \frac{1}{2i} \sum_{i,j=1}^{g} h_{i,j} [\omega_i(u) \overline{\omega}_j(v) - \overline{\omega}_j(u) \omega_i(v)].$$

4.2.2 Reducció de formes alternades.

El resultat següent és degut a Frobenius. Associa a tota forma alternada d'entrades enteres el conjunt dels seus divisors elementals.

Denotem per $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^{2g}$ una xarxa de l'espai vectorial $T \simeq \mathbb{C}^g$. Sigui $E : \mathbb{Q}^{2g} \times \mathbb{Q}^{2g} \to \mathbb{Q}$ una forma $\mathbb{Q}$-bilineal alternada sobre $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Suposem que és $\mathbb{Z}$-valorada sobre Λ:

$$E(\Lambda, \Lambda) \subseteq \mathbb{Z}.$$

Sigui $A \in \mathrm{M}(2g, \mathbb{Z})$ la matriu de E en una base de Λ. Aleshores, existeix una matriu $U \in \mathbf{GL}(2g, \mathbb{Z})$ tal que

$${}^tU\,A\,U = \begin{bmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{bmatrix},$$

on $D = \mathrm{diag}[e_1, \dots, e_g]$ és una matriu diagonal per a la qual $e_1 | \dots | e_g$. La forma E s'anomena de tipus D. El valor $\mathrm{Pf}(E) := |\mathrm{det} D|$ és el pfaffià de la forma alternada. El pfaffià reduït, $\mathrm{Pf.red.}\,(E)$, és el producte dels termes $e_i \neq 0$.

4.2.3 Els grups simplèctics

Definim

$$\begin{aligned} \mathbf{Sp}(2g, \mathbb{R}) &= \left\{ M \in \mathbf{M}(2g, \mathbb{R}) : {}^tM \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{I}_g \\ -\mathrm{I}_g & 0 \end{bmatrix} M = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{I}_g \\ -\mathrm{I}_g & 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbf{M}(2g, \mathbb{R}) : \; a, b, c, d \in \mathbf{M}(g, \mathbb{R}), \right. \\ &\qquad \left. {}^ta\,d - {}^tc\,b = \mathrm{I}_g, \quad {}^ta\,c = {}^tc\,a, \quad {}^tb\,d = {}^td\,b \right\}. \end{aligned}$$

El grup simplèctic $\mathbf{Sp}(2g, \mathbb{R})$ opera en el semi-espai superior de Siegel

$$\mathcal{H}_g := \{ Z \in \mathbf{M}(g, \mathbb{C}) : {}^tZ = Z, \ \mathrm{Im}(Z) > 0 \},$$

format per les matrius $g \times g$ simètriques de part imaginària definida positiva. La seva acció és donada per

$$M\langle Z \rangle := (aZ + b)(cZ + d)^{-1}, \quad Z \in \mathcal{H}_g, \ M \in \mathbf{Sp}(2g, \mathbb{R}).$$

Considerem, també, el grup simplèctic modular format per les matrius de $\mathbf{Sp}(2g,\mathbb{R})$ d'entrades enteres:

$$\mathbf{Sp}(2g,\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbf{Sp}(2g,\mathbb{R}) : \; a,b,c,d \in \mathbf{M}(g,\mathbb{Z}) \right\}.$$

Les matrius

$$J_g = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{I}_g \\ -\mathrm{I}_g & 0 \end{bmatrix}; \quad A_\alpha = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_g & \alpha \\ 0 & \mathrm{I}_g \end{bmatrix} \text{ on } \alpha \in \mathbf{M}(g,\mathbb{Z}), \; \alpha = {}^t\alpha;$$

$$B_\beta = \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & {}^t\beta^{-1} \end{bmatrix}, \text{ on } \beta \in \mathbf{GL}(g,\mathbb{Z});$$

pertanyen a $\mathbf{Sp}(2g,\mathbb{Z})$ i les dues primeres famílies proporcionen un sistema de generadors per a aquest grup. En particular,

$$\mathbf{Sp}(2g,\mathbb{Z}) \subseteq \mathbf{SL}(2g,\mathbb{Z}).$$

A més d'aquests grups, necessitarem els grups simplèctics i els grups de semblances simplèctiques associats a un tipus. Es defineixen com segueix:

$$\mathbf{Sp}_D(2g,\mathbb{R}) = \left\{ M \in \mathbf{M}(2g,\mathbb{R}) : M \begin{bmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{bmatrix} {}^tM = \begin{bmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{bmatrix} \right\},$$

$$\mathbf{GSp}_D(2g,\mathbb{R}) = \left\{ M \in \mathbf{M}(2g,\mathbb{R}) : M \begin{bmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{bmatrix} {}^tM = n \begin{bmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

La seva acció en $\mathcal{H}_g$ és donada per

$$M\langle Z\rangle := (aZ+bD)(D^{-1}cZ+D^{-1}dD)^{-1}, \quad Z \in \mathcal{H}_g.$$

El subgrup principal de congruència de nivell N de $\mathbf{Sp}_D(2g,\mathbb{Z})$ es defineix com

$$\Gamma_D[N] :=$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbf{Sp}_D(2g,\mathbb{Z}) : a - \mathrm{I}_g \equiv b \equiv c \equiv d - \mathrm{I}_g \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, N) \right\}.$$

4.3 Funcions $2g$-periòdiques i funcions theta

Considerem, d'acord amb Riemann, funcions theta amb característiques ${}^ta, {}^tb \in \mathbb{R}^g$:

$$\vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (u,Z) := \sum_{m \in a+\mathbb{Z}^g} \exp(\pi i({}^tmZm + 2{}^tm(u+b))),$$

on $u \in \mathbb{C}^g, Z \in \mathcal{H}_g$. Quan $a = b = 0$, escriurem $\vartheta(u, Z)$ per designar la funció corresponent.

La consideració de nivells permet ampliar el conjunt de funcions theta. En general, les funcions theta amb característiques i nivell

$$\vartheta_N^{(\alpha)} \left[\begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right] (u, Z)$$

satisfan les relacions

$$\vartheta_N^{(\alpha)} \left[\begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right] (u + m, Z) = \exp(2\pi i^t am) \vartheta_N^{(\alpha)} \left[\begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right] (u, Z),$$

$$\vartheta_N^{(\alpha)} \left[\begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right] (u + Zm, Z) =$$
$$\exp(-\pi i N^t mZm - 2\pi i N^t bu + 2\pi i^t mb) \vartheta_N^{(\alpha)} \left[\begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right] (u, Z).$$

Aquestes relacions permeten deduir la proposició següent.

4.3.1 Proposició. *El quocient de dues funcions theta del mateix mòdul Z, el mateix nivell N i les mateixes característiques:*

$$Q(u) = \frac{\vartheta_N^{(1)} \left[\begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right] (u, Z)}{\vartheta_N^{(2)} \left[\begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right] (u, Z)}$$

és una funció periòdica de períodes $\Lambda = Z\mathbb{Z}^g + \mathbb{Z}^g$.

Ara podem formular la pregunta natural:

Donat un subgrup discret $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^{2g}$ de $\mathbb{C}^g$, tota funció meromorfa $f : \mathbb{C}^g \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ que satisfaci

$$f(u + \lambda) = f(u), \qquad \text{per a tot } u \in \mathbb{C}^g, \quad \lambda \in \Lambda,$$

és quocient de funcions theta?

Per respondre la pregunta afirmativament, els clàssics arribaren a la conclusió que calia que existís una forma alternada E sobre Λ satisfent certes condicions restrictives (cf. Teorema 4.3.2). Aleshores, la forma hermítica H construïda a partir de E permet la definició de les funcions theta amb nivell que resolen el problema (cf. Teorema 4.3.4).

El teorema següent dóna compte de les relacions de Riemann:

4.3.2 Teorema. (cf. [Kra03], [Lan-Bir92])

Siguin $\mathbb{C}^g = \langle e_1, \cdots, e_g \rangle$, $\Lambda = \langle \lambda_1, \ldots, \lambda_{2g} \rangle$, $\lambda_i = \sum_{j=1}^{g} \lambda_{i,j} e_j$.

Considerem la matriu:

$$\Pi = (\Pi_1, \Pi_2) = \begin{bmatrix} \lambda_{1,1} & \ldots & \lambda_{2g,1} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{1,g} & \ldots & \lambda_{2g,g} \end{bmatrix} \in \mathbf{M}(g \times 2g, \mathbb{C}).$$

Suposem que $f : \mathbb{C}^g \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ és una funció meromorfa no constant de xarxa de períodes $\Lambda = \Pi \mathbb{Z}^{2g}$. Aleshores, existeix una forma

$$E : \mathbb{C}^g \times \mathbb{C}^g \to \mathbb{C},$$

$\mathbb{R}$-bilineal, alternada, de matriu A referida a una base de Λ:

$$A = (a_{i,j}) \in \mathbf{M}(2g, \mathbb{Z}), \quad a_{i,i} = 0, \quad a_{i,j} = -a_{i,j},$$

tal que

(i) $\Pi A^{-1\,t}\Pi = 0$,

(ii) $i\Pi A^{-1\,t}\overline{\Pi} \geq 0$.

La fórmula $H(u,v) = E(iu,v) + iE(u,v)$ proporciona una forma $\mathbb{R}$-bilineal sobre $\mathbb{C}^g$. La relació (i) garanteix que H és una forma hermítica. La relació (ii), que H és positiva, atès que H té per matriu $2i(\overline{\Pi}A^{-1\,t}\Pi)^{-1}$. Si E és de tipus D i la matriu A és referida a una base canònica, les relacions de Riemann són

(i) $\Pi_2 D^{-1\,t}\Pi_1 - \Pi_1 D^{-1\,t}\Pi_2 = 0$,

(ii) $i\Pi_2 D^{-1\,t}\overline{\Pi}_1 - i\Pi_1 D^{-1\,t}\overline{\Pi}_2 \geq 0$.

4.3.3 Definició. Sigui $\mathbb{C}^g/\Lambda$ un tor complex. Tota forma hermítica positiva H sobre $\mathbb{C}^g$ per a la qual $E = \mathrm{Im}(H)$ és una forma alternada i $\mathbb{Z}$-valorada sobre Λ s'anomena una forma de Riemann respecte de Λ. Si E és de tipus D respecte de Λ, H s'anomena de tipus D. Si $\det(D) \neq 0$, la forma de Riemann es diu no degenerada i H és definida positiva. En aquest cas, H s'anomena, també, una polarització de Λ. Quan $D = (1, \ldots, 1)$, la polarització es diu que és principal.

4.3.4 Teorema. (cf. [Kra03]) Suposem donada una xarxa $\Lambda \subseteq \mathbb{C}^g$ dotada d'una forma de Riemann de tipus D. Aleshores,

(i) El cos $\mathbb{C}(\Lambda)$ de les funcions meromorfes de g variables complexes i de xarxa de períodes Λ és finitament generat i satisfà $\operatorname{gr}\operatorname{tr}[\mathbb{C}(\Lambda):\mathbb{C}] \leq g$. Escrivim

$$\Lambda \simeq Z\mathbb{Z}^g + D\mathbb{Z}^g, \quad D = \operatorname{diag}[e_1 \dots e_g], \quad e_1|\dots|e_g.$$

(ii) Existeix un enter N tal que tot element de $\mathbb{C}(\Lambda)$ és quocient de dues funcions theta G_1, G_2 de nivell N, de la forma

$$G(u) = \sum_{\kappa_1=0}^{q_1-1} \cdots \sum_{\kappa_g=0}^{q_g-1} C_{\kappa_1,\dots,\kappa_g}\, \vartheta \begin{bmatrix} \frac{a+\kappa}{q} \\ b \end{bmatrix} (Nu, NZ), \quad u \in \mathbb{C}^g,$$

on $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_g)$, $q_1 = \dfrac{N}{e_1}, \dots, q_g = \dfrac{N}{e_g}$, $q = (q_1, \dots, q_g)$.

4.4 Les fórmules de transformació

Exposarem en aquesta secció algunes fórmules de transformació de les funcions theta sota l'acció del grup simplèctic modular $\mathbf{Sp}(2g,\mathbb{Z})$ i del grup modular de semblances simplèctiques $\mathbf{GSp}(2g,\mathbb{Z})$. En els llibres clàssics, les semblances simplèctiques de raó n del grup modular s'anomenen *ganzzahlige Transformationen n^{ter} Ordnung.* Notem que per a una semblança simplèctica T de raó n és $\det(T) = n^g$.

4.4.1 Teorema. (cf. [Kra03], [Lan-Bir92]) Siguin $(u, Z) \in \mathbb{C}^g \times \mathcal{H}_g$, ${}^t a, {}^t b \in \mathbb{R}^g$, $c = Za + b$. Sigui

$$M = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in \mathbf{Sp}(2g,\mathbb{Z}).$$

Aleshores,

$$\vartheta \begin{bmatrix} M[c]^1 \\ M[c]^2 \end{bmatrix} ({}^t(\gamma Z + \delta)^{-1}u, M\langle Z\rangle) = \kappa(M) \det(\gamma Z + \delta)^{1/2}$$
$$\exp(\pi i\, k(M,a,b) + \pi i {}^t u(\gamma Z + \delta)^{-1}\gamma u)\, \vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (u, Z),$$

on

$$k(M,a,b) = {}^t(\delta a - \gamma b)(-\beta a + \alpha b + (\alpha {}^t\beta)_0) - {}^t ab,$$

$$\kappa(M) \in \mathbb{C}_1 := \{z : |z| = 1\}, \ |\kappa(M)| = 1.$$

El càlcul de la constant $\kappa(M)$ és laboriós. Es tracta d'una arrel vuitena de la unitat. L'acció dels diferents generadors del grup simplèctic posa de manifest que

$$\kappa^2\left(\begin{bmatrix} 0 & \mathrm{I}_g \\ -\mathrm{I}_g & 0 \end{bmatrix}\right) = (-i)^g,$$

$$\kappa^2\left(\begin{bmatrix} \mathrm{I}_g & \alpha \\ 0 & \mathrm{I}_g \end{bmatrix}\right) = 1,$$

$$\kappa^2\left(\begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & {}^t\beta^{-1} \end{bmatrix}\right) = \det\beta = \pm 1.$$

Per obtenir les fórmules de transformació de les funcions theta sota l'acció de $\mathbf{GSp}(2g, \mathbb{Z})$, cal estudiar :

(i) La transformació de la xarxa de períodes Λ per semblances simplèctiques de coeficients enters.

(ii) La transformació de l'argument u i del mòdul Z per una semblança simplèctica de raó n:

$$(u, Z) \rightsquigarrow ({}^t(\gamma Z + \delta)^{-1}u, T\langle Z\rangle = (\alpha Z + \beta)(\gamma Z + \delta)^{-1}).$$

(iii) La transformació de (u, Z) per una composició de semblances simplèctiques de raons n', n''.

(iv) La inversió de semblances simplèctiques. La inversió d'un producte de semblances simplèctiques.

(v) Sistemes de representants de les classes de semblances simplèctiques enteres de raó n mòdul les de raó 1. En els casos $1 \leq g \leq 3$ s'obtenen representants explícits.

També són remarcables les fórmules per a les semblances enteres T_p de raó p primer (cf. [Kra03]).

Un cop desenvolupats aquests aspectes, es pot enunciar l'acció de les semblances simplèctiques enteres sobre les funcions theta. La resumim en el teorema 4.4.2.

4.4.2 Teorema. (cf. [Kra03]) Sigui T una semblança simplèctica entera de raó n. Siguin (u', Z') els transformats per T de (u, Z). Aleshores,

$$\vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(u, Z) = \exp(-U) \sum_{i_1,\dots,i_g}^{0,1,\dots,n-1} \kappa_{i_1,\dots,i_g} \vartheta \begin{bmatrix} \dfrac{\widehat{a}+\kappa}{n} \\ \widehat{b} \end{bmatrix}(nu', nZ'),$$

on U, $\widehat{a}, \widehat{b}$ són donats de manera explícita.

El terme de la dreta de la fórmula del teorema correspon a una funció theta de nivell n. Les constants del sumatori només s'obtenen de manera explícita en casos particulars. El cas de raó $n = 1$ és el més senzill. L'enunciat del teorema es particularitza en fórmules

$$\vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(u, Z) = C\exp(-U)\vartheta \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix}(u', Z'),$$

on

$$C = \frac{1}{|\det(\beta)|^{g-1}} \sqrt{\frac{(-\pi)^g}{\det(\beta)\det(\gamma Z + \delta)}}\, G \exp(\pi i \phi(\beta)) \exp(\pi i \psi(a, b)).$$

Aquí G denota una suma de Gauss concreta. Quan $g \leq 2$, la seva avaluació es pot portar a terme en funció de símbols de Legendre. Cal estudiar, també, el comportament de les sumes de Gauss per composició de transformacions enteres. El signe de l'arrel és explícit i depèn, al seu torn, de g signes.

El problema de la multiplicació i de la divisió proporcionen situacions particulars de les fórmules anteriors. En el cas de la multiplicació es té que

$$\vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(u, Z) = \sum_{\kappa_1,\dots,\kappa_g}^{0,1,\dots n-1} \vartheta \begin{bmatrix} \frac{a+\kappa}{n} \\ nb \end{bmatrix}(n^2 u', n^2 Z')$$

on $u'_i = \dfrac{1}{n} u_i$, $Z' = Z$. En el cas de la divisió, un producte de funcions theta avaluades en $(\dfrac{u}{n}, Z)$ coincideix amb una suma de funcions theta avaluades en (u, Z).

En general, les fórmules de transformació s'obtenen a partir de la fórmula de sumació de Poisson (cf. Cap. 3).

4.5 Funcions theta, segons Weil

En aquesta secció adoptem el punt de vista de Weil [We58]. Veurem que les funcions theta en el sentit de Weil coincideixen amb les funcions theta clàssiques amb característiques quan aquestes es completen amb certs factors exponencials. Les característiques donen lloc als semicaràcters de la teoria de Weil.

4.5.1 Definició. Sigui $\Lambda \subseteq \mathbb{C}^g$ un subgrup discret de rang $2g$. Una funció meromorfa f definida en $\mathbb{C}^g$ s'anomena una funció theta de Weil respecte de Λ si satisfà

$$f(u+\lambda) = f(u)\exp(2\pi i(L_\lambda(u)+c_\lambda)), \qquad \text{per a tot } \lambda \in \Lambda,$$

on L_λ és una $\mathbb{C}$-forma lineal sobre $\mathbb{C}^g$ i $c_\lambda \in \mathbb{C}$ és una constant.

Veurem com construir funcions theta de Weil a partir de funcions theta clàssiques.

4.5.2 Definició. Sigui H una forma hermítica de $\mathbb{C}^g$ tal que la seva part imaginària pren valors enters sobre una xarxa $\Lambda \subseteq \mathbb{C}^g$. Un semicaràcter de tipus H és una aplicació

$$\psi : \Lambda \to \mathbb{C}_1 := \{z : |z| = 1\}$$

tal que

$$\psi(\lambda+\mu) = \psi(\lambda)\,\psi(\mu)\exp(\pi i\,\mathrm{Im}(H(\lambda,\mu))),$$

per a $\lambda, \mu \in \Lambda$.

4.5.3 Proposició. *Tota funció theta de Weil f relativa a un tor complex $\mathbb{C}^g/\Lambda$ satisfà*

$$f(u+\lambda) = f(u)\times$$

$$\psi(\lambda)\exp\left(\pi H(\lambda,u) + \tfrac{\pi}{2}H(\lambda,\lambda) + \pi\Phi(\lambda,u) + \tfrac{\pi}{2}\Phi(\lambda,\lambda) + 2\pi i L(\lambda)\right),$$

on H és una forma hermítica tal que $\mathrm{Im}(H)(\Lambda\times\Lambda) \subset \mathbb{Z}$, Φ és una $\mathbb{C}$-forma bilineal simètrica, anomenada el calibrador de Weil, ψ és un semi-caràcter de tipus H i L és una forma lineal.

Designem per $T(H,\psi,\Phi,L,\Lambda)$ el $\mathbb{C}$-espai vectorial de les funcions theta holomorfes i per $T(H,\psi,\Lambda)$ el $\mathbb{C}$ -espai vectorial de les funcions theta holomorfes i reduïdes; és a dir, tals que $\Phi = 0, L = 0$.

Si $f \in T(H,\psi,\Lambda)$ és una funció no nul·la, aleshores la forma hermítica H és positiva.

A partir de les funcions theta amb característiques

$$\vartheta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(u,Z)=\sum_{m\in a+\mathbb{Z}^g}\exp(\pi i({}^t mZm+2{}^t m(u+b))),$$

es defineixen les funcions theta amb factor exponencial

$$\widetilde{\vartheta}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(u,Z):=\exp(\pi i({}^t u(Z-\overline{Z})^{-1}u))\vartheta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(u,Z).$$

Recordem que $(u,Z)\in\mathbb{C}^g\times\mathcal{H}_g,\ {}^t r,{}^t s\in\mathbb{R}^g$. Les relacions

$$\vartheta\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}(u+Za+b,Z)=$$

$$\exp(2\pi i(-\tfrac{1}{2}.{}^t aZa-{}^t a(u+b+s))\vartheta\begin{bmatrix} r+a \\ s+b \end{bmatrix}(u,Z)=$$

$$\exp(2\pi i(-\tfrac{1}{2}.{}^t aZa-{}^t au+{}^t rb-{}^t sa))\vartheta\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}(u,Z);$$

$$\vartheta\begin{bmatrix} r+a \\ s+b \end{bmatrix}(u,Z)=\exp(2\pi i({}^t rb))\vartheta\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}(u,Z)=$$

$$\vartheta\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}(u+b,Z);$$

$$\vartheta\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}(-u,Z)=\vartheta\begin{bmatrix} -r \\ -s \end{bmatrix}(u,Z)$$

permeten demostrar la proposició següent.

4.5.4 Proposició. *Fixats $Z\in\mathcal{H}_g,\ {}^t a,{}^t b\in\mathbb{R}^g$, la funció theta amb característiques i factor exponencial*

$$\widetilde{\vartheta}(u):=\exp(\pi i({}^t u(Z-\overline{Z})^{-1}u))\vartheta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(u,Z)$$

pertany a l'espai $T(H,\psi,\Lambda(Z,D))$. És, per tant, una funció theta de Weil. La forma hermítica és donada per

$$H(u,v)=2i{}^t u\,(Z-\overline{Z})^{-1}\overline{v}.$$

El semicaràcter és donat per

$$\psi(Zr+Ds)=\exp(\pi i({}^t rDs-2{}^t br+2{}^t aDs)),\quad r,s\in\mathbb{Z}^g.$$

4.5.5 Definició. Un tor complex $\mathbb{C}^n/\Lambda$ és una varietat abeliana si, i només si, admet una forma de Riemann no degenerada.

El teorema següent proporciona les dimensions dels espais de funcions theta holomorfes, en el sentit de Weil, i n'explicita una base.

4.5.6 Teorema. *Sigui $\mathbb{C}^n/\Lambda$ un tor complex dotat d'una forma de Riemann H. Suposem que $\Lambda = \Lambda(Z, D)$. Sigui ψ el semi-caràcter de Λ associat a H. Suposem que ψ és trivial sobre* $\ker H \cap \Lambda$. *Sigui E la forma alternada associada a H. Aleshores,*

$$\dim_{\mathbb{C}} T(H, \psi, \Phi, L, \Lambda) = \mathrm{Pf.\,red.}\,(E).$$

Fixem característiques a, b i sigui R un sistema complet de representants de $D^{-1}\mathbb{Z}^n/\mathbb{Z}^n$. Definim

$$g_j(u) := \widetilde{\vartheta}\begin{bmatrix} a+j \\ b \end{bmatrix}(u, Z), \quad j \in R.$$

Aleshores, $\{g_j\}_{j\in R}$ és una base de $T(H, \psi, \Lambda(Z, D))$ com a $\mathbb{C}$-espai vectorial.

Citem el teorema d'immersió de Lefschetz, que es troba també a [We58].

4.5.7 Teorema. *Sigui $A = \mathbb{C}^n/\Lambda$ una varietat abeliana associada a una forma de Riemann H no degenerada. Sigui ψ un semicaràcter associat a H. Sigui $\{\vartheta_0, \ldots, \vartheta_m\}$ una base de l'espai de les funcions theta holomorfes i reduïdes $T(3H, \psi^3)$. Aleshores,*

(i) *L'aplicació $\vartheta = (\vartheta_0 \colon \ldots \colon \vartheta_m)$ proporciona una immersió de A en una subvarietat algebraica no singular de $\mathbb{P}^m$.*

(ii) *L'aplicació $\varphi \mapsto \varphi \circ \vartheta$ determina un isomorfisme del cos de les funcions racionals de $\vartheta(A)$ en el cos $\mathbb{C}(\Lambda)$ de les funcions meromorfes de A. En altres paraules, tota funció meromorfa i periòdica respecte de $\Lambda = \Lambda(Z, D)$ s'escriu com a quocient de funcions theta:*

$$\frac{P(\vartheta_0(u, Z), \ldots, \vartheta_m(u, Z))}{Q(\vartheta_0(u, Z), \ldots, \vartheta_m(u, Z))},$$

on P, Q són polinomis homogenis del mateix grau.

Bibliografia

[Bak1897] Baker, H. F.: *Abelian Functions.* Cambridge University Press, 1995. Primera ed.: Cambridge University Press, 1897.

[Far-Kra92] Farkas, H. M.; Kra, I.: *Riemann Surfaces.* GTM **71**. Springer, 1992.

[Fou1822] Fourier, J-B. J.: *Théorie analytique de la chaleur.* Paris, 1822.

[Frei91] Freitag, E.: *Singular Modular Forms and Theta Relations.* LNM **1487**. Springer, 1991.

[Ig72] Igusa, K.: *Theta Functions.* GMW **194**. Springer, 1972.

[Ja1829] Jacobi, C. G. J.: *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum*, 1829. Gesammelte Werke Bd. 1. Berlin, 1881.

[Kra03] Krazer, A.: *Lehrbuch der Thetafunktionen.* Chelsea, 1970. Primera ed.: Leipzig, 1903.

[Lan-Bir92] Lange, H.; Birkenhake, C.: *Complex Abelian Varieties.* GMW **302**. Springer, 1992.

[Law98] Lawden, D. F.: *Elliptic Functions and Applications.* Colledge Press, 1998.

[Lef21] Lefschetz, S.: On certain numerical invariants of algebraic varieties with application to abelian varieties. *Trans. Amer. Math. Soc.* **22** no. 3 (1921), 327-406; **22** no. 4 (1921), 407-482.

[Mum83-I] Mumford, D.: *Tata Lectures on Theta I.* Progress in Math. **28**. Birkhäuser, 1983.

[Mum84-II] Mumford, D.: *Tata Lectures on Theta II.* Progress in Math. **43**. Birkhäuser, 1984.

[Mum91-III] Mumford, D. with Nori, M. and Norman, P.: *Tata Lectures on Theta III.* Progress in Math. **97**. Birkhäuser, 1991.

[Poi1884] Poincaré, H.: Sur la réduction des intégrales abéliennes. *Bull. Soc. Mat. France* **12** (1884), 124-143.

[Poi1904] Poincaré, H.: Sur les fonctions abéliennes. *Acta Math.* **26** (1904), 43-98.

[P-P1883] Poincaré, H.; Picard, E.: Sur un théorème de Riemann relatif aux fonctions de n variables indépendentes admettant $2n$ systèmes de périodes. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* **97** (1883), 1284-1287.

[Rie1857] Riemann, B.: *Theorie der Abel'schen Functionen.* Gesammelte mathematische Werke. Teuber, 1892.

[Scor16] Scorza, G.: Intorno alla teoria generale delle matrici di Riemann. *Rend. Circ. Mat. Palermo* **41** (1916), 263-379.

[Shi76] Shimura, G.: Theta Functions with Complex Multiplication. Dedicated to A. Weil for his 70th birthday. *Duke Math. J.* **43** (1976), 673-696.

[Shi98] Shimura, G.: *Abelian Varieties with Complex Multiplication and Modular Functions.* Princeton Mathematical Series **46**. Princeton University Press, 1998.

[Sw-Dy74] Swinnerton-Dyer, H. P. F.: *Analytic Theory of Abelian Varieties.* London Math. Soc., Lecture Notes Series **14**. Cambridge University Press, 1974.

[We58] Weil, A.: *Variétés kähleriennes.* Actualités scientifiques et industrielles **1267**. Hermann, 1971. Primera ed.: Hermann, 1958.

P. Bayer

Dept. d'Àlgebra i Geometria

Universitat de Barcelona

Gran Via de les Corts Catalanes, 585

E-08007, Barcelona

bayer@mat.ub.es

Capítol 5

Funcions theta i varietats abelianes

E. Nart

5.1 Tors complexos

Considerem un $\mathbb{C}$-espai vectorial V de dimensió g i un subgrup $\Lambda \subseteq V$ que sigui un reticle, i.e. $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} V$, o equivalentment, les $\mathbb{Z}$-bases de Λ són també $\mathbb{R}$-bases de V. En particular, Λ té rang finit $2g$.

El quocient $X = V/\Lambda$ és un *tor complex de dimensió g*. Aquest grup X hereta de V una estructura natural de varietat complexa, que el converteix en un grup de Lie complex, connex i compacte.

5.1.1 Proposició. [LB, 1.1] Tot grup de Lie complex, connex i compacte és analíticament isomorf a un tor complex. $\Box$

Denotem per $\mathbb{C}(X)$ el cos de les funcions meromorfes de X. Tenim una identificació natural:

$$\mathbb{C}(X) \simeq \{V \xrightarrow{f} \mathbb{C} \mid f \text{ meromorfa, } \Lambda\text{-periòdica}\}.$$

Aquestes funcions $2g$-periòdiques s'anomenen *funcions abelianes* i contenen com a cas particular les *funcions el·líptiques*, que corresponen a $g = 1$.

5.1.1 Homomorfismes

L'homomorfisme canònic $V \xrightarrow{\pi} X$ identifica V amb el revestiment universal de X i Λ amb $\pi_1(X, 0) \simeq H_1(X, \mathbb{Z})$. Per tant, podem identificar:

$$\operatorname{Hom}(X, X') \simeq \{V \xrightarrow{F} V' \mid F \ \mathbb{C}\text{-lineal},\ F(\Lambda) \subseteq \Lambda'\},$$

on $X' = V'/\Lambda'$ és un altre tor complex i $\operatorname{Hom}(X, X')$ denota el grup de les aplicacions holomorfes $f\colon X \to X'$ que respecten l'estructura de grup. Tenim doncs homomorfismes naturals,

$$\operatorname{Hom}(X, X') \hookrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V'), \qquad \operatorname{Hom}(X, X') \hookrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \Lambda'),$$

que anomenem respectivament *representació analítica* i *representació racional* del grup $\operatorname{Hom}(X, X')$. En particular, $\operatorname{Hom}(X, X')$ és un grup abelià finitament generat.

Conveni. D'ara endavant, per a qualsevol homomorfisme de tors complexos $f\colon X \longrightarrow X'$ denotarem per $F\colon V \longrightarrow V'$ la seva representació analítica.

5.1.2 Proposició. *Sigui $f\colon X \longrightarrow X'$ un homomorfisme entre dos tors complexos de la mateixa dimensió. Aleshores,*

$$f \text{ epimorfisme} \iff \operatorname{Ker}(f) \text{ finit} \iff F \text{ isomorfisme.}$$

Quan se satisfan diem que f és una isogènia de grau $\sharp \operatorname{Ker}(f)$.

DEMOSTRACIÓ: f epimorfisme $\iff F(V) + \Lambda' = V' \iff F(V) = V'$,

ja que si $\dim(F(V)) < \dim(V')$ aleshores V' no pot ser reunió numerable de varietats lineals paral·leles a $F(V)$. D'altra banda,

$\operatorname{Ker}(f) = F^{-1}(\Lambda')/\Lambda$ finit $\iff F^{-1}(\Lambda')$ té rang $2g \iff \operatorname{Ker}(F) = \{0\}$. □

Per exemple, si $n \in \mathbb{Z}$, l'homotècia $V \xrightarrow{n} V$ dóna sempre lloc a una isogènia $X \xrightarrow{n} X$ de grau n^{2g}, ja que $\operatorname{Ker}(n) = \frac{1}{n}\Lambda/\Lambda \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$.

5.1.2 Matrius de períodes

Fixem $\mathcal{B}_V\colon e_1, \ldots, e_g$ una $\mathbb{C}$-base de V i $\mathcal{B}_\Lambda\colon a_1, \ldots, a_{2g}$ una $\mathbb{Z}$-base de Λ. La *matriu de períodes* de X respecte d'aquestes bases és la matriu

$\Pi \in M_{g\times 2g}(\mathbb{C})$ que s'obté posant en columna les coordenades dels a_i respecte de la base $\mathcal{B}_V$. Tenim, doncs,

$$\left(e_1 \cdots e_g\right)\Pi = \left(a_1 \cdots a_{2g}\right).$$

És clar que $\mathrm{GL}_g(\mathbb{C})\Pi\,\mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{Z})$ és el conjunt de possibles matrius de períodes del mateix tor complex.

5.1.3 Lema. *Denotem per $\mathcal{P} \subseteq M_{g\times 2g}(\mathbb{C})$ el subconjunt format per totes les matrius de períodes de tots els tors complexos. Per a qualsevol $\Pi \in M_{g\times 2g}(\mathbb{C})$ les següents condicions són equivalents:*

1. $\Pi \in \mathcal{P}$.
2. *Les columnes de Π són $\mathbb{R}$-linealment independents.*
3. $\left(\dfrac{\mathrm{Re}\,\Pi}{\mathrm{Im}\,\Pi}\right) \in \mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{R})$.
4. $\left(\dfrac{\Pi}{\overline{\Pi}}\right) \in \mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{C})$.

En particular, $\mathcal{P}$ és un obert de $M_{g\times 2g}(\mathbb{C})$.

Demostració: $1 \Longleftrightarrow 2$: Per definició, les columnes d'una matriu de períodes són $\mathbb{R}$-independents. Recíprocament, si es dóna aquesta condició, el subgrup $\Lambda \subseteq \mathbb{C}^g$ generat per les columnes de Π és un reticle i el tor complex $X = \mathbb{C}^g/\Lambda$ té Π per matriu de períodes respecte de la base canònica de $\mathbb{C}^g$ i la $\mathbb{Z}$-base de Λ formada per les pròpies columnes de Π.

$2 \Longleftrightarrow 3$: Sigui $e_1, \ldots, e_g$ la base canònica de $\mathbb{C}^g$. Les columnes de $\left(\dfrac{\mathrm{Re}\,\Pi}{\mathrm{Im}\,\Pi}\right)$ recullen les coordenades de les columnes de Π respecte de la $\mathbb{R}$-base de $\mathbb{C}^g$ formada per: $e_1, \ldots, e_g, ie_1, \ldots, ie_g$.

$3 \Longleftrightarrow 4$: Es passa d'una matriu a l'altra multiplicant per una matriu invertible:

$$\left(\begin{array}{c|c} I & iI \\ \hline I & -iI \end{array}\right)\left(\dfrac{\mathrm{Re}\,\Pi}{\mathrm{Im}\,\Pi}\right) = \left(\dfrac{\Pi}{\overline{\Pi}}\right). \square$$

5.1.4 Lema. *Sigui $f\colon X \longrightarrow X'$ un homomorfisme de tors complexos i siguin Π, Π' matrius de períodes de X, X', en bases respectives $\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_\Lambda; \mathcal{B}_{V'}, \mathcal{B}_{\Lambda'}$. Aleshores, les matrius $A = M(F; \mathcal{B}_V, \mathcal{B}_{V'})$ i $R = M(F_{|\Lambda}; \mathcal{B}_\Lambda, \mathcal{B}_{\Lambda'})$, de les representacions analítica i racional de f satisfan: $A\Pi = \Pi' R$.*

Demostració:

$$\left(e'_1 \cdots e'_{g'}\right) A\Pi = \left(f(a_1) \cdots f(a_{2g})\right) = \left(a'_1 \cdots a'_{2g'}\right) R = \left(e'_1 \cdots e'_{g'}\right) \Pi' R. \square$$

5.1.5 Corol·lari. *Amb les mateixes notacions, si $f\colon X \longrightarrow X$ és un endomorfisme:*

$$\left(\begin{array}{c} \Pi \\ \hline \overline{\Pi} \end{array}\right)^{-1} \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & \overline{A} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \Pi \\ \hline \overline{\Pi} \end{array}\right) = R. \square$$

La varietat complexa $\mathcal{P}$ parametritza les classes d'isomorfia de tripletes $(X, \mathcal{B}_V, \mathcal{B}_\Lambda)$. A cada tripleta li associem una matriu de períodes $\Pi \in \mathcal{P}$ i recíprocament, a cada $\Pi \in \mathcal{P}$ li podem associar la tripleta $(\mathbb{C}^g/\Lambda, \mathcal{B}_{can}, \mathcal{B}_\Lambda)$, on Λ és el subgrup generat per les columnes de Π i $\mathcal{B}_\Lambda$ la $\mathbb{Z}$-base formada per aquestes mateixes columnes. Pel Lema 5.1.4, dues tripletes són isomorfes si i només si tenen la mateixa matriu de períodes. En efecte, un isomorfisme de tripletes té representacions analítica i racional $A = I_g$, $R = I_{2g}$, i per tant $\Pi = \Pi'$. Recíprocament, si dues tripletes tenen la mateixa matriu de períodes, l'isomorfisme entre V i V' que envia una $\mathbb{C}$-base a l'altra, envia automàticament una $\mathbb{Z}$-base en l'altra; en efecte, tindrem $A = I_g$, $\Pi = \Pi R$ i, per tant, $R = I_{2g}$, ja que les columnes de Π són $\mathbb{R}$-independents i les entrades de R són reals.

Així doncs, l'espai $\mathrm{GL}_g(\mathbb{C})\backslash\mathcal{P}/\mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{Z})$ parametritza classes d'isomorfisme de tors complexos.

5.1.3 Dualitat

A tot tor complex $X = V/\Lambda$ li podem associar un tor complex dual $\hat{X}$ de la mateixa dimensió. Considerem $\hat{V} := \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$ el $\mathbb{R}$-dual de V amb l'estructura complexa determinada per:

$$(i\lambda)(v) = -\lambda(iv), \quad \forall \lambda \in \hat{V},\ \forall v \in V.$$

Prenem com a reticle les formes $\mathbb{R}$-lineals que prenen valors enters sobre Λ:

$$\hat{\Lambda} := \{\lambda \in \hat{V},\ \lambda(\Lambda) \subseteq \mathbb{Z}\},$$

i definim $\hat{X} = \hat{V}/\hat{\Lambda}$. El fet que $\hat{\Lambda}$ és un reticle es dedueix del següent:

5.1.6 Lema. *La $\mathbb{R}$-base dual de qualsevol $\mathbb{Z}$-base de Λ és una $\mathbb{Z}$-base de $\hat{\Lambda}$.*

Demostració: Sigui $a_1, \ldots, a_{2g}$ una $\mathbb{Z}$-base de Λ i $\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_{2g}$ la seva $\mathbb{R}$-base dual. Els $\hat{a}_i$ pertanyen a $\hat{\Lambda}$, ja que prenen valors enters sobre els a_j.

També generen $\hat{\Lambda}$, ja que tot $\lambda \in \hat{\Lambda}$ es pot expressar: $\lambda = \lambda(a_1)\hat{a}_1 + \cdots + \lambda(a_{2g})\hat{a}_{2g}$. □

5.1.7 Proposició. *L'isomorfisme canònic* $V \underset{\sim}{\xrightarrow{b}} \hat{\hat{V}}$ *indueix un isomorfisme canònic de tors complexos* $X \underset{\sim}{\longrightarrow} \hat{\hat{X}}$.

Demostració: Comprovem que b és $\mathbb{C}$-lineal:

$$b(iv)(\lambda) = \lambda(iv) = -(i\lambda)(v) = -b(v)(i\lambda) = (ib(v))(\lambda).$$

El fet que $b(\Lambda) = \hat{\hat{\Lambda}}$ es dedueix del lema anterior. □

De manera completament anàloga provaríem el caràcter functorial del pas al dual. Qualsevol homomorfisme $f\colon X \longrightarrow X'$ determina, via considerar l'aplicació $\mathbb{R}$-dual, $\hat{F}\colon \hat{V}' \longrightarrow \hat{V}$, un homomorfisme dual $\hat{f}\colon \hat{X}' \longrightarrow \hat{X}$ de tors complexos.

5.1.8 Proposició. *El pas al dual determina un functor contravariant exacte de la categoria dels tors complexos en ella mateixa. Aquest functor aplicat dues vegades és naturalment equivalent a la identitat.*□

Tot homomorfisme de tors complexos, $f\colon X \longrightarrow X'$, dóna lloc a un aparellament:

$$\operatorname{Ker}(f) \times \operatorname{Ker}(\hat{f}) \longrightarrow \mathbb{C}_1, \quad (v, \lambda') \mapsto \exp(2\pi i \lambda'(F(v))),$$

on $\mathbb{C}_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. En efecte,

$$(F(v) \in \Lambda',\ \lambda' \in \hat{\Lambda}') \text{ ó } (\hat{F}(\lambda') \in \hat{\Lambda},\ v \in \Lambda) \Longrightarrow \lambda'(F(v)) \in \mathbb{Z}.$$

5.1.9 Proposició. *Si f és una isogènia, aquest aparellament és perfecte.*

En particular, $\deg(f) = \deg(\hat{f})$.

Demostració: Com que F i $\hat{F}$ són isomorfismes,

$$\begin{aligned}
\lambda'(F(v)) \in \mathbb{Z},\ \forall v \in F^{-1}(\Lambda') \quad &\Longleftrightarrow \quad \lambda'(v') \in \mathbb{Z},\ \forall v' \in \Lambda' \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda' \in \hat{\Lambda}',\\
\lambda'(F(v)) \in \mathbb{Z},\ \forall \lambda' \in \hat{F}^{-1}(\hat{\Lambda}) \quad &\Longleftrightarrow \quad \lambda(v) \in \mathbb{Z},\ \forall \lambda \in \hat{\Lambda} \quad \Longleftrightarrow \quad v \in \Lambda,
\end{aligned}$$

la darrera equivalència, conseqüència del Lema 5.1.6. □

5.1.10 Proposició. *L'homomorfisme* $\hat{V} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \mathbb{C}_1)$ *tal que* $\lambda \mapsto \exp(2\pi i \lambda(-))$*, determina un isomorfisme canònic i functorial entre* $\hat{X}$ *i* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \mathbb{C}_1)$*.*

Demostració: De la successió exacta:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R} \stackrel{\exp(2\pi i -)}{\longrightarrow} \mathbb{C}_1 \longrightarrow 0,$$

deduïm, prenent $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, -)$, una altra successió exacta:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \mathbb{C}_1) \longrightarrow 0,$$

i a través de la identificació natural $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \mathbb{R}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R}) = \hat{V}$, el subgrup $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \mathbb{Z})$ es correspon amb $\hat{\Lambda}$.

La functorialitat fa referència a la commutativitat del diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \hat{X} & \underset{\sim}{\longrightarrow} & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \mathbb{C}_1) \\ \hat{f} \uparrow & & \uparrow F^* \\ \hat{X}' & \underset{\sim}{\longrightarrow} & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda', \mathbb{C}_1), \end{array}$$

per a tot homomorfisme $f\colon X \longrightarrow X'$. La comprovació és immediata. □

5.1.4 Àlgebra hermitiana

Una *forma hermitiana* sobre V és un aparellament,

$$H\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{C},$$

que és $\mathbb{C}$-lineal sobre la primera variable i satisfà $H(v, u) = \overline{H(u, v)}$, per a tot $(u, v) \in V \times V$. En particular, és $\mathbb{C}$-antilineal respecte de la segona variable i $H(u, u) \in \mathbb{R}$ per a tot $u \in V$.

En coordenades respecte d'una $\mathbb{C}$-base de V, vindria donada per:

$$(u, v) \mapsto u^t H \overline{v}, \quad H \in M_g(\mathbb{C}), \quad \overline{H}^t = H,$$

pensant les coordenades dels vectors com a matrius-columna.

D'ara endavant, sempre que tinguem una forma hermitiana sobre un $\mathbb{C}$-e.v. denotarem per $E = \mathrm{Im}\, H$ la seva part imaginària. La forma $\mathbb{R}$-bilineal,

$$E\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{R},$$

és alternada ($E(u,u) = 0$ ja que $H(u,u) \in \mathbb{R}$) i invariant per i ($E(iu, iv) = E(u,v)$ ja que $H(iu, iv) = H(u,v)$). Les formes H i E es determinen l'una a l'altra per:

$$H(u,v) = E(iu,v) + iE(u,v).$$

A més a més, $\mathrm{rad}(H) = \mathrm{rad}(E)$. En particular,

$$H \text{ no-degenerada sii } E \text{ no-degenerada.}$$

En coordenades, la relació entre H i E es tradueix en:

5.1.11 Lema. *Sigui H la matriu d'una forma hermitiana sobre V, respecte de la $\mathbb{C}$-base $e_1, \dots, e_g$. Aleshores la matriu de E respecte de la $\mathbb{R}$-base $e_1, \dots, e_g$, $ie_1, \dots, ie_g$ és:*

$$\left(\begin{array}{c|c} \operatorname{Im} H & -\operatorname{Re} H \\ \hline \operatorname{Re} H & \operatorname{Im} H \end{array}\right)$$

Demostració: $(E(e_j, e_k)) = (E(ie_j, ie_k)) = \operatorname{Im} H$, $(E(ie_j, e_k)) = \operatorname{Re} H$,

$$(E(e_j, ie_k)) = -\operatorname{Re} H^t = -\operatorname{Re} H, \text{ ja que } \operatorname{Re} H \text{ és simètrica.} \quad \square$$

Grup de Néron-Severi

El *grup de Néron-Severi* d'un tor complex $X = V/\Lambda$ és:

$$\mathrm{NS}(X) := \{H \text{ f. hermitiana sobre } V \mid E(\Lambda \times \Lambda) \subseteq \mathbb{Z}\}.$$

L'operació de grup ve donada per la suma de formes hermitianes.

Una *polarització* de X és una $H \in \mathrm{NS}(X)$ definida positiva. Denotem el conjunt de les polaritzacions per:

$$\mathrm{NS}^+(X) := \{H \in \mathrm{NS}(X) \mid H > 0\} \subseteq \mathrm{NS}(X).$$

Clarament, $\mathrm{NS}(X)$ és un grup abelià finitament generat (isomorf a un subgrup additiu de $M_{2g}(\mathbb{Z})$ via fixar una base de Λ). Les polaritzacions formen un submonoide de $\mathrm{NS}(X)$ que no té una estructura massa clara. De fet, per a la immensa majoria de tors complexos és el conjunt buit.

5.1.12 Proposició. *Si $H \in \mathrm{NS}(X)$, existeix una $\mathbb{Z}$-base $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$ de Λ tal que la matriu de E en aquesta base és:*

$$J_D := \left(\begin{array}{c|c} 0 & D \\ \hline \text{-}D & 0 \end{array}\right), \quad D = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_g),$$

amb $d_1 \mid \cdots \mid d_g$ enters no-negatius (positius si E no-degenerada). La matriu D està unívocament determinada i s'anomena el tipus de E (o de H).

Les bases amb aquesta propietat s'anomenen bases E-simplèctiques de Λ.

Demostració: Si $E = 0$ la Proposició és trivial. Si $E \neq 0$, considerem $a_1, b_1 \in \Lambda$ tals que $m = E(a_1, b_1)$ és mínim entre els valors positius de E. Clarament, $E(\Lambda, \Lambda) = m\mathbb{Z}$ i tot element $\ell \in \Lambda$ satisfà:

$$\ell - \frac{E(a_1,\ell)}{m} b_1 - \frac{E(\ell, b_1)}{m} a_1 \in \left\langle a_1, b_1 \right\rangle^{\perp}.$$

A més, aquesta expressió és única, de manera que $\Lambda = \mathbb{Z}a_1 \oplus \mathbb{Z}b_1 \oplus \left\langle a_1, b_1 \right\rangle^{\perp}$. Iterant el procediment amb $E_{|\langle a_1, b_1 \rangle^{\perp}}$ construïm una base simplèctica.

La matriu de E en qualsevol $\mathbb{Z}$-base de Λ és $P^t J_D P$, amb $P \in \mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{Z})$. Per tant, totes aquestes matrius tenen els mateixos divisors elementals:

$$d_1 \mid d_1^2 \mid d_1^2 d_2 \mid d_1^2 d_2^2 \mid \cdots \mid d_1^2 \cdots d_{g-1}^2 d_g \mid d_1^2 \cdots d_{g-1}^2 d_g^2,$$

i per tant la família $d_1, \ldots, d_g$ és un invariant de E. $\Box$

5.2 Fibrats de línia sobre tors complexos

Fixem un tor complex X i denotem per $\mathcal{O}_X$ el feix de les funcions holomorfes sobre X. Un *feix invertible* sobre X és un $\mathcal{O}_X$-mòdul localment lliure de rang 1. Les classes d'isomorfisme de feixos invertibles formen un grup amb l'operació $\otimes$; és l'anomenat *grup de Picard*:

$$\mathrm{Pic}(X) = (\text{feixos invertibles/isom}, \otimes).$$

Una *funció theta* sobre X és una secció global d'un feix invertible. Abans d'ocupar-nos d'aquestes seccions globals, determinarem l'estructura de $\mathrm{Pic}(X)$.

5.2.1 Dades d'Appell-Humbert

Donem primer una interpretació de $\mathrm{Pic}(X)$ en termes de cohomologia de grups. Considerem el grup abelià multiplicatiu de les funcions holomorfes sobre V que no s'anul·len enlloc:

$$\mathcal{O}^*(V) := \{h \colon V \longrightarrow \mathbb{C}^* \mid h \text{ holomorfa}\}.$$

Dotem $\mathcal{O}^*(V)$ d'estructura de Λ-mòdul, fent operar els elements de Λ per translació:

$$(a \cdot h)(u) = h(u+a), \quad \forall a \in \Lambda, \forall u \in V, \forall h \in \mathcal{O}^*(V).$$

Recordem la definició del primer grup de cohomologia del grup Λ amb coeficients en $\mathcal{O}^*(V)$ com a 1-cocicles mòdul 1-covores:

$$\begin{aligned}
&H^1(\Lambda, \mathcal{O}^*(V)) := Z^1(\Lambda, \mathcal{O}^*(V))/B^1(\Lambda, \mathcal{O}^*(V)),\\
&Z^1(\Lambda, \mathcal{O}^*(V)) := \{(A_a) \in \mathrm{Apl}(\Lambda, \mathcal{O}^*(V)) \mid A_{a+b} = (b \cdot A_a)A_b,\ \forall a, b \in \Lambda\},\\
&B^1(\Lambda, \mathcal{O}^*(V)) := \{(h/(a \cdot h)) \in \mathrm{Apl}(\Lambda, \mathcal{O}^*(V)) \mid h \in \mathcal{O}^*(V)\}.
\end{aligned}$$

Cada 1-cocicle (A_a) es pot considerar com una família de factors d'automorfia que dóna lloc a un feix invertible L_A que assigna a cada obert U de X el $\mathcal{O}_X(U)$-mòdul:

$$\begin{aligned}
L_A(U) = \{\pi^{-1}(U) \xrightarrow{\theta} \mathbb{C} \mid \theta \text{ holomorfa},&\\
\theta(u+a) = A_a(u)\theta(u), \quad \forall a \in \Lambda, \forall u \in \pi^{-1}(U)\}.&
\end{aligned}$$

Dos 1-cocicles cohomòlegs donen lloc a feixos isomorfs:

5.2.1 Lema. *Siguin $(A_a) \in Z^1(\Lambda, \mathcal{O}^*(V))$, $h \colon V \longrightarrow \mathbb{C}^*$ holomorfa i $(A'_a) = (A_a \frac{h(-)}{h(-+a)})$. Aleshores, multiplicar per h determina un isomorfisme de $\mathcal{O}_X$-mòduls entre $L_{A'}$ i L_A:*

$$L_{A'}(U) \xrightarrow[\sim]{} L_A(U), \qquad \theta \mapsto h\theta. \square$$

Tenim, doncs, un homomorfisme ben definit: $H^1(\Lambda, \mathcal{O}^*(V)) \to \mathrm{Pic}(X)$.

5.2.2 Proposició. *L'aplicació $(A_a) \mapsto L_A$ determina un isomorfisme:*

$$H^1(\Lambda, \mathcal{O}^*(V)) \xrightarrow[\sim]{} \mathrm{Pic}(X).$$

Demostració: Cada 1-cocicle (A_a) dóna lloc a un 1-cocicle de Čech de manera natural. Prenem un recobriment per oberts, $X = \cup_{i \in I} U_i$, amb els U_i prou petits perquè hi hagi oberts connexos $W_i \subseteq \pi^{-1}(U_i)$ que s'apliquen biholomorfament sobre U_i per la projecció canònica π. Per a cada parell (i,j) tal que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, hi ha un únic $a_{ij} \in \Lambda$ tal que:

$$\pi^{-1}(U_i \cap U_j) \cap W_j = a_{ij} + \left(\pi^{-1}(U_i \cap U_j) \cap W_i\right).$$

Prenent $a_{ij} = 0$ si $U_i \cap U_j = \emptyset$, els a_{ij} satisfan:

$$a_{ij} + a_{jk} = a_{ik}, \quad \forall i, j, k \in I.$$

Per tant, si definim $f_{ij} \colon U_i \cap U_j \longrightarrow \mathbb{C}$ per:

$$A_{a_{ij}} \colon W_i \underset{\sim}{\xrightarrow{\pi}} U_i \xrightarrow{f_{ij}} \mathbb{C},$$

obtenim un 1-cocicle de Čech.

Deixem com a exercici comprovar que així es determina un isomorfisme:

$$H^1(\Lambda, \mathcal{O}^*(V)) \xrightarrow{\sim} H^1(X, \mathcal{O}_X^*), \tag{5.1}$$

i que a través de l'isomorfisme canònic $H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(X)$ el feix associat a aquest 1-cocicle de Čech és isomorf a L_A. $\square$

Més generalment, per a qualsevol varietat complexa X amb revestiment universal $\tilde{X}$, aquesta construcció determina un isomorfisme

$$H^1(\pi_1(X), H^0(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}^*)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}\left(H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \longrightarrow H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}^*)\right).$$

En el nostre cas, $H^1(V, \mathcal{O}_V^*) = 0$ i obtenim l'isomorfisme (5.1).

Veurem a continuació que hi ha una manera canònica de triar un 1-cocicle de cada classe de $H^1(\Lambda, \mathcal{O}^*(V))$ i parametritzar aquesta tria amb uns elements força computables, les anomenades *dades d'Appell-Humbert*.

Definició. Donat $H \in \mathrm{NS}(X)$, un *H-semicaràcter* és una aplicació, $\Lambda \xrightarrow{\alpha} \mathbb{C}_1$ que satisfà:

$$\alpha(a+b) = \alpha(a)\alpha(b)(-1)^{E(a,b)}, \ \forall a, b \in \Lambda. \tag{5.2}$$

Tot $H \in \mathrm{NS}(X)$ admet H-semicaràcters. De fet, per a una elecció arbitrària d'imatges a $\mathbb{C}_1$ d'una $\mathbb{Z}$-base de Λ, la relació (5.2) determina unívocament un H-semicaràcter.

Denotem per $\mathrm{AH}(X)$ el *grup de dades d'Appell-Humbert*. És el conjunt de tots els parells (α, H), on $H \in \mathrm{NS}(X)$ i α és un H-semicaràcter. L'operació de grup ve donada per:

$$(\alpha, H)(\alpha', H') = (\alpha\alpha', H + H').$$

Tenim una successió exacta evident:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \mathbb{C}_1) & \longrightarrow & \mathrm{AH}(X) & \longrightarrow & \mathrm{NS}(X) & \longrightarrow 0 \\ & (\alpha, 0) & & (\alpha, H) & & H & \end{array}$$

5.2.3 Proposició. [LB, 2.2] L'aplicació,

$\mathrm{AH}(X) \longrightarrow Z^1(\Lambda, \mathcal{O}^*(V))$

$(\alpha, H) \mapsto A_a(u) = \alpha(a)\exp(\pi H(u,a) + \frac{\pi}{2}H(a,a))$, determina un isomorfisme $\mathrm{AH}(X) \xrightarrow{\sim} H^1(\Lambda, \mathcal{O}^*(V))$.

Ajuntant les Proposicions 5.2.2 i 5.2.3 obtenim una visió força concreta de l'estructura de $\mathrm{Pic}(X)$.

5.2.4 Teorema. (Appell-Humbert) *Hi ha un isomorfisme canònic entre* $\mathrm{AH}(X)$ *i* $\mathrm{Pic}(X)$*, que encaixa en el diagrama commutatiu de successions exactes:*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \mathbb{C}_1) & \longrightarrow & \mathrm{AH}(X) & \longrightarrow & \mathrm{NS}(X) & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow\wr & & \downarrow\wr & & \| & \\ 0 \longrightarrow & \mathrm{Pic}^0(X) & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(X) & \xrightarrow{c_1} & \mathrm{NS}(X) & \longrightarrow 0 & .\square \end{array}$$

El subgrup $\mathrm{Pic}^0(X)$ de $\mathrm{Pic}(X)$ està constituït, per definició, per les classes de feixos invertibles analíticament equivalents a $\mathcal{O}_X$. Un feix L, doncs, pertany a $\mathrm{Pic}^0(X)$ si existeixen una varietat complexa T, un feix invertible $\mathcal{L}$ sobre $X \times T$ i punts $t_0, t_1 \in T$ de manera que $\mathcal{L}_{t_1} \simeq L$ i $\mathcal{L}_{t_0} \simeq \mathcal{O}_X$. L'homomorfisme c_1 és la primera classe de Chern, via reinterpretar $\mathrm{NS}(X)$ com un cert subgrup de $H^2(X, \mathbb{Z})$ [LB, 2.1]. El teorema d'Appell-Humbert dóna també, doncs, una identificació entre $\mathrm{NS}(X)$ i el grup de classes de feixos invertibles mòdul equivalència analítica.

D'ara endavant, identificarem:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Pic}(X) = \mathrm{AH}(X), \\ &\mathrm{Pic}^H(X) := c_1^{-1}(H) = \{(\alpha, H) \mid \alpha\ H\text{-semicaràcter}\}, \\ &\mathrm{Pic}^0(X) = \{(\alpha, 0),\ \alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \mathbb{C}_1)\} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \mathbb{C}_1) \simeq \hat{X}\ . \end{aligned}$$

Donat $L = (\alpha, H) \in \mathrm{Pic}(X)$, sovint abusarem del llenguatge i denotarem també per L el feix invertible sobre X associat a l'1-cocicle $(A_a)_{a\in\Lambda}$ canònicament associat a les dades d'Appell-Humbert (α, H) (Proposicions 5.2.2 i 5.2.3). A la secció següent obtindrem descripcions explícites, en termes de les dades (α, H), dels espais $H^0(X, L)$ de funcions theta associades a feixos invertibles. D'entrada, és molt senzill traduir en termes de les dades d'Appell-Humbert les operacions més usuals entre feixos invertibles:

5.2.5 Lema. *Si* $X' \xrightarrow{f} X$ *és un homomorfisme de tors complexos,*

$$f^*(\alpha, H) = (F^*\alpha, F^*H).$$

Si $X \xrightarrow{t_x} X$ *és la translació per* $x \in X$*,*

$$t_x^*(\alpha, H) = (\alpha \exp(2\pi i E(x, -)), H),$$

on x *denota també qualsevol aixecament a* V*.*

Demostració: Fent operar f^* sobre les seccions globals veiem que $f^*(L)$ té factors d'automorfia $(B_b = F^*(A_{F(b)}))_{b \in \Lambda'}$ i aquest és precisament el 1-cocicle associat a les dades d'Appell-Humbert $(F^*(\alpha), F^*(H))$.

Anàlogament, $t_x^*(L)$ té factors d'automorfia $(B_a = A_a(- + x))_{a \in \Lambda}$. Les dades d'Appell-Humbert $(\alpha \exp(2\pi i E(x, -)), H)$ tenen per 1-cocicle associat:

$$C_a(u) = \alpha(a) \exp(2\pi i E(x, a)) \exp(\pi H(u, a) + \frac{\pi}{2} H(a, a)).$$

Els 1-cocicles (B_a), (C_a) són cohomòlegs ja que:

$$B_a(u) C_a(u)^{-1} = \exp(\pi H(x, a) - 2\pi i E(x, a)) = \frac{h(u)}{h(u + a)} = h(a)^{-1},$$

essent $h \colon V \longrightarrow \mathbb{C}^*$ la funció definida per $\exp(-\pi\lambda(-))$, on

$$\lambda(-) = H(x, -) - 2iE(x, -).$$

Com que λ és $\mathbb{C}$-lineal, la funció h és holomorfa i satisfà $h(u+a) = h(u)h(a)$. $\square$

5.2.6 Corol·lari. *Sigui* $H \in \mathrm{NS}(X)$*. Per a qualssevol* $x \in X$*,* $L \in \mathrm{Pic}^H(X)$*,*

$$t_x^*(L) \otimes L^{-1} = (\exp(2\pi i E(x, -)), 0) \in \mathrm{Pic}^0(X),$$

és independent de L*.*$\square$

5.2.7 Corol·lari. (Teorema del quadrat)

$$t_{x+y}^*(L) \otimes L \simeq t_x^*(L) \otimes t_y^*(L) \quad \forall x, y \in X, \forall L \in \mathrm{Pic}(X).\square$$

5.2.2 Homomorfisme $\mathrm{NS}(X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X, \mathrm{Pic}^0(X))$

Tot $H \in \mathrm{NS}(X)$ determina un homomorfisme de tors complexos $X \to \hat{X}$, induït per:

$$\psi_H \colon V \longrightarrow \hat{V}, \qquad u \mapsto E(u, -).$$

En efecte, és $\mathbb{C}$-lineal i envia Λ dins $\hat{\Lambda}$:

$$E(iu, v) = -E(u, iv) = iE(u, -)(v); \quad u \in \Lambda \implies E(u, \Lambda) \subseteq \mathbb{Z}.$$

Denotem per φ_H l'homomorfisme $X \to \mathrm{Pic}^0(X)$ que obtenim component l'homomorfisme anterior amb l'isomorfisme $\hat{X} \xrightarrow[\sim]{} \mathrm{Pic}^0(X)$ de la Proposició 5.1.10:

$$\varphi_H \colon X \longrightarrow \mathrm{Pic}^0(X), \qquad x \mapsto (\exp(2\pi i E(x,-)), 0).$$

Denotem el nucli per $K(H) := \mathrm{Ker}(\varphi_H) = \Lambda^E/\Lambda$, on $\Lambda^E = \psi_H^{-1}(\hat{\Lambda})$, i.e.

$$\Lambda^E := \{u \in V \mid E(u, \Lambda) \subseteq \mathbb{Z}\}.$$

5.2.8 Proposició. *φ_H isogènia $\Longleftrightarrow$ H no-degenerada.*

En aquest cas, $\sharp K(H) = \det_\Lambda(E) = d_1^2 \cdots d_g^2$.

Demostració: Tant el fet que φ_H sigui isogènia, com el fet que H sigui no-degenerada equivalen a que ψ_H sigui isomorfisme.

Si $a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g$ és una base E-simplèctica de Λ, aleshores

$$\frac{1}{d_1}a_1, \ldots, \frac{1}{d_g}a_g, \frac{1}{d_1}b_1, \ldots, \frac{1}{d_g}b_g$$

és una $\mathbb{Z}$-base de Λ^E. $\square$

Pel Lema 5.2.5 i la Proposició 5.2.8, si $L \in \mathrm{Pic}^H(X)$ i H és no-degenerada, els feixos $t_x^*(L)$ recorren tot $\mathrm{Pic}^H(X)$. Més precisament,

5.2.9 Corol·lari. *Si H no-degenerada, qualsevol elecció de $L_0 = (\alpha_0, H)$ dins de $\mathrm{Pic}^H(X)$ determina una bijecció:*

$$\begin{array}{ccccccc} V/\Lambda^E & \xrightarrow[\sim]{\varphi_H} & \mathrm{Pic}^0(X) & \xrightarrow{L_0\otimes -} & \mathrm{Pic}^H(X) & \\ c & \mapsto & (\exp(2\pi i E(c,-)), 0) & \mapsto & (\alpha_0 \exp(2\pi i E(c,-)), H) & = t_c^*(L_0). \end{array}$$

Aquesta parametrització de $\mathrm{Pic}^H(X)$ juga un paper clau en la descripció explícita de funcions theta. A la secció 3 calcularem l'espai de funcions theta $H^0(X, L_0)$ per a un feix invertible $L_0 \in \mathrm{Pic}^H(X)$ especialment escollit i descriurem les funcions theta associades a tots els altres feixos de $\mathrm{Pic}^H(X)$ en termes de $H^0(X, L_0)$ i l'invariant $c \in V/\Lambda^E$.

5.2.3 Varietats abelianes polaritzades

5.2.10 Teorema. [K, Th.2.1] Per a tot $L = (\alpha, H) \in \mathrm{Pic}(X)$,

- $H^0(X, L)$ és un $\mathbb{C}$-e.v. de dimensió finita.
- $H^0(X, L) \neq 0 \iff H \geq 0$ i $\alpha(\Lambda \cap \mathrm{rad}(H)) = \{1\}$.□

Definició. Una *varietat abeliana* és un tor complex X amb $\mathrm{NS}^+(X) \neq \emptyset$. Un parell (X, H), amb $H \in \mathrm{NS}^+(X)$, s'anomena una *varietat abeliana polaritzada.*

5.2.11 Proposició. *Tot tor complex X admet una varietat abeliana quocient, Y, tal que la projecció canònica $p\colon X \longrightarrow Y$ és un homomorfisme universal de X en una varietat abeliana.*

Demostració: Considerem el subsemigrup de $\mathrm{NS}(X)$ format per les formes semidefinides positives:

$$\mathrm{NS}^{\geq}(X) = \{H \in \mathrm{NS}(X) \mid H \geq 0\}.$$

Per a qualssevol $H, H' \in \mathrm{NS}^{\geq}(X)$, es té: $\mathrm{rad}(H + H') = \mathrm{rad}(H) \cap \mathrm{rad}(H')$. Com que estem en un espai vectorial de dimensió finita, existeixen $H_1, \ldots, H_r \in \mathrm{NS}^{\geq}(X)$ tals que, prenent $H_0 = H_1 + \cdots + H_r$, es té:

$$\cap_{H \in \mathrm{NS}^{\geq}(X)} \mathrm{rad}(H) = \cap_{i=1}^{r} \mathrm{rad}(H_i) = \mathrm{rad}(H_0).$$

Per a tot $H \in \mathrm{NS}^{\geq}(X)$, si $W = \mathrm{rad}(H)$, el tor complex quocient $X_H = (V/W)/((\Lambda + W)/W)$ és una varietat abeliana, ja que la pròpia H indueix una polarització sobre X_H. El pas al quocient $X \twoheadrightarrow X_H$ factoritza a través de X_{H_0}: $X \twoheadrightarrow X_{H_0} \twoheadrightarrow X_H$. D'altra banda, si $f\colon X \longrightarrow X'$ és un homomorfisme de X en una varietat abeliana, el pull-back d'una polarització de X' és un $H \in \mathrm{NS}^{\geq}(X)$ i l'homomorfisme f factoritza a través de $X \twoheadrightarrow X_H$. □

5.2.12 Corol·lari. *Sigui $L = (\alpha, H) \in \mathrm{Pic}(X)$ tal que $H^0(X, L) \neq 0$. Aleshores, existeix $M \in \mathrm{Pic}(Y)$ tal que $L = p^*(M)$ i*

$$p^*\colon H^0(Y, M) \longrightarrow H^0(X, L),$$

és un isomorfisme. En particular, $p^*\colon \mathbb{C}(Y) \longrightarrow \mathbb{C}(X)$ és un isomorfisme.

Demostració: Pel Teorema 5.2.10, $H \geq 0$ i α és trivial sobre $\Lambda \cap W$, on $W = \operatorname{rad}(H)$. Per tant, tenim unes dades d'Appell-Humbert $\overline{L} = (\overline{\alpha}, \overline{H})$ induïdes sobre el tor X_H, quocient de X. Clarament $L = p^*(\overline{L})$ i $p^*\colon H^0(X_H, \overline{L}) \longrightarrow H^0(X, L)$ és injectiu. Per veure que és un isomorfisme cal veure que qualsevol secció global, $\theta\colon V \longrightarrow \mathbb{C}$, de L sobre X és constant sobre les classes laterals $u + W$; això és conseqüència del fet que $\Lambda \cap W$ és un reticle de W i θ és holomorfa i $\Lambda \cap W$-periòdica. Prenent com a M el pull-back de $\overline{L}$ a Y obtenim el resultat. □

Cada 1-cocicle $(A_a) \in Z^1(\Lambda, \mathcal{O}^*(V))$ determina un feix invertible L_A sobre X i podem considerar una $\mathbb{C}$-base $\theta_0, \ldots, \theta_N$ de l'espai $H^0(X, L_A)$ de les seves seccions globals. El punt de coordenades projectives $(\theta_0(x), \ldots, \theta_N(x))$ no depèn del representant $x \in V$ escollit perquè totes les funcions theta satisfan la mateixa equació funcional. Per tant, obtenim una aplicació meromorfa ben definida,

$$\phi_{L_A}\colon X \longrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C}), \qquad x \mapsto (\theta_0(x), \ldots, \theta_N(x)),$$

unívocament determinada a menys d'automorfismes de $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$, que reflecteixen els possibles canvis de base. Finalment, un 1-cocicle cohomòleg (A'_a) dóna lloc a la mateixa aplicació meromorfa pel Lema 5.2.1. Hem provat, doncs,

5.2.13 Proposició. *Tot $L \in \operatorname{Pic}(X)$ determina una aplicació meromorfa,*

$$\phi_L\colon X \longrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C}), \qquad x \mapsto (\theta_0(x), \ldots, \theta_N(x)),$$

unívocament determinada a menys d'un automorfisme de $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$.

Definició. $L \in \operatorname{Pic}(X)$ és *molt ample* si ϕ_L és una immersió tancada holomorfa. En aquest cas,

$$\mathbb{C}(X) = \mathbb{C}(\frac{\theta_1}{\theta_0}, \ldots, \frac{\theta_N}{\theta_0}).$$

$L \in \operatorname{Pic}(X)$ és *ample* si $L^{\otimes n}$ és molt ample per a algun $n \geq 1$.

5.2.14 Teorema. (Lefschetz) *Per a tot $L = (\alpha, H) \in \operatorname{Pic}(X)$,*

- *L ample $\iff$ $H \in \mathrm{NS}^+(X)$ $\iff$ $H^0(X, L) \neq 0$ i $K(H)$ finit.*
- *L ample, $d_1 \geq 2 \implies \phi_L$ holomorfa.*
- *L ample, $d_1 \geq 3 \implies L$ molt ample.*

5.2.15 Corol·lari. *Per a un tor complex X, són equivalents:*

(1) X *varietat abeliana.*

(2) $\exists \mathcal{X}_{|\mathbb{C}}$ *varietat algebraica projectiva no-singular tal que* $X \simeq \mathcal{X}^{an}$.

(3) $\mathbb{C}(X)$ *té grau de transcendència* $\dim(X)$.

Demostració: (1) $\Longrightarrow$ (2) pels teoremes de Chow i de Lefschetz. (2) $\Longrightarrow$ (3) pel principi GAGA: $\mathbb{C}(\mathcal{X}) \simeq \mathbb{C}(\mathcal{X}^{\mathrm{an}})$. (3) $\Longrightarrow$ (1) per la proposició 5.2.11 i el Corol·lari 5.2.12. $\square$

Per resultats clàssics de Chow i de Serre, el functor $\mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}^{\mathrm{an}}$ determina una equivalència entre les categories de varietats algebraiques completes, no-singulars sobre $\mathbb{C}$ i les varietats complexes compactes que són analíticament isomorfes a una subvarietat tancada d'un espai projectiu. Hi ha també un functor $\mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}^{\mathrm{an}}$, que determina una equivalència entre els respectius conceptes (algebraic i analític) de feix invertible, a menys d'isomorfisme (respectivament algebraic i analític). A més a més, hi ha isomorfismes naturals, $H^i(\mathcal{X}, \mathcal{L}) \underset{\sim}{\longrightarrow} H^i(\mathcal{X}^{\mathrm{an}}, \mathcal{L}^{\mathrm{an}})$.

En particular, tots els resultats vistos fins ara tenen la seva contrapartida en el món de les varietats abelianes algebraiques definides sobre $\mathbb{C}$. Per exemple, el teorema d'estructura de $\mathrm{Pic}(\mathcal{X})$ és igualment vàlid, considerant $\mathrm{Pic}^0(\mathcal{X})$ com el subgrup de feixos invertibles algebraicament equivalents a $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$.

5.3 Funcions theta associades a una polarització

Per la Proposició 5.2.11 i el Corol·lari 5.2.12, en l'estudi dels espais de funcions theta $H^0(X, L)$ associats a feixos invertibles sobre tors complexos, podem restringir-nos al cas de varietats abelianes. D'ara endavant, doncs, fixem una varietat abeliana X, una polarització $H \in \mathrm{NS}^+(X)$ i ens ocupem de la descripció dels espais $H^0(X, L)$ per a $L \in \mathrm{Pic}^H(X)$.

D'entrada fem observar que la notació $H^0(X, L)$ és ambigua, ja que feixos invertibles de la mateixa classe d'isomorfia donen lloc a (isomorfs però) diferents espais de funcions theta. El que farem és triar per a cada classe d'isomorfia $L \in \mathrm{Pic}^H(X)$ un 1-cocicle $(A_a) \in Z^1(\Lambda, \mathcal{O}^*(V))$ que representi L i considerar l'espai de funcions theta associat al feix L_A construït a la Proposició 5.2.2. El Lema 5.2.1 ens permet relacionar els diferents espais de funcions theta que corresponen a 1-cocicles cohomòlegs.

Per exemple, si prenem l'1-cocicle trivial: $A_a(u) = 1$, $\forall a \in \Lambda$, $\forall u \in V$, obtenim com a funcions theta les constants, $H^0(X, \mathcal{O}_X) = \mathbb{C}$. Si prenem una 1-covora $(\frac{h(-)}{h(-+a)})$ obtenim el $\mathbb{C}$-e.v. de dimensió 1 generat per h. Si considerem els espais de funcions theta associats a totes les 1-covores, obtenim $\mathcal{O}^*(V)$. És natural anomenar *funcions theta trivials* les funcions de $\mathcal{O}^*(V)$. Clàssicament, es consideren funcions theta *normalitzades*, escollint determinats representants mòdul multiplicació per funcions theta trivials [SD, pàg.40]. En aquesta secció farem dues eleccions molt concretes d'aquestes normalitzacions, que ens duran als conceptes respectius de *funcions theta canòniques* i *funcions theta clàssiques*.

Definició. L'*espai de funcions theta canòniques* associades a $L = (\alpha, H)$ és:

$$H^0(X, L)_{\mathrm{can}} := \{V \xrightarrow{\theta} \mathbb{C} \text{ holom.}, \theta(u + a) = A_a(u)\theta(u), \forall a \in \Lambda, \forall v \in V\},$$

on $\{A_a\}$ és l'1-cocicle canònic associat a les dades d'AH de L:

$$A_a(u) = \alpha(a)\exp(\pi H(u, a) + \frac{\pi}{2}H(a, a)).$$

Per a tot $c \in X$, la translació t_c és un isomorfisme de varietats complexes; per tant, els espais de funcions theta associats a L i $t_c^*(L)$ són isomorfs. Per exemple, podem considerar l'isomorfisme (que depèn de l'elecció del representant $c \in V$ del punt $c \in X$):

$$\begin{array}{ccc} H^0(X, L)_{\mathrm{can}} & \xrightarrow{\sim} & H^0(X, t_c^*(L))_{\mathrm{can}} \\ \theta & \longmapsto & \exp(-\pi H(-, c) - \frac{\pi}{2}H(c, c))\,\theta(- + c). \end{array} \tag{5.3}$$

D'altra banda, fixant $L_0 \in \mathrm{Pic}^H(X)$, hem vist al Corol·lari 5.2.9 que els $t_c^*(L_0)$ recorren tot $\mathrm{Pic}^H(X)$. Per tant, és suficient fixar-nos el següent:

Objectiu: Obtenir una descripció explícita d'algun $H^0(X, L_0)_{\mathrm{can}}$.

La idea clau per assolir-lo consisteix en retocar els 1-cocicles canònics, multiplicant-los per una determinada 1-covora, per obtenir els 1-cocicles anomenats *clàssics*. Aquests 1-cocicles tenen l'avantatge que algunes de les funcions theta associades són g-periòdiques.

5.3.1 Descomposicions simplèctiques

Definició. Fixem $H \in \mathrm{NS}^+(X)$. Una *descomposició E-simplèctica* de X és una descomposició, $\Lambda = \Lambda_1 \oplus \Lambda_2$, amb Λ_1, Λ_2 subgrups E-isòtrops (de rang g).

Notem que l'elecció d'una base E-simpèctica de Λ determina, en particular, una descomposició E-simplèctica de X. Recíprocament, donada una descomposició simplèctica, sempre es possible escollir bases de Λ_1 i Λ_2 que formin una base simplèctica de Λ. L'elecció d'una descomposició simplèctica permet definir diferents estructures dins de X:

Elecció canònica $L_0 = (\alpha_0, H) \in \mathrm{Pic}^H(X)$

El H-semicaràcter α_0 queda determinat pel fet de ser trivial sobre $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$:

$$\Lambda \xrightarrow{\alpha_0} \mathbb{C}_1, \qquad \alpha_0(a+b) = (-1)^{E(a,b)}, \quad \forall a \in \Lambda_1,\, b \in \Lambda_2.$$

Clàssicament, s'anomena L_0 el feix *excel·lent* associat a la descomposició simplèctica. Recordem que l'elecció de L_0 determina també una bijecció

$$V/\Lambda^E \longrightarrow \mathrm{Pic}^H(X), \qquad c \mapsto t_c^*(L_0).$$

Aquest element $c \in V/\Lambda^E$ s'anomena la *característica* de $L = t_c^*(L_0)$ respecte de la descomposició simplèctica fixada.

Descomposicions de V, Λ^E i $K(H)$

Considerem, per a $r = 1, 2$:

$$V_r = \mathbb{R}\Lambda_r, \qquad \Lambda_r^E := (\Lambda^E \cap V_r), \qquad K(H)_r := (\Lambda_r^E/\Lambda_r).$$

Tenim descomposicions òbvies:

$$V = V_1 \oplus V_2, \qquad \Lambda^E = \Lambda_1^E \oplus \Lambda_2^E, \qquad K(H) = K(H)_1 \oplus K(H)_2.$$

La descomposició $V = V_1 \oplus V_2$ determina una descomposició de X en suma directa de dos tors reals, però no complexos, ja que V_1, V_2 no són $\mathbb{C}$-subespais. De fet, qualsevol d'ells genera V com a $\mathbb{C}$-e.v.. Per exemple,

$$u \in V_2 \cap iV_2 \Longrightarrow H(u,u) = 0 \Longrightarrow u = 0,$$

per tant, tenim també una descomposició: $V = V_2 \oplus iV_2$.

Forma $\mathbb{C}$-bilineal simètrica B

Com que $H_{|V_2 \times V_2}$ és una forma $\mathbb{R}$-bilineal real i simètrica, té sentit considerar la forma $\mathbb{C}$-bilineal simètrica,

$$B\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{C},$$

determinada per $B_{|V_2 \times V_2} = H_{|V_2 \times V_2}$.

Homomorfisme $\mathbb{R}$-lineal $V \xrightarrow{\wedge} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$

Associem a cada $v \in V$ la forma $\mathbb{C}$-lineal:

$$\hat{v} = \frac{1}{2i}(H - B)(-, v).$$

5.3.1 Lema. *L'homomorfisme $\mathbb{R}$-lineal $v \mapsto \hat{v}$ té les següents propietats:*

1. $\hat{v} = 0 \iff v \in V_2$.
2. $\hat{v}(u) - \hat{u}(v) = E(u, v)$.
3. $\hat{v}_{|V_2} = E(-, v)$.
4. *La correspondència $v \mapsto \hat{v}_{|\Lambda_2}$ determina un isomorfisme entre Λ_1^E i $\hat{\Lambda}_2 := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda_2, \mathbb{Z})$.*

Demostració: (1) Com que $V = V_2 \oplus iV_2$ i H, B són $\mathbb{C}$-lineals respecte de la primera variable, és clar que $\hat{v} = 0$ si $v \in V_2$. Per veure el recíproc és suficient comprovar que $\wedge$ és injectiu sobre iV_2. Suposem que $(iv)\hat{} = 0$, amb $v \in V_2$. A la força $v = 0$, ja que:

$$iH(v, v) = iB(v, v) = B(v, iv) = H(v, iv) = -iH(v, v).$$

(2) és evident i (3) es dedueix de (2) i (1).

Per provar (4) observem primer que $v \mapsto \hat{v}_{|V_2}$ determina un isomorfisme $\mathbb{R}$-lineal $V_1 \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V_2, \mathbb{R})$. En efecte, són dos $\mathbb{R}$-e.v. de la mateixa dimensió i per a $v \in V_1$ tenim:

$$\hat{v}(V_2) = 0 \implies \hat{v} = 0 \implies v \in V_2 \implies v = 0.$$

Sota aquest isomorfisme, Λ_1^E es correspon amb $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda_2, \mathbb{Z})$, identificat a les formes $\mathbb{R}$-lineals que prenen valors enters sobre Λ_2; en efecte, per a $v \in V_1$:

$$E(\Lambda_2, v) = \hat{v}(\Lambda_2) \subseteq \mathbb{Z} \iff E(\Lambda, v) \subseteq \mathbb{Z} \iff v \in \Lambda_1^E. \square$$

5.3.2 Funcions theta clàssiques

Fixem $H \in \mathrm{NS}^+(X)$ i $\Lambda = \Lambda_1 \oplus \Lambda_2$ una descomposició simplèctica de X.

Definició. L'*espai de funcions theta clàssiques* associades a $L = (\alpha, H)$ és:

$$H^0(X, L) := \{V \xrightarrow{\theta} \mathbb{C} \text{ holomorfa}, \ \theta(u{+}a) = C_a(u)\theta(u), \quad \forall a \in \Lambda, \forall u \in V\},$$

on $\{C_a\}$ és l'1-cocicle cohomòleg al canònic:

$$C_a(u) = A_a(u)\frac{h(u)}{h(u+a)} = \alpha(a)\exp(2\pi i\hat{a}(u) + \pi i\hat{a}(a)),$$

on $V \xrightarrow{h} \mathbb{C}^*$ ve donada per $h(u) = \exp(\frac{\pi}{2}B(u,u))$.

Pel Lema 5.2.1 tenim un isomorfisme explícit entre els espais de funcions theta canòniques i clàssiques:

$$H^0(X, L) \xrightarrow[\sim]{} H^0(X, L)_{\mathrm{can}}, \quad \theta \mapsto \tilde{\theta}(u) = \exp(\frac{\pi}{2}B(u,u))\,\theta(u).$$

Aquesta relació ens permet traduir l'isomorfisme (5.3) en un isomorfisme entre funcions theta clàssiques associades a L i $t_c^*(L)$:

$$H^0(X, L) \ \xrightarrow[\sim]{\rho_c}\ H^0(X, t_c^*(L)), \quad \theta \mapsto \tilde{\theta}(u) = \exp(-2\pi i\hat{c}(u) - \pi i\hat{c}(c))\,\theta(u+c). \tag{5.4}$$

Fem observar que aquest isomorfisme ρ_c continua depenent de l'elecció de $c \in V$. Amb aquesta nova normalització de les funcions theta tenim:

5.3.2 Proposició. *Les funcions theta clàssiques associades a L_0 són Λ_2-periòdiques. Per tant, admeten un desenvolupament en sèrie de Fourier:*

$$\theta(u) = \sum_{\chi \in \hat{\Lambda}_2} c_\chi \exp(2\pi i\chi(u)) = \sum_{a \in \Lambda_1^E} c_a \exp(2\pi i\hat{a}(u)).$$

Els coeficients de Fourier $(c_a)_{a \in \Lambda_1^E}$ satisfan:

$$c_{a+b} = \exp(-2\pi i\hat{b}(a) - \pi i\hat{b}(b))\,c_a, \qquad \forall a \in \Lambda_1^E,\ b \in \Lambda_1. \tag{5.5}$$

Demostració: Per a $a \in \Lambda_2$ tenim $\alpha_0(a) = 1$ i $\hat{a} = 0$; per tant, $C_a(u) = 1$, per a tot $u \in V$. La identificació $\chi = \hat{a}$, amb $a \in \Lambda_1^E$ és conseqüència del Lema 5.3.1(4).

La relació (5.5) tradueix l'equació funcional de θ. Per a $u \in V$, $b \in \Lambda_1$,

$$\theta(u+b) = \sum_{a \in \Lambda_1^E} c_a \exp(2\pi i \hat{a}(u+b)) = \sum_{a \in \Lambda_1^E} (\exp(2\pi i \hat{a}(b)) c_a) \exp(2\pi i \hat{a}(u)),$$

$$\begin{aligned} C_b(u)\theta(u) &= \textstyle\sum_{a \in \Lambda_1^E} \left(\exp(2\pi i \hat{b}(b)) c_a\right) \exp(2\pi i (\hat{a}+\hat{b})(u)) = \\ &= \textstyle\sum_{a \in \Lambda_1^E} \left(\exp(2\pi i \hat{b}(b)) c_{a-b}\right) \exp(2\pi i \hat{a}(u)). \end{aligned}$$

Igualant els coeficients de Fourier de les dues expressions obtenim (5.5), tenint en compte que $\hat{a}(b) = \hat{b}(a)$, ja que $a, b \in V_1$ i $E(a,b) = 0$. $\square$

Considerem $T(H, \Lambda_1, \Lambda_2) := \{(c_a) \in \mathbb{C}^{\Lambda_1^E} \mid \text{ satisfan (5.5)}\}$. És un $\mathbb{C}$-e.v. de dimensió finita $\sharp K(H)_1$, ja que c_a pot ser escollit lliurement per a qualsevol sistema de representants de Λ_1^E/Λ_1 i després els valors de $c_{a+\Lambda_1}$ queden determinats per (5.5). Així doncs, via fixar aquest sistema de representants podem establir un isomorfisme entre $\mathbb{C}^{K(H)_1}$ i $T(H, \Lambda_1, \Lambda_2)$. Curiosament, hi ha una manera canònica d'establir un isomorfisme entre els dos espais.

5.3.3 Lema. *La correspondència,*

$$(\lambda_{\bar{a}})_{\bar{a} \in \Lambda_1^E/\Lambda_1} \longmapsto (c_a)_{a \in \Lambda_1^E} = (\exp(-\pi i \hat{a}(a)) \lambda_{\bar{a}})_{a \in \Lambda_1^E},$$

estableix un isomorfisme canònic entre $\mathbb{C}^{K(H)_1}$ *i* $T(H, \Lambda_1, \Lambda_2)$.

Demostració: Per a $a \in \Lambda_1^E$, $b \in \Lambda_1$, tenim $\overline{a+b} = \overline{a}$, $\hat{a}(b) = \hat{b}(a)$; d'on:

$$c_{a+b}/c_a = \exp(-\pi i(\hat{a}(b) + \hat{b}(a) + \hat{b}(b))) = \exp(-2\pi i \hat{b}(a) - \pi i \hat{b}(b)).\square$$

Finalment, via comprovar que per a qualsevol elecció de $(c_a) \in T(H, \Lambda_1, \Lambda_2)$ la corresponent sèrie de Fourier convergeix, la qual cosa es redueix a comprovar que la part imaginària de la forma $\hat{a}(a)$ sobre Λ_1^E és definida negativa (vegeu el Lema 5.3.7), s'obté el resultat fonamental que anàvem empaitant:

5.3.4 Teorema. *Tenim isomorfismes canònics:*

$$\mathbb{C}^{K(H)_1} \xrightarrow[\sim]{} T(H, \Lambda_1, \Lambda_2) \xrightarrow[\sim]{} H^0(X, L_0).$$

En particular, per a tot $L \in \operatorname{Pic}^H(X)$,

$$\dim_{\mathbb{C}} H^0(X, L) = \sharp K(H)_1 = \sqrt{\det_\Lambda E} = d_1 \cdots d_g.\square$$

5.3.5 Corol·lari. *Si* $f\colon X' \longrightarrow X$ *és una isogènia entre tors complexos i* $L \in \operatorname{Pic}(X)$*, aleshores:* $\dim H^0(X', f^*(L)) = \deg(f) \dim H^0(X, L)$.

DEMOSTRACIÓ: Si $L = (\alpha, H)$ sabem que $f^*(L) = (F^*(\alpha), F^*(H))$. Ara,

$$\det\nolimits_\Lambda E = \det\nolimits_{F^{-1}(\Lambda)} F^*(E) = \left(F^{-1}(\Lambda)\colon \Lambda'\right)^2 \det\nolimits_{\Lambda'} F^*(E). \square$$

Pel Teorema 5.3.4, podem considerar una base canònica $\{\theta_w\}_{w\in K(H)_1}$ de l'espai $H^0(X, L_0)$, imatge de la base canònica $\{\delta_{-w}\}_{w\in K(H)_1}$ de $\mathbb{C}^{K(H)_1}$. El canvi de signe té com a objectiu unificar aquesta notació amb la de funcions theta amb característica, que introduirem tot seguit.

El Teorema ens dóna també una descripció explícita d'aquesta base canònica com a sèries de Fourier. Els coeficients de Fourier de θ_w són:

$$c_a = \begin{cases} \exp(-\pi i \hat{a}(a)), & \text{si } a \in -w + \Lambda_1, \\ 0, & \text{en tot altre cas,} \end{cases}$$

on hem comés l'usual abús de llenguatge de denotar per w tant una classe de Λ_1^E/Λ_1 com un representant d'aquesta classe a Λ_1^E. Tenim doncs, una funció theta preciosa:

$$\theta_0(u) = \sum_{a\in\Lambda_1} \exp(2\pi i \hat{a}(u) - \pi i \hat{a}(a)),$$

i més generalment, per a $w \in \Lambda_1^E/\Lambda_1$, funcions theta:

$$\begin{aligned} \theta_w(u) &= \sum_{a\in -w+\Lambda_1} \exp(2\pi i \hat{a}(u) - \pi i \hat{a}(a)) = \\ &= \exp(-2\pi i \hat{w}(u) - \pi i \hat{w}(w)) \sum_{b\in\Lambda_1} \exp(2\pi i \hat{b}(u+w) - \pi i \hat{b}(b)) = \\ &= \exp(-2\pi i \hat{w}(u) - \pi i \hat{w}(w))\, \theta_0(u+w), \end{aligned}$$

on $a = -w + b$ i hem utilitzat que $\hat{b}(w) = \hat{w}(b)$, ja que $w, b \in V_1$.

Aquesta expressió per a θ_w en funció de θ_0, coincideix amb la manera com relacionàvem a (5.4) funcions theta associades a un feix i al seu traslladat. Ens suggereix la següent definició, que engloba les dues construccions:

La notació δ_w és estàndard; identificant $\mathbb{C}^{K(H)_1} = \operatorname{Apl}(K(H)_1, \mathbb{C})$, δ_w és la funció característica de l'element $w \in K(H)_1$.

Definició. Per a qualsevol $c \in V$ definim la *funció theta (clàssica) amb característica* c com:

$$\theta_c(u) = \exp(-2\pi i\hat{c}(u) - \pi i\hat{c}(c))\,\theta_0(u+c) \;\in\; H^0(X, t_c^*(L_0)).$$

Per a $c \in \Lambda_1^E$, la funció θ_c només depèn de la classe de c mòdul Λ_1 i coincideix amb la funció θ_w que acabem de descriure. Sigui $L \in \mathrm{Pic}^H(X)$, de característica $c \in V/\Lambda^E$ respecte de la descomposició simplèctica fixada. Prenent $c' \in c + \Lambda^E$, les funcions theta $\theta_{c'}$ pertanyen totes al mateix espai $H^0(X, L)$. Veiem com seleccionar d'entre elles una base d'aquest espai:

5.3.6 Lema. *Donat $L \in \mathrm{Pic}^H(X)$, sigui $c \in V$ un representant de la característica de L respecte de la descomposició simplèctica fixada. Aleshores, si w recorre un sistema de representants de Λ_1^E/Λ_1, les funcions theta $\{\theta_{c+w}\}$ són una base de $H^0(X, L)$.*

Demostració: Es comprova immediatament que per a qualssevol $c, d \in V$,

$$\theta_{c+d}(u) = \exp(\pi i E(c,d))\exp(-2\pi i\hat{c}(uv) - \pi i\hat{c}(c))\,\theta_d(u+c).$$

Per tant, a través de l'isomorfisme ρ_c entre $H^0(X, L_0)$ i $H^0(X, L)$ donat per (5.4), els θ_{c+w} es corresponen amb la base dels θ_w, a menys de constants multiplicatives: $\theta_{c+w} = \exp(\pi i E(c,w))\rho_c(\theta_w)$. $\Box$

En conclusió, una polarització i una descomposició simpèctica determinen, essencialment, una funció theta, θ_0, a partir de la qual podem fabricar bases de tots els espais de funcions theta de fibrats de línia associats a aquesta polarització.

5.3.3 Funcions theta en coordenades

Fixem $H \in \mathrm{NS}^+(X)$. Calculem l'expressió de les funcions theta clàssiques θ_c treballant en coordenades. Fixem:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{B}_{\mathrm{sp}}: & a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g, & \text{base } E\text{-simplèctica de } \Lambda \\ \mathcal{B}: & e_1 = \frac{1}{d_1}b_1, \ldots, e_g = \frac{1}{d_g}b_g & \mathbb{C}\text{-base de } V \end{array},$$

i considerem la matriu de periodes $\Pi = (Z|D)$ de X en aquestes bases.

Volem calcular les matrius dels objectes B i $\wedge$ associats a la descomposició E-simplèctica de X determinada per: $\Lambda_1 = \left\langle a_1, \ldots, a_g \right\rangle_{\mathbb{Z}}$, $\Lambda_2 = \left\langle b_1, \ldots, b_g \right\rangle_{\mathbb{Z}}$.

Notació. Si $c \in V$ denotem respectivament per:

$$\binom{c_1}{c_2} \in \mathbb{R}^{2g}, \qquad c = Zc_1 + Dc_2 \in \mathbb{C}^g,$$

les coordenades de c en les bases $\mathcal{B}_{\text{sp}}$ i $\mathcal{B}$; entenent c, c_1, c_2 com a vectors-columna g-dimensionals.

5.3.7 Lema.

1. *$Z \in \mathcal{H}_g := \{\tau \in M_g(\mathbb{C}) \mid \tau^t = \tau,\ \operatorname{Im}\tau > 0\}$.*
2. *$(\operatorname{Im} Z)^{-1}$ = matriu de H = matriu de B, en la base $\mathcal{B}$.*
3. *$\left(\begin{array}{c|c} -Z & 0 \\ \hline D & 0 \end{array}\right)$ = matriu en la base $\mathcal{B}_{sp}$ de la forma $\mathbb{R}$-bilineal:*
   $$V \times V \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad (u, v) \mapsto \hat{v}(u).$$
   En particular, en coordenades: $\hat{v}(u) = -u_1^t Z v_1 - u_2^t D v_1 = -u^t v_1$.

Demostració: Denotem per $\mathcal{B}'$ la $\mathbb{R}$-base de V formada pels vectors $e_1, \ldots, e_g, ie_1, \ldots, ie_g$. La matriu de canvi de base de $\mathcal{B}_{\text{sp}}$ a b' és:

$$\left(\begin{array}{c|c} \operatorname{Re} Z & D \\ \hline \operatorname{Im} Z & 0 \end{array}\right)$$

Si apliquem aquest canvi de base a la matriu J_D, trobem que la matriu de E en la base $\mathcal{B}'$ és:

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & -(\operatorname{Im} Z)^{-1} \\ \hline (\operatorname{Im} Z^t)^{-1} & Q \end{array}\right),$$

amb

$$Q = (\operatorname{Im} Z^t)^{-1} - (\operatorname{Im} Z)^{-1} + (\operatorname{Im} Z^t)^{-1}\left(\operatorname{Re} Z^t - \operatorname{Re} Z\right)(\operatorname{Im} Z)^{-1}.$$

Pel Lema 5.1.11, si denotem per H la matriu de H respecte de la base $\mathcal{B}$ tenim:

$$\operatorname{Im} H = 0, \quad \operatorname{Re} H = (\operatorname{Im} Z)^{-1} = (\operatorname{Im} Z^t)^{-1}, \quad Q = 0.$$

Per tant, $H = (\operatorname{Im} Z)^{-1}$ i, sent aquesta matriu real, també és la matriu de B en aquesta base. Un cop sabem que $\operatorname{Im} Z$ és simètrica, la relació $Q = 0$ també implica que $\operatorname{Re} Z$ és simètrica. Això prova (1) i (2).

Pel que fa a (3), clarament, $(\hat{b}_i(a_j)) = 0 = (\hat{b}_i(b_j))$, $(\hat{a}_i(b_j)) = D$. Finalment,

$$\hat{a}_i(a_j) = \frac{1}{2i}\left(H(a_j, a_i) - B(a_j, a_i)\right) = \frac{1}{2i} a_j^t (\operatorname{Im} Z)^{-1}(\bar{a}_i - a_i) =$$

$$= \frac{1}{2i}\,(0\cdots 1\cdots 0)\, Z(\operatorname{Im} Z)^{-1}(\overline{Z}-Z)\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} = -z_{ji}.\square$$

Si parametritzem els $b \in \Lambda_1$ per $\binom{m}{0}$, amb $m \in \mathbb{Z}^g$, tenim:

$$b = Zm, \quad \hat{b}(u) = -u^t m, \quad \hat{b}(b) = -m^t Z m,$$

i d'aquí obtenim:

$$\theta_0(u) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^g} \exp(\pi i m^t Z m - 2\pi i u^t m) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^g} \exp(\pi i m^t Z m + 2\pi i u^t m).$$

I, per a qualsevol característica $c \in V$, de coordenades $c = Zc_1 + Dc_2$ tenim:

$$\theta_c(u) = \exp(-\pi i c_2^t D c_1)\,\theta\begin{bmatrix} c_1\\ c_2\end{bmatrix}(u,Z), \quad \text{on}$$

$$\theta\begin{bmatrix} c_1\\ c_2\end{bmatrix}(u,Z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^g} \exp(\pi i (m+c_1)^t Z(m+c_1) + 2\pi i(u+Dc_2)^t(m+c_1)).$$

5.4 Espais de moduli de varietats abelianes polaritzades

En aquesta secció veurem com el quocient de $\mathcal{H}_g$ per l'acció de diferents grups dóna lloc a espais de moduli de varietats abelianes polaritzades. De fet, ens limitarem a veure com els punts d'aquests quocients de $\mathcal{H}_g$ parametritzen classes d'isomorfia dels objectes en qüestió. En tota la secció suposarem que tenim un tipus D fixat.

5.4.1 Proposició. *El semiespai superior de Siegel $\mathcal{H}_g$ és un espai de moduli de tripletes $(X, H, \mathcal{B}_{sp})$ on $X = V/\Lambda$ és una varietat abeliana de dimensió g, $H \in \mathrm{NS}^+(X)$ té tipus D i $\mathcal{B}_{sp}$ és una base E-simplèctica de Λ.*

Demostració: Hem vist al paràgraf anterior com associar una $Z \in \mathcal{H}_g$ a cada tripleta d'aquestes. Recíprocament, a tota matriu $Z \in \mathcal{H}_g$ li podem associar una tripleta que té Z per matriu associada:

$$(X_Z, H_Z, \mathcal{B}_{\mathrm{sp}_Z}) := \left(\mathbb{C}^g/\Lambda, (\operatorname{Im} Z)^{-1}, \mathcal{B}_{\mathrm{sp}_Z}\right),$$

on Λ és el subgrup generat per les columnes de $(Z|D)$ i $\mathcal{B}_{\mathrm{sp}_Z}$ és la base $a_1, \ldots, a_g,\ b_1, \ldots, b_g$ formada per aquestes mateixes columnes.

Només ens falta comprovar que dues tripletes són isomorfes si i només si tenen la mateixa matriu $Z \in \mathcal{H}_g$ associada. Si dues tripletes $(X, H, \mathcal{B}_{\mathrm{sp}})$, $(X', H', \mathcal{B}'_{\mathrm{sp}})$ són isomorfes, hi ha un isomorfisme $\mathbb{C}$-lineal $V \xrightarrow[\sim]{} V'$ que transforma una base E-simplèctica $a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g$ de V en la base E'-simplèctica $a'_1, \ldots, a'_g, b'_1, \ldots, b'_g$ de V'; en particular transforma la $\mathbb{C}$-base $\frac{1}{d_1}b_1, \ldots, \frac{1}{d_g}b_g$ de V en la $\mathbb{C}$-base $\frac{1}{d_1}b'_1, \ldots, \frac{1}{d_g}b'_g$ de V' i les matrius de períodes $(Z|D)$ i $(Z'|D)$ coincideixen. Recíprocament, si dues tripletes $(X, H, \mathcal{B}_{\mathrm{sp}})$, $(X', H', \mathcal{B}'_{\mathrm{sp}})$ tenen la mateixa $Z \in \mathcal{H}_g$ associada, l'isomorfisme $\mathbb{C}$-lineal entre V i V' determinat per $a_i \mapsto a'_i$ envia automàticament $b_i \mapsto b'_i$. □

5.4.1 Acció dels grups simplèctics

Denotem per $J = J_I$ la matriu simplèctica que correspon al tipus principal. El *grup simplèctic* és el grup d'automorfismes de $\mathbb{R}^{2g}$ que respecten la forma simplèctica donada per J:

$$\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{R}) \mid M^t J M = J\}.$$

5.4.2 Lema. $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R})$ *és un subgrup de* $\mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{R})$*, tancat per transposició.*

Demostració: La condició de subgrup és evident; per a $M, N \in \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}(MN)^t J (MN) &= N^t (M^t J M) N = N^t J N = J,\\ (M^{-1})^t J M^{-1} &= (M^{-1})^t (M^t J M) M^{-1} = J.\end{aligned}$$

Com que $J^{-1} = -J$, si $M \in \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R})$, tenim també $M^t \in \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R})$, ja que:

$$(M^{-1})^t J M^{-1} = J \implies M J^{-1} M^t = J^{-1} \implies M J M^t = J.$$

□

5.4.3 Lema. *Si* $M = \left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & d \end{array}\right) \in M_{2g}(\mathbb{R})$*, són equivalents:*

1. $M \in \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R})$.
2. $a^t c$, $b^t d$ *són simètriques i* $a^t d - c^t b = I$.

Noteu que la $\mathbb{C}$-base $\frac{1}{d_1}b_1, \ldots, \frac{1}{d_g}b_g$ és la base canònica de $\mathbb{C}^g$.

3. ab^t, cd^t *són simètriques i* $ad^t - bc^t = I$.

En particular, $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{SL}_{2g}(\mathbb{R})$.

Demostració: La condició (2) tradueix la relació $M^tJM = J$ i la (3) s'obté de (2) per transposició. □

5.4.4 Proposició. *El grup* $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R})$ *opera biholomorfament sobre* $\mathcal{H}_g$ *via:*

$$Z \longmapsto M(Z) = (aZ+b)(cZ+d)^{-1}, \quad M = \left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & d \end{array}\right) \in \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R}).$$

Demostració: De la relació:

$$(cZ+d)^t(\overline{aZ+b}) - (aZ+b)^t(\overline{cZ+d}) = \overline{Z} - Z = -2i\,\mathrm{Im}\,Z. \tag{5.6}$$

deduïm que $cZ+d$ és invertible, ja que, en ser $\mathrm{Im}\,Z > 0$:

$$(cZ+d)u = 0 \implies u^t(\mathrm{Im}\,Z)\bar{u} = 0 \implies u = 0.$$

Per tant, $M(Z)$ està ben definit; d'altra banda, el càlcul:

$$(cZ+d)^t\left(M(Z) - M(Z)^t\right)(cZ+d) = Z - Z = 0,$$

ens mostra que $M(Z)$ és simètrica. Finalment, de (5.6) traiem també, intercalant $I = (cZ+d)^{-1}(cZ+d)$:

$$-2i\,\mathrm{Im}\,Z = (cZ+d)^t\overline{M(Z)}(\overline{cZ+d}) - (cZ+d)^tM(Z)^t(\overline{cZ+d}) =$$
$$= -2i(cZ+d)^t\,\mathrm{Im}\,M(Z)(\overline{cZ+d}),$$

d'on deduïm que $\mathrm{Im}\,M(Z) > 0$.

Deixem com a exercici la comprovació de que $M_1(M_2(Z)) = (M_1M_2)(Z)$, per a qualssevol $M_1, M_2 \in \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R})$, $Z \in \mathcal{H}_g$. □

Definim el *grup simplèctic de tipus* D, com:

$$\mathrm{Sp}_{2g}^D(\mathbb{R}) := \{M \in M_{2g}(\mathbb{R}) \mid M^tJ_DM = J_D\}.$$

Com que $J_D = I_DJI_D$, amb $I_D = \mathrm{diag}(I, D)$, aquest grup és isomorf a $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R})$:

$$\sigma'_D\colon\ \mathrm{Sp}_{2g}^D(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R}), \qquad N \mapsto I_DNI_D^{-1}.$$

El grup $\mathrm{Sp}_{2g}^D(\mathbb{R})$ no és tancat per transposició. Denotem per $\mathrm{Sp}_{2g}^D(\mathbb{R})^t$ el subgrup de $\mathrm{SL}_{2g}(\mathbb{R})$ obtingut per transposició. Considerem l'isomorfisme $\sigma_D = (\ )^t \sigma'_D (\ )^t$ entre aquest grup i $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R})$:

$$\sigma_D \colon \mathrm{Sp}_{2g}^D(\mathbb{R})^t \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R}), \qquad N \mapsto I_D^{-1} N I_D.$$

A través d'aquest isomorfisme, $\mathrm{Sp}_{2g}^D(\mathbb{R})^t$ també opera biholomorfament sobre $\mathcal{H}_g$ amb l'acció:

$$N(Z) = (aZ + bD)(D^{-1}cZ + D^{-1}dD)^{-1}.$$

Notació. $$\begin{cases} \Gamma_D := \mathrm{Sp}_{2g}^D(\mathbb{Z})^t = \{N \in \mathrm{SL}_{2g}(\mathbb{Z}) \mid N J_D N^t = J_D\}, \\ G_D := \sigma_D(\Gamma_D) = \{M \in \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Q}) \mid I_D M I_D^{-1} \in M_{2g}(\mathbb{Z})\}. \end{cases}$$

Per al tipus principal els dos grups coincideixen: $G_I = \Gamma_I = \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$.

5.4.5 Proposició. *Tant $\mathcal{H}_g/G_D$ com $\mathcal{H}_g/\Gamma_D$ són espais de moduli de varietats abelianes polaritzades de tipus D.*

Demostració: És suficient comprovar-ho per a G_D. Amb la notació de la Proposició 5.4.1, volem comprovar que per a qualssevol $Z, Z' \in \mathcal{H}_g$:

$$(X_{Z'}, H_{Z'}) \xrightarrow{\sim} (X_Z, H_Z) \iff \exists M \in G_D \text{ tal que } Z' = M(Z).$$

Suposem que tenim un isomorfisme $f \colon (X_{Z'}, H_{Z'}) \xrightarrow{\sim} (X_Z, H_Z)$. Considerem les bases $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ =base canònica de $\mathbb{C}^g$ i $\mathcal{B}_{\mathrm{sp}}, \mathcal{B}'_{\mathrm{sp}}$ les respectives columnes de $(Z|D), (Z'|D)$. Denotem per A, R les respectives representació analítica i racional de f en aquestes bases. Pel Lema 5.1.4 tenim:

$$A(Z'|D) = (Z|D)R. \tag{5.7}$$

El fet que f conserva la polarització es tradueix en que $R \in \mathrm{Sp}_{2g}^D(\mathbb{Z})$. Posem:

$$\left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & d \end{array}\right) = M = \sigma_D(R^t) = I_D^{-1} R^t I_D \in G_D.$$

Posant $R = I_D^{-1} M^t I_D$ a (5.7) tenim:

$$(AZ'|AD) = (Z|I)M^t I_D = (Z|I) \left(\begin{array}{c|c} a^t & c^t D \\ \hline b^t & d^t D \end{array}\right) = (Za^t + b^t | (Zc^t + d^t)D).$$

Igualant i transposant, deduïm:

$$Z'A^t = aZ + b, \quad A^t = cZ + d,$$

d'on $Z' = M(Z)$.

Recíprocament, si $Z' = M(Z)$, amb $M \in G_D$, aleshores l'isomorfisme $f_M \colon (X_{Z'}, H_{Z'}) \xrightarrow[\sim]{} (X_Z, H_Z)$, que té $A = (cZ + d)^t$ per representació analítica, té automàticament $R = {\sigma'_D}^{-1}(M^t) \in \mathrm{Sp}_{2g}^D(\mathbb{Z})$ per representació racional i, per tant, conserva la polarització. $\square$

En aquesta darrera situació, per a qualsevol $L = (\alpha, H_Z) \in \mathrm{Pic}(X_Z)$, tindrem $f_M^*(L) = (f_M^*(\alpha), H_{Z'})$ i un isomorfisme:

$$f_M^* \colon H^0(X_Z, L) \xrightarrow[\sim]{} H^0(X_{Z'}, f_M^*(L)).$$

Existeix, doncs, una *acció del grup simplèctic sobre funcions theta*, que s'explicitarà al tema següent.

L'acció del grup G_D sobre $\mathcal{H}_g$ és més natural que la del grup Γ_D. No obstant, quan es volen construir espais de moduli de varietats abelianes polaritzades amb alguna estructura afegida, és preferible utilitzar el grup Γ_D, ja que aquests espais de moduli s'obtenen com a quocients de $\mathcal{H}_g$ per subgrups de Γ_D expressables en termes d'integralitat de les matrius, d'una manera molt anàloga a la dels subgrups de congruència clàssics [LB, 8.3].

Bibliografia

[K] G. R. Kempf, *Complex Abelian Varieties and Theta Functions*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1991.

[LB] H. Lange, Ch. Birkenhake, *Complex Abelian Varieties*, Grundlehren der matematischen Wissenschaften, 302, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1992.

[SD] H. P. F. Swinnerton-Dyer, *Analytic Theory of Abelian Varieties*, London Mathematical Society Lecture Notes Series, 14, Cambridge University Press, 1974.

E. Nart

Departament de Matemàtiques

Universitat Autònoma de Barcelona, Edifici C

E-08193, Bellaterra

nart@manwe.mat.uab.es

Capítol 6

Thetanullwerte i varietats modulars

A. Travesa

El contingut d'aquest capítol va ser exposat en el Seminari de Teoria de Nombres (UB-UAB-UPC) el dia 7 de febrer de 2003, a la Facultat de Nàutica de la Universitat Politècnica de Catalunya, en la dissetena edició del seminari.

6.1 Generalitats

6.1.1 El grup simplèctic

Fixem un anell commutatiu, R, que sovint serà un cos k o bé l'anell dels nombres enters $\mathbb{Z}$.

Considerarem matrius en $\mathbf{M}(2n, R)$; en particular, indicarem per $1 = 1_n \in \mathbf{M}(n, R)$ la matriu identitat de n files i n columnes, i per I la matriu $I := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}(2n, R)$. Com que $\det I = 1$, podem pensar la matriu I com la matriu corresponent, en una certa base, a una forma bilineal anti-

Amb suport parcial de la DGI, BFM2000-0627 i BFM2003-01898.

simètrica no degenerada. El grup simplèctic és el grup de les matrius que, per canvi de base, deixen aquesta forma invariant.

6.1.1 Definició. $\mathbf{Sp}(n,R) := \{M \in \mathbf{M}(2n,R) :\ M^t I M = I\}$.

Notem que $1 = \det I = \det M^t \det I \det M = (\det M)^2$, de manera que M ha de ser invertible; per tant,

$$\mathbf{Sp}(n,R) := \{M \in \mathbf{GL}(2n,R) :\ M^t I M = I\}.$$

A més a més, si escrivim $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$, amb $A,B,C,D \in \mathbf{M}(n,R)$, la condició que $M \in \mathbf{Sp}(n,R)$ implica que $A^tC = C^tA$, $B^tD = D^tB$, $A^tD - C^tB = 1$; per tant,
$\mathbf{Sp}(n,R) = \{M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathbf{M}(2n,R) :\ A,B,C,D \in \mathbf{M}(n,R),\ A^tC = C^tA,\ B^tD = D^tB,\ A^tD - C^tB = 1\}$.

6.1.2 Exemple. L'exemple més senzill correspon al cas $n = 1$; aquesta darrera descripció de $\mathbf{Sp}(n,R)$ ens ensenya que $\mathbf{Sp}(1,R) = \mathbf{SL}(2,R)$; així, també podem pensar el grup simplèctic com una generalització del grup especial lineal.

6.1.3 • En general, se satisfà que si $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathbf{Sp}(n,R)$, llavors $M^{-1} = \begin{bmatrix} D^t & -B^t \\ -C^t & A^t \end{bmatrix}$ i $M^t = \begin{bmatrix} A^t & C^t \\ B^t & D^t \end{bmatrix}$.

• El grup $\mathbf{Sp}(n,R)$ és estable per transposició, de manera que la transposició de matrius $M \mapsto M^t$ proporciona un antiautomorfisme involutiu de $\mathbf{Sp}(n,R)$.

• Com a conseqüència, també se satisfan les relacions $AB^t = BA^t$, $CD^t = DC^t$, $AD^t - BC^t = 1$.

6.1.4 Observació. Notem que:

• $I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{Sp}(n,R)$.

• Per a tota matriu simètrica $S = S^t \in \mathbf{M}(n, R)$, és $M := \begin{bmatrix} 1 & S \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{Sp}(n, R)$.

• Per a tota matriu invertible $U \in \mathbf{GL}(n, R)$, és $M := \begin{bmatrix} U^t & 0 \\ 0 & U^{-1} \end{bmatrix} \in \mathbf{Sp}(n, R)$.

6.1.5 És ben conegut que, per a $n = 1$, les matrius $I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, usualment anomenada S, i $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, usualment anomenada T, generen tot el grup $\mathbf{SL}(2, \mathbb{Z})$.

6.1.6 Proposició. *Sigui $R = \mathbb{Z}$ o bé $R = k$, un cos qualsevol. El conjunt de matrius*

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & S \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : S = S^t \in \mathbf{M}(n, R) \right\} \bigcup \left\{ I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}(2n, R) \right\}$$

és un conjunt de generadors del grup simplèctic $\mathbf{Sp}(n, R)$. □

6.1.7 Definició. El grup modular de Siegel és el grup $\Gamma_n := \mathbf{Sp}(n, \mathbb{Z})$.

6.1.8 Exercici. El centre de Γ_n és $\{\pm 1\}$.

6.1.2 Subgrups de congruència

Per a tot nombre enter $q > 0$, podem considerar el morfisme de grups de reducció mòdul q,

$$\Gamma_n = \mathbf{Sp}(n, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbf{Sp}(n, \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}).$$

6.1.9 Definició. S'anomena subgrup principal de congruència de Γ_n, de nivell q, el nucli $\Gamma_n[q] := \ker(\Gamma_n \longrightarrow \mathbf{Sp}(n, \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}))$.

6.1.10 Observació. Clarament, $\Gamma_n[1] = \Gamma_n$.

6.1.11 Exemple. En el cas $n = 1$, recuperem els grups principals de congruència del grup modular: $\Gamma_1[q] = \Gamma[q] \subseteq \mathbf{SL}(2,\mathbb{Z})$.

6.1.12 Definició. Un subgrup qualsevol $\Gamma \subseteq \mathbf{Sp}(n,\mathbb{R})$ s'anomena un subgrup de congruència si existeix un nombre enter $q \geq 1$ tal que Γ conté $\Gamma_n[q]$ com a subgrup d'índex finit. S'anomena nivell de Γ el menor valor de $q \geq 1$ per al qual se satisfà aquesta propietat.

6.1.13 Observació. Es pot provar que, per a tot $n > 1$, tot subgrup normal $\Gamma \subseteq \Gamma_n$ no inclòs en el centre, $\{\pm 1\}$, és un subgrup de congruència. Com a conseqüència, tot subgrup d'índex finit $\Gamma \subseteq \Gamma_n$ és un subgrup de congruència.

6.1.14 El grup theta. El grup $\Gamma_{n,\theta}$, format per les matrius $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \Gamma_n$ tals que els elements de la diagonal principal de cadascuna de les matrius AB^t, CD^t són parells, s'anomena el grup theta; és un subgrup de congruència de nivell 2 (cf. més avall).

6.1.15 Exemple. En el cas $n = 1$, el grup $\mathbf{SL}(2,\mathbb{Z})$ conté tres subgrups de congruència de nivell 2 que continguin $\Gamma[2]$ com a subgrup d'índex 2; són els grups $\Gamma_0[2]$, $\Gamma^0[2]$ i el grup theta. Aquest grup és format per les matrius que, reduïdes mòdul 2, són una de les matrius $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

6.1.16 El grup de Hecke generalitzat. La generalització natural en aquest context dels grups de congruència $\Gamma_0[q] \subseteq \mathbf{SL}(2,\mathbb{Z})$ són els anomenats grups de Hecke generalitzats $\Gamma_{n,0}[q] := \{M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \Gamma_n : C \equiv 0 \pmod{q}\}$.

6.1.17 La variant theta del grup de Hecke generalitzat. És el grup $\Gamma_{n,0,\theta}[q]$, format per les matrius $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \Gamma_{n,0}[q]$ tals que els elements de la diagonal principal de la matriu $\frac{1}{q}CD^t$ són parells.

6.1.18 El grup d'Igusa. És el grup $\Gamma_n[q,2q]$ format per les matrius $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \Gamma_n[q]$ tals que els elements de la diagonal principal de cadascuna de les dues matrius $\frac{1}{q}AB^t$ i $\frac{1}{q}CD^t$ són parells.

6.1.19 Les propietats següents són evidents.

- $\Gamma_{n,\theta} = \Gamma_n[1,2]$.
- $\Gamma_n[2q] \subseteq \Gamma_n[q,2q] \subseteq \Gamma_n[q]$.

6.1.20 Proposició. *El grup d'Igusa $\Gamma_n[q,2q]$ és un subgrup normal de $\Gamma_{n,\theta}$. A més a més, si q és parell, $\Gamma_n[q,2q]$ és un subgrup normal de Γ_n.* $\square$

6.1.3 El semiespai superior de Siegel

Recordem que en el cas modular considerem el semiplà superior complex $\mathcal{H} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$.

6.1.21 Per a una matriu simètrica real, $Y = Y^t \in \mathbf{M}(n,\mathbb{R})$, escriurem $Y > 0$ per a indicar que la forma bilineal Y és definida positiva; en particular, si $Z = Z^t \in \mathbf{M}(n,\mathbb{C})$ és una matriu simètrica complexa, $\operatorname{Im}(Z) > 0$ indicarà que la forma bilineal real definida per la matriu formada per la part imaginària de les entrades de Z és una forma definida positiva.

6.1.22 Definició. Anomenarem semiespai superior de Siegel el conjunt de matrius

$$\mathcal{H}_n := \{Z \in \mathbf{M}(n,\mathbb{C}) : Z = Z^t, \operatorname{Im}(Z) > 0\}.$$

Escriurem $Z = X + iY$, amb $X, Y \in \mathbf{M}(n,\mathbb{R})$, de manera que si $Z = Z^t$, també se satisfà que $X = X^t$, $Y = Y^t$; així, $X = \operatorname{Re}(Z)$, $Y = \operatorname{Im}(Z)$, i $\mathcal{H}_n = \{Z \in \mathbf{M}(n,\mathbb{C}) : Z = Z^t, Y > 0\}$.

6.1.23 Observació. $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}$ és el semiplà superior complex.

6.1.24 Proposició. *El semiespai superior de Siegel $\mathcal{H}_n$ és un subdomini obert i convex de l'espai de totes les matrius simètriques complexes $\mathcal{H}_n \subseteq \mathcal{Z}_n := \{Z \in \mathbf{M}(n,\mathbb{C}) : Z = Z^t\}$.* $\square$

En particular, $\dim \mathcal{H}_n = n(n+1)$, on $\dim = \dim_{\mathbb{R}}$. Com a exemples, els valors de la dimensió de $\mathcal{H}_n$ per a $1 \leq n \leq 6$ són $2, 6, 12, 20, 30, 42$.

El fet que el semiespai superior de Siegel sigui convex fa que hi hagi arrels quadrades holomorfes per a les funcions complexes sense zeros.

6.1.25 Proposició. *Si $f : \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathbb{C}$ és una funció holomorfa sense zeros, existeix una arrel quadrada holomorfa de f; és a dir, existeix una funció holomorfa $h : \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que per a tot $Z \in \mathcal{H}_n$ és $f(z) = h(z)^2$.* $\square$

6.1.4 Acció del grup simplèctic

Ara convé definir l'acció del grup simplèctic en el semiespai de Siegel, de manera semblant al cas de l'acció del grup modular en el semiplà superior complex.

6.1.26 Proposició. *Siguin $Z \in \mathcal{H}_n$ i $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{R})$. Llavors,*

(a) *La matriu $CZ + D$ és invertible.*

(b) $M\langle Z\rangle := (AZ + B)(CZ + D)^{-1} \in \mathcal{H}_n$. $\square$

6.1.27 Corol·lari. (a) *El grup $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{R})$ actua per l'esquerra en $\mathcal{H}_n$; és a dir, per a tot $Z \in \mathcal{H}_n$ i totes les matrius $M, N \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{R})$, se satisfan les propietats $1\langle Z\rangle = Z$, $M\langle N\langle Z\rangle\rangle = (MN)\langle Z\rangle$.*

(b) *L'acció del grup $\Gamma_n/\{\pm 1\}$ és fidel, en el sentit que $M\langle Z\rangle = N\langle Z\rangle$ per a tot $Z \in \mathcal{H}_n$ si, i només si, $N = \pm M$.*

(c) *Les úniques aplicacions biholomorfes $\mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_n$ són les aplicacions donades per $Z \mapsto M\langle Z\rangle$.* $\square$

6.1.28 Exemples. L'acció del grup simplèctic és, doncs, molt semblant a l'acció del grup $\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$ en el semiplà superior complex. En efecte, se satisfan les propietats següents.

- (Simetria) Per a $M = I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, és $I\langle Z\rangle = -Z^{-1}$.
- (Translacions) Per a $M = \begin{bmatrix} 1 & S \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $S = S^t \in \mathbf{M}(n, \mathbb{R})$, és $M\langle Z\rangle = Z + S$.

- (Canvis de base reals) Per a $M = \begin{bmatrix} U^t & 0 \\ 0 & U^{-1} \end{bmatrix}$, $U \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$, és

$M\langle Z\rangle = U^t Z U$.

Així, l'òrbita d'un punt $Z \in \mathcal{H}_n$ per l'acció de Γ_n conté, en particular, totes les matrius que s'obtenen de Z per un canvi de base real (com a forma bilineal).

6.2 Sistemes de multiplicadors

Volem definir formes modulars de pes semienter; per tant, ens cal estudiar els sistemes de multiplicadors, que són, essencialment, signes per a les equacions funcionals. Aquests signes provenen de l'elecció d'arrels quadrades adequades.

6.2.1 Sistemes de multiplicadors

Per a $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{R})$ i $Z \in \mathcal{H}_n$, posem

$$J(M, Z) := CZ + D.$$

6.2.1 Proposició. *Per a $M, N \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{R})$ i $Z \in \mathcal{H}_n$, se satisfà la condició de cocicle per a J:*

$$J(MN, Z) = J(M, N\langle Z\rangle)J(N, Z). \square$$

6.2.2 Observació. Per a cada matriu $M \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{R})$, la funció $\mathcal{H}_n \longrightarrow \mathbb{C}$ definida per

$$Z \mapsto \det(CZ + D)$$

és holomorfa i, com que $CZ + D$ és invertible, no té zeros. Per tant, admet una arrel quadrada holomorfa (i, en conseqüència, dues que només difereixen en un signe). En triarem i fixarem una, per a cada matriu $M \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{R})$, que escriurem

$$J_1(M, Z) := \sqrt{\det(CZ + D)}.$$

6.2.3 Alerta! En el cas $n > 1$, pot succeir que per a certa matriu $M \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{R})$ i certs punts $Z_1, Z_2 \in \mathcal{H}_n$, sigui

$$\det(CZ_1 + D) = \det(CZ_2 + D),$$

però que, en canvi, se satisfaci que

$$\sqrt{\det(CZ_1 + D)} = -\sqrt{\det(CZ_2 + D)}.$$

6.2.4 Definició. Per a tot $r \in \mathbb{Z}$, escriurem

$$J_r(M, Z) := \det(CZ + D)^{r/2} = \sqrt{\det(CZ + D)}^{\,r}.$$

Notem que, en particular, se satisfà que $J_2 = \det J$.

Per a la dependència funcional respecte de les matrius M, tenim el resultat següent.

6.2.5 Proposició. *Per a tot $r \in \mathbb{Z}$, existeix una aplicació*

$$w = w_r : \mathbf{Sp}(n, \mathbb{R}) \times \mathbf{Sp}(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \{\pm 1\}$$

tal que per a tot $M, N \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{R})$ i tot $Z \in \mathcal{H}_n$ és

$$J_r(MN, Z) = w_r(M, N) J_r(M, N\langle Z \rangle) J_r(N, Z).$$

L'aplicació w_r només depèn de la classe de congruència de $r \pmod 2$; i se satisfà que w_r és constant i igual a 1 si, i només si, r és parell. $\square$

6.2.6 Definició. Siguin $\Gamma \subseteq \mathbf{Sp}(n, \mathbb{R})$ un subgrup de congruència i $r \in \mathbb{Z}$ un nombre enter. Un sistema de multiplicadors per a Γ, de pes $\dfrac{r}{2}$, és una aplicació

$$v : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

tal que

(a) per a tot $M, N \in \Gamma$ és $v(MN) = w_r(M, N) v(M) v(N)$; i

(b) si $-1 \in \Gamma$, llavors $v(-1) \det(0Z - 1)^{r/2} = 1$.

6.2.7 Observacions. • En el cas r parell, un sistema de multiplicadors no és res més que un caràcter del grup Γ.

• Si v és un sistema de multiplicadors (per a Γ, de pes $r/2$), llavors, per a l'aplicació

$$\begin{aligned} J_{r,v} : \Gamma \times \mathcal{H}_n &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ (M, Z) &\mapsto v(M) J_r(M, Z) = \\ & v(M) \det(CZ + D)^{r/2} \end{aligned}$$

se satisfà la condició de cocicle:

$$J_{r,v}(MN, Z) = J_{r,v}(M, N\langle Z \rangle) J_{r,v}(N, Z).$$

• Com abans, aquesta condició només depèn de $r \pmod 2$.

6.2.2 Acció sobre les funcions

6.2.8 Definició. Donades una funció $f : \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathbb{C}^*$, un nombre enter $r \in \mathbb{Z}$, i una matriu $M \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{R})$, considerarem l'acció de pes r de M sobre f com la funció

$$f|M := f|_r M : \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

definida per

$$f|M(Z) := \det(CZ + D)^{-r/2} f(M\langle Z\rangle) = J_{-r}(M, Z) f(M\langle Z\rangle).$$

D'aquesta manera, tenim que

$$F|(MN) = w_r(M, N)(F|M)|N;$$

per tant, per a $r \equiv 1 \pmod 2$, això no és realment una acció del grup Γ en el conjunt de les funcions.

La caracterització següent pot ser útil.

6.2.9 Proposició. *Una funció $v : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}^*$ és un sistema de multiplicadors (per a Γ, de pes $r/2$), si, i només si, existeix una funció no nul·la $f : \mathcal{H}_n \rightarrow \mathbb{C}$ tal que per a tot $M \in \Gamma$ és $f|_r M = v(M) f$.* $\Box$

6.2.3 El sistema de multiplicadors theta

El sistema de multiplicadors theta és un sistema de multiplicadors associat al grup theta, $\Gamma_{n,\theta}$, i que té relació amb un dels *Thetanullwerte* més senzills. Comencem per escriure aquesta funció.

6.2.10 Lema. *La sèrie*

$$\theta(Z) := \sum_{g \in \mathbb{Z}^n} \exp(\pi i g^t Z g)$$

defineix una funció holomorfa en $\mathcal{H}_n$.

Demostració: La sèrie és uniformement convergent en dominis de la forma $\{Z \in \mathcal{H}_n : Y - \delta 1 \geq 0\}$, per a $\delta > 0$. $\Box$

6.2.11 Proposició. *Existeix un sistema de multiplicadors*

$$v_\theta : \Gamma_{n,\theta} \longrightarrow \mathbb{C}^*,$$

de pes $\frac{1}{2}$, *tal que per a tot* $Z \in \mathcal{H}_n$ *i tota matriu* $M \in \Gamma_{n,\theta}$ *és*

$$\theta(M\langle Z\rangle) = v_\theta(M)\sqrt{\det(CZ+D)}\;\theta(Z).$$

A més a més, $v_\theta(M)^8 = 1$, *per a tot* $M \in \Gamma_{n,\theta}$. $\square$

6.2.12 Observació. Sigui $v : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}^*$ un sistema de multiplicadors per a Γ de pes $r/2$, $r \in \mathbb{Z}$. Llavors, la funció

$$\begin{aligned} \Gamma \cap \Gamma_{n,\theta} &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ M &\mapsto \frac{v(M)}{v_\theta(M)^r} \end{aligned}$$

és un caràcter. Es pot provar que, per a $n > 1$, existeix un subgrup de congruència $\Gamma_0 \subseteq \Gamma \cap \Gamma_{n,\theta}$ tal que les restriccions a Γ_0 de v_θ^r i de v coincideixen; és a dir, que v coincideix amb una potència de v_θ en Γ_0.

6.2.13 Hipòtesi. Fins i tot per al cas $n = 1$, tots els sistemes de multiplicadors que considerarem coincideixen amb una potència del sistema de multiplicadors theta, v_θ, en un cert subgrup de congruència.

Per a descriure les propietats més importants del sistema de multiplicadors theta ens cal la definició següent.

6.2.14 Definició. Una matriu real M s'anomena projectivament racional si és un múltiple escalar d'una matriu racional.

6.2.15 Notació. Escriurem Ω_n per a denotar el subgrup de $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{R})$ format per les matrius $M \in \mathbf{Sp}(n, \mathbb{R})$ que són, a més a més, projectivament racionals.

6.2.16 Lema. *Siguin* $\Gamma \subseteq \mathbf{Sp}(n, \mathbb{R})$ *un subgrup de congruència i* $N \in \Omega_n$. *Llavors,*

(a) $\Gamma^N := N^{-1}\Gamma N$ *també és un subgrup de congruència.*

(b) *Si* $v : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}^*$ *és un sistema de multiplicadors de pes* $r/2$, $r \in \mathbb{Z}$, *llavors, l'aplicació* $v^N : \Gamma^N \longrightarrow \mathbb{C}^*$ *definida per*

$$v^N(N^{-1}MN) := v(M)w_r(M,N)w_r(N,N^{-1}MN),$$

per a $M \in \Gamma$, *és un sistema de multiplicadors per a* Γ^N, *de pes* $r/2$. $\square$

6.2.17 Definició. Aquest sistema s'anomena el sistema de multiplicadors conjugat (per N) de v.

6.2.18 Observació. Cal veure que v^N satisfà la hipòtesi 6.2.13 de més amunt. I això és suficient veure-ho per a $v = v_\theta$.

6.2.19 Proposició. (a) La hipòtesi 6.2.13 se satisfà per a tot conjugat de v_θ.

(b) La classe dels sistemes de multiplicadors per als quals se satisfà la hipòtesi 6.2.13 és tancada per conjugació.

(c) v_θ i tots els seus conjugats v_θ^N, amb $N \in \Omega_n$, coincideixen en el grup d'Igusa $\Gamma_n[4, 8]$. A més a més, v_θ^2 és trivial en aquest grup. $\square$

6.3 Formes modulars de Siegel

6.3.1 Representacions

Per a la definició de les formes modulars de Siegel, ens cal fixar una representació

$$\rho_0 : \mathbf{GL}(n, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbf{GL}(\mathcal{Z}),$$

on $\mathcal{Z}$ és un $\mathbb{C}$-espai vectorial de dimensió finita.

A més a més, suposarem que ρ_0 és racional; és a dir, que existeix $k \in \mathbb{Z}$ tal que la representació $A \mapsto (\det A)^{-k} \rho_0(A)$ és polinòmica.

6.3.1 Observació. Per a una representació racional, sempre existeix un valor màxim de k tal que $A \mapsto (\det A)^{-k} \rho_0(A)$ és polinòmica; aquest màxim, $k := k(\rho_0)$, s'anomena el pes de ρ_0.

6.3.2 Definició. Es diu que una representació racional ρ_0 és reduïda si $k(\rho_0) = 0$; és a dir, si és polinòmica i no s'anul·la en la hipersuperfície $\det A = 0$.

6.3.3 Definició. Dues parelles (ρ_0, r), (ρ_0', r'), on ρ_0, ρ_0' són representacions racionals i $r, r' \in \mathbb{Z}$ són nombres enters, s'anomenen equivalents si

(a) $r \equiv r' \pmod 2$; i

(b) per a tot $A \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$, és $\rho_0'(A) = \rho_0(A)(\det A)^{\frac{r-r'}{2}}$.

Denotarem la classe d'equivalència per $\rho = [\rho_0, r]$.

6.3.4 Observacions. • A cada classe d'equivalència hi ha exactament un representant (ρ_0, r) tal que ρ_0 és reduïda; anomenarem r el pes de ρ.

• Si r és parell, la classe d'equivalència $\rho = [\rho_0, r]$ és unívocament determinada per la representació

$$\rho : A \mapsto \rho_0(A)(\det A)^{r/2}.$$

• En qualsevol cas, escriurem $\rho(A) = \rho_0(A)(\det A)^{r/2}$ per a indicar la classe d'equivalència. Notem que, un cop haguem triat l'arrel quadrada $\sqrt{\det(CZ+D)}$, l'expressió

$$\rho(CZ+D) := \rho_0(CZ+D)\sqrt{\det(CZ+D)}^{\,r}$$

està ben definida i només depèn de la classe ρ.

6.3.2 Formes modulars de Siegel

Siguin, ara, $\Gamma \subseteq \mathbf{Sp}(n,\mathbb{R})$ un subgrup de congruència i $v : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}^*$ un sistema de multiplicadors de pes $r/2$. Llavors, per a

$$M \mapsto v(M)\rho(CZ+D), \qquad Z \in \mathcal{H}_n,$$

se satisfà la condició de cocicle.

Doncs, té sentit considerar funcions holomorfes $f : \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{Z}$, de valors en l'espai de la representació $\mathcal{Z}$, per a les quals se satisfaci la llei de transformació

$$f(M\langle Z\rangle) = v(M)\rho(CZ+D)f(Z),$$

per a $M \in \Gamma$, $Z \in \mathcal{H}_n$.

Per a aquestes funcions, i de la hipòtesi 6.2.13 sobre v, se segueix que existeix una xarxa L de matrius simètriques reals per a la qual la funció f és periòdica, de xarxa de períodes L; i, per tant, f admet un desenvolupament en sèrie de Fourier de la forma

$$f(Z) = \sum_{T \in L^*} a(T) \exp(2\pi i \operatorname{tr}(TZ)),$$

on $\operatorname{tr}(TZ)$ és la traça de TZ, $L^* := \{T \in \mathbf{M}(n,\mathbb{R}) : T = T^t, \operatorname{tr}(TX) \in \mathbb{Z}$, per a tot $X \in L\}$ és la xarxa dual de L, i, naturalment, $a(T) \in \mathcal{Z}$.

El fet que per a f se satisfaci la llei de transformació

$$f(M\langle Z\rangle) = v(M)\rho(CZ+D)f(Z),$$

implica que per a tota matriu $N \in \Omega_n$, la funció conjugada

$$f^N(Z) := (f|_\rho N)(Z) = \rho(CZ+D)^{-1}f(N\langle Z\rangle)$$

hereta de f una fórmula de transformació per al grup conjugat $N^{-1}\Gamma N$; més concretament:

$$f^N(M\langle Z\rangle) = v^N(M)\rho(CZ+D)f^N(Z).$$

Per tant, f^N també admet un desenvolupament en sèrie de Fourier

$$f^N(Z) = \sum_T a^N(T)\exp(2\pi i\,\mathrm{tr}(TZ)),$$

on T recorre una xarxa que depèn de f i de N.

6.3.5 Definició. Siguin $\Gamma \subseteq \mathbf{Sp}(n,\mathbb{R})$ un subgrup de congruència, $r \in \mathbb{Z}$ un nombre enter, $v : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}^*$ un sistema de multiplicadors de pes $r/2$, $\rho_0 : \mathbf{GL}(n,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbf{GL}(\mathcal{Z})$ una representació racional, i $f : \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{Z}$ una funció holomorfa.

Es diu que f és una forma modular de Siegel respecte de Γ, $\rho := [\rho_0, r]$, i v, si se satisfà la llei de transformació

$$f(M\langle Z\rangle) = v(M)\rho(CZ+D)f(Z), \qquad Z \in \mathcal{H}_n,\ M \in \Gamma,$$

i, a més a més, per a tota matriu $N \in \Omega_n$ se satisfà que

$$a^N(T) \neq 0 \Rightarrow T \geq 0.$$

S'anomena pes de f la meitat del pes de ρ.

6.3.3 Formes parabòliques

Posem $\Omega_{n,0} \subseteq \Omega_n$ el subgrup de $\mathbf{Sp}(n,\mathbb{R})$ format per les matrius projectivament racionals de la forma

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}.$$

6.3.6 Observacions. • La propietat $a^N(T) \neq 0 \implies T \geq 0$ només depèn de la doble classe en $\Gamma\backslash\Omega_n/\Omega_{n,0}$. I, com que el conjunt $\Gamma\backslash\Omega_n/\Omega_{n,0}$ és finit, només cal comprovar una quantitat finita de condicions $a^N(T) \neq 0 \implies T \geq 0$.

• A més a més, en el cas $\Gamma = \Gamma_n = \mathbf{Sp}(n,\mathbb{Z})$, és suficient considerar $N = 1$. I, en el cas $n > 1$, aquestes condicions es dedueixen de la fórmula de transformació, de manera que ni tan sols cal posar-les a la definició.

6.3.7 Definició. Una forma modular s'anomena parabòlica si se satisfà la condició més forta

$$a^N(T) \neq 0 \implies T > 0.$$

6.3.8 De nou, només cal considerar un conjunt de representants N de $\Gamma\backslash\Omega_n/\Omega_{n,0}$.

6.3.9 Notació. Posarem $[\Gamma, \rho, v]$ per a l'espai de totes les formes modulars, i $[\Gamma, \rho, v]_0$ per al subespai de les formes parabòliques. Són espais vectorials complexos de dimensió finita.

6.3.10 Proposició.

(a) *Tota forma modular de pes negatiu és idènticament nul·la.*

(b) *Tota forma modular de pes zero és constant.* $\square$

6.4 Els Thetanullwerte com a formes modulars

Recordem que la sèrie

$$\theta(Z) := \sum_{g\in\mathbb{Z}^n} \exp(\pi i g^t Z g), \qquad Z \in \mathcal{H}_n.$$

defineix una funció holomorfa en el semiespai $\mathcal{H}_n$. Es tracta d'establir el resultat següent.

6.4.1 Teorema.

$$\theta \in [\Gamma_{n,\theta}, 1/2, v_\theta].$$

En altres paraules, la sèrie $\theta(Z) := \sum_{g\in\mathbb{Z}^n} \exp(\pi i g^t Z g)$ *defineix una forma modular de Siegel de pes* $1/2$ *respecte del grup theta* $\Gamma_{n,\theta}$*, i del sistema de multiplicadors* v_θ*.*

En particular, se satisfà la llei de transformació

$$\theta((AZ+B)(CZ+D)^{-1}) = v_\theta(M)\sqrt{\det(CZ+D)}\;\theta(Z),$$

per a tot $Z \in \mathcal{H}_n$ *i tota matriu* $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \Gamma_{n,\theta}$.

Dedicarem la resta d'aquesta secció a fer un esboç d'una demostració.

6.4.1 Thetanullwerte amb característiques i amb factors exponencials

6.4.2 Definició. Cal considerar les característiques, que són vectors de la forma

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \qquad a, b \in \mathbb{C}^n,$$

i també els Thetanullwerte amb característica:

$$\theta[\mathbf{m}](Z) := \sum_{g \in \mathbb{Z}^n} \exp(\pi i((g+a)^t Z(g+a) + 2(g+a)^t b)).$$

6.4.3 Observació. Notem que hi ha una certa similitud de la definició de la funció $\theta[\mathbf{m}](Z)$ (respecte de la $\theta(Z)$) amb la definició de la funció ζ de Hurwitz (respecte de la ζ de Riemann).

6.4.4 Proposició. (a) *La sèrie* $\theta[\mathbf{m}](Z)$ *defineix una funció holomorfa (de* Z *i de* $\mathbf{m}$*) en* $\mathcal{H}_n \times \mathbb{C}^{2n}$.

(b) *Llevat d'un factor constant,* $\theta[\mathbf{m}](Z)$ *només depèn de* $\mathbf{m}$ (mod 1)*; amb més precisió, si* $\mathbf{m} \equiv \tilde{\mathbf{m}} = \begin{bmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{b} \end{bmatrix}$ (mod 1)*, llavors*

$$\theta[\mathbf{m}] = \exp(2\pi i a^t(b-\tilde{b}))\theta[\tilde{\mathbf{m}}]. \ \square$$

6.4.5 Observació. Notem l'aparició dels Thetanullwerte amb factors exponencials.

Cal estudiar el comportament de les característiques sobre les matrius.

6.4.6 Definició. Per a $\mathbf{m} \in \mathbb{C}^{2n}$ i $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \Gamma_n$, posem

$$M\{\mathbf{m}\} := (M^t)^{-1}\mathbf{m} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} (CD^t)_0 \\ (AB^t)_0 \end{bmatrix},$$

on, per a una matriu simètrica S, $S_0 := \begin{bmatrix} s_{1,1} \\ \vdots \\ s_{n,n} \end{bmatrix}$ és el vector format pels elements de la diagonal principal de S.

Se satisfan les propietats següents.

6.4.7 • $1\{\mathbf{m}\} = \mathbf{m}$;

• Per a $M, N \in \Gamma_n$ i per a $\mathbf{m} \in \mathbb{C}^{2n}$, és $(MN)\{\mathbf{m}\} \equiv M\{N\{\mathbf{m}\}\}$ (mod 1).

És a dir, Γ_n opera per l'esquerra en $(\mathbb{C}/\mathbb{Z})^{2n}$.

6.4.2 Fórmula de transformació dels Thetanullwerte

6.4.8 Proposició. *Per a $M \in \Gamma_n$, $Z \in \mathcal{H}_n$, i $\mathbf{m} \in \mathbb{C}^{2n}$, se satisfà que*

$$\theta[M\{\mathbf{m}\}](M\langle Z\rangle)$$
$$\shortparallel$$
$$v(M,\mathbf{m})\sqrt{\det(CZ+D)}\;\theta[\mathbf{m}](Z),$$

on $v(M,\mathbf{m})$ indica un cert nombre complex independent de Z.

A més a més, si $\mathbf{m}$ és real se satisfà que $|v(M,\mathbf{m})| = 1$, i si $\mathbf{m}$ és enter se satisfà que $v(M,\mathbf{m})^8 = 1$.

Demostració: És suficient fer la prova per als generadors de Γ_n; és a dir, per a les translacions $M = \begin{bmatrix} 1 & S \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, amb $S = S^t$, i per a la simetria $M = I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Per al cas de les translacions, se satisfà la propietat següent.

- Si $\tilde{\mathbf{m}} := \begin{bmatrix} a \\ b + Sa + \frac{1}{2}S_0 \end{bmatrix}$, llavors

$$\theta[\mathbf{m}](Z+S) = \exp(\pi i a^t Sa)\theta[\tilde{\mathbf{m}}](Z).$$

I, per al cas de la simetria, cal provar la fórmula d'inversió:

$$\theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (-Z^{-1}) = \exp(2\pi i a^t b)\sqrt{\det(Z/i)}\ \theta \begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix} (Z),$$

on la branca de l'arrel quadrada és definida per $\sqrt{\det(Z/i)} = 1$, per a $Z := i1$. □

Per a estudiar com depenen els nombres $v(M, \mathbf{m})$ de la característica $\mathbf{m}$, tenim el resultat següent.

6.4.9 Proposició.

$$v(M, \mathbf{m}) = v_\theta(M)\exp(2\pi i \Phi_{\mathbf{m}}(M)),$$

on

$$-2\Phi_{\mathbf{m}}(M) := a^t(B^tD)a + b^t(A^tC)b - 2a^tB^tCb - (Da - Cb)^t(AB^t)_0. \ \square$$

Si posem tot això junt, obtenim la fórmula de transformació dels Thetanullwerte sota l'acció del grup simplèctic.

6.4.10 Teorema. *Per a $M \in \Gamma_n$, $Z \in \mathcal{H}_n$, i $\mathbf{m} \in \mathbb{C}^{2n}$, se satisfà que*

$$\theta[M\{\mathbf{m}\}](M\langle Z\rangle)$$

$$\shortparallel$$

$$v_\theta(M)\exp(2\pi i \Phi_{\mathbf{m}}(M))\sqrt{\det(CZ+D)}\ \theta[\mathbf{m}](Z),$$

on

$$-2\Phi_{\mathbf{m}}(M) := a^t(B^tD)a + b^t(A^tC)b - 2a^tB^tCb - (Da - Cb)^t(AB^t)_0. \ \square$$

En el cas en què M pertany al grup theta, la fórmula de transformació és més senzilla.

6.4.11 Teorema. *Per a la funció theta modificada*

$$\tilde{\theta}[\mathbf{m}] := \exp(-\pi i a^t b)\theta[\mathbf{m}],$$

i per a $M \in \Gamma_{n,\theta}$, $Z \in \mathcal{H}_n$, *i* $\mathbf{m} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2n}$, *se satisfà que*

$$\tilde{\theta}\left[\begin{bmatrix} D & -C \\ -B & A \end{bmatrix}\mathbf{m}\right](M\langle Z\rangle) = v_\theta(M)\sqrt{\det(CZ+D)}\;\tilde{\theta}[\mathbf{m}](Z),$$

on $v_\theta(M)$ *és una arrel vuitena de la unitat, independent de* $\mathbf{m}$. $\square$

Notem que $\begin{bmatrix} D & -C \\ -B & A \end{bmatrix} = (M^t)^{-1}$.

6.4.3 Sumes de Gauss

Es tracta d'expressar el sistema de multiplicadors theta a partir de sumes de Gauss, en el cas en què D és invertible. Cal començar per elegir una arrel quadrada de $\det(CZ+D)$.

Sigui $h(Z) := \sqrt{\det(Z/i)}$ l'única funció holomorfa en $\mathcal{H}_n$ tal que

$$h(Z)^2 = \det(Z/i); \qquad h(i1) = 1.$$

Aleshores, definim

$$\sqrt{\det(CZ+D)} := \sqrt{\det D}\; h(Z)\, h(-Z^{-1} - D^{-1}C),$$

on

$$\begin{aligned} \sqrt{\det D} &> 0, \quad \text{si } \det D > 0; \\ -i\sqrt{\det D} &> 0, \quad \text{si } \det D < 0. \end{aligned}$$

Se satisfà el resultat següent.

6.4.12 Proposició. *Sigui* $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \Gamma_{n,\theta}$, *i suposem que* $\det D \neq 0$. *Llavors,*

$$v_\theta(M) = (\det D)^{-1/2} \sum_{h \in \mathbb{Z}^n / D\mathbb{Z}^n} \exp(\pi i h^t B D^{-1} h). \ \square$$

6.4.13 Definició. Siguin $C, D \in \mathbf{M}(n, \mathbb{Z})$ tals que $\det D \neq 0$, $CD^t \equiv 0 \pmod 2$, i $[C\ D]$ és la segona fila d'una matriu del grup $\Gamma_{n,\theta}$. Definim la suma de Gauss simplèctica

$$G_D(C) := \sum_{g \in \mathbb{Z}^n / D\mathbb{Z}^n} \exp(\pi i g^t C D^{-1} g).$$

6.4.14 Observació. En el cas $n = 1$, aquesta definició proporciona la igualtat

$$\begin{aligned} G_d(2c) &= \sum_{g \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} \exp(2\pi i c g^2 / d) \\ &= \sum_{t=0}^{d-1} \exp(2\pi i c t^2 / d) \\ &=: G(c, d); \end{aligned}$$

és a dir, la suma de Gauss clàssica.

6.5 Varietats modulars de Siegel

Sigui $\Gamma \subseteq \Gamma_n$ un subgrup de congruència. L'espai quocient $\Gamma \backslash \mathcal{H}_n$ és una varietat analítica complexa amb $\mathcal{H}_n$ com el seu recobridor universal. Es tracta d'establir una immersió quasiprojectiva complexa d'algunes varietats modulars de Siegel $\Gamma \backslash \mathcal{H}_n$.

6.5.1 Teoria clàssica de la reducció

Sigui $Y \in \mathbf{M}(n, \mathbb{R})$, $Y = Y^t$, $Y > 0$, una forma bilineal real definida positiva. Comencem per recordar la teoria clàssica de reducció de formes quadràtiques.

6.5.1 Lema. (Descomposició de Jacobi.) *Existeix una matriu triangular superior i amb els elements de la diagonal principal tots iguals a* 1,

$U \in \mathbf{SL}(2,\mathbb{R})$, tal que U^tYU és una matriu diagonal amb els elements de la diagonal principal tots positius. $\square$

6.5.2 Lema. (Teorema d'Hadamard.) $\det Y \leq Y_{1,1} \cdot \ldots \cdot Y_{n,n}$. $\square$

6.5.3 Lema. (Teorema d'Hermite.) *Sigui $\mu(Y) := \min\{g^tYg : g \in \mathbb{Z}^n, g \neq 0\}$. Llavors,*

$$\mu(Y)^n \leq (4/3)^{\frac{n(n-1)}{2}} \det Y. \ \square$$

6.5.4 Definició. Es diu que Y és M-reduïda (M, per Minkowski) si se satisfan les dues propietats següents:

(a) per a tot $g \in \mathbb{Z}^n$, si $\mathrm{mcd}(g_k, \ldots, g_n) = 1$ per a algun k, llavors $Y_{k,k} \leq g^tYg$;

(b) per a tot k, $1 \leq k \leq n-1$, és $Y_{k,k+1} \geq 0$.

Denotarem per $\mathcal{R}_n$ el conjunt de les matrius Y que són M-reduïdes.

6.5.5 Lema. *Per a tota matriu $Y = Y^t \in \mathbf{M}(n,\mathbb{R})$, $Y > 0$, existeixen matrius $U \in \mathbf{GL}(2,\mathbb{Z})$ i $Y' \in \mathcal{R}_n$ tals que $Y = UY'$.* $\square$

6.5.6 Lema. (Teorema de Minkowski.) *Existeixen dues constants positives c_1, c_2 tals que per a tota $Y \in \mathcal{R}_n$ és*

$$c_1 Y_{1,1} \cdot \ldots \cdot Y_{n,n} \leq \det Y \leq c_2 Y_{1,1} \cdot \ldots \cdot Y_{n,n}. \ \square$$

6.5.2 Domini fonamental

6.5.7 Definició. Sigui $Z = X + iY \in \mathcal{H}_n$, amb $X, Y \in \mathbf{M}(n,\mathbb{R})$, $X = X^t$, $Y = Y^t$, $Y > 0$. Es diu que Z és S-reduïda (S, per Siegel) si se satisfan les propietats següents:

(a) per a tot $M \in \Gamma_n$, $\det \mathrm{Im}(M\langle Z \rangle) \leq \det \mathrm{Im}(Z)$;

(b) Y és M-reduïda;

(c) per a $1 \leq i, j \leq n$, $|X_{i,j}| \leq 1/2$.

6.5.8 Observacions. • El conjunt $\mathcal{R}_n$ és tancat en el conjunt de les matrius simètriques (reals) definides positives. Com a conseqüència, el conjunt de les matrius S-reduïdes, posem $\mathcal{Z}_n$, és tancat en el semiespai de Siegel $\mathcal{H}_n$.

• El conjunt $\mathcal{S}_n$ també és tancat en el conjunt de totes les matrius simètriques, $\mathbb{Z}_n$.

6.5.9 Proposició. $\Gamma_n \cdot \mathcal{S}_n = \mathcal{H}_n$. $\square$

És a dir, tota matriu del semiespai de Siegel és la transformada per una matriu de $\Gamma_n = \mathbf{Sp}(n, \mathbb{Z})$ d'una matriu S-reduïda. Dit d'una altra manera, el conjunt $\mathcal{S}_n$ conté un domini fonamental per a Γ_n.

6.5.10 Lema. *Per a tot $c > 0$, el subconjunt*

$$\mathcal{S}_n(c) := \{Z \in \mathcal{S}_n : \det(\mathrm{Im}(M)) \leq c\}$$

o bé és buit o bé és compacte. $\square$

6.5.11 Lema. *Per a tot $M' \in \mathcal{S}_{n-1}$ existeix $\lambda_0 > 0$ tal que per a tot $\lambda \geq \lambda_0$ és* $M := \begin{bmatrix} M' & 0 \\ 0 & i\lambda \end{bmatrix} \in \mathcal{S}_n$. $\square$

6.5.3 Immersions de varietats modulars

Una de les aplicacions més interessants del Thetanullwerte és que proporcionen immersions projectives de les varietats modulars de Siegel. A tall d'exemple, enunciem un teorema que fa referència a les varietats que corresponen als grups d'Igusa $\Gamma_n[q^2, 2q^2]$, per a q parell.

6.5.12 Teorema. *Per a $q \equiv 0 \pmod 2$, l'aplicació $\mathcal{H}_n \longrightarrow \mathbb{P}^{q^{2n}-1}(\mathbb{C})$ definida per $Z \mapsto (\theta[\mathbf{m}](Z))_{\mathbf{m}}$, quan $\mathbf{m}$ recorre el conjunt $((1/q)\mathbb{Z}^{2n})/\mathbb{Z}^{2n}$, és holomorfa i dóna lloc a una aplicació injectiva*

$$\Gamma_n[q^2, 2q^2]\backslash\mathcal{H}_n \longrightarrow \mathbb{P}^{q^{2n}-1}(\mathbb{C})$$

que aplica biholomòrficament un entorn de cada punt en una subvarietat de l'espai projectiu.

A més a més, l'adherència de la imatge és una varietat projectiva de dimensió $\dfrac{n(n+1)}{2}$, i la diferència entre aquesta adherència i la pròpia imatge està inclosa en un tancat de Zariski de dimensió $\leq \dfrac{n(n-1)}{2}$. $\square$

6.6 Sèries theta generalitzades

6.6.1 Sèries theta de formes quadràtiques amb característiques i coeficients harmònics

Per a definir les sèries theta de formes quadràtiques definides positives i de coeficients harmònics, ens cal parlar de les funcions coeficient.

6.6.1 Definició. Sigui $\mathcal{V}$ un espai vectorial complex. Una funció coeficient de grau n en $\mathcal{V}$ és una aplicació

$$P : \mathcal{V} \times \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathbb{C}$$

tal que per a tot $g \in \mathcal{V}$ i tot $Z \in \mathcal{H}_n$ és

$$P(g, Z) = \sum_{j=1}^{k} P_j(g) A_j(Z),$$

on $A_j : \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathbb{C}$ són funcions holomorfes i $P_j : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{C}$ són funcions polinòmiques de les coordenades en alguna base.

I també ens cal parlar d'arrels quadrades de formes quadràtiques. Per a això, disposem del resultat següent.

6.6.2 Proposició. *Existeix una única aplicació holomorfa $l : \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{Z}_n$ tal que*

$$\exp(l(Z)) = Z/i; \qquad \textit{i, si } Y > 0, \textit{ llavors } l(iY) \textit{ és real.} \ \square$$

6.6.3 Notació. Escriurem $S^{1/2} := \exp(\frac{1}{2} l(S))$. Aquesta notació apareix a la definició següent.

6.6.4 Considerarem funcions theta amb característica i coeficients:

$$\theta_P[\mathbf{m}](S; Z)$$

$$\shortparallel$$

$$\sum_{G \in \mathbf{M}(r \times n, \mathbb{Z})} P(S^{1/2}(G+U), Z) e^{\pi i \operatorname{tr}((G+U)^t S (G+U) Z + 2V^t (G+U))},$$

on $\mathbf{m} = \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}$, per a $U, V \in \mathbf{M}(r \times n, \mathbb{C})$, és la característica, $S \in \mathbf{M}(r, \mathbb{R})$, $S = S^t > 0$, és una forma quadràtica definida positiva, i $P(g) = P(g, Z)$ és una funció coeficient, $P : \mathbf{M}(r \times n, \mathbb{C}) \times \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathbb{C}$.

I també considerarem aquestes sèries modificades amb factors exponencials:

$$\tilde{\theta}_P[\mathbf{m}](S;Z) := \exp(-\pi i\,\mathrm{tr}(U^tV))\theta_P[\mathbf{m}](S;Z).$$

6.6.5 Observacions. • En el cas en què $S = [1] \in \mathbf{M}(1,\mathbb{R})$, recuperem les sèries de més amunt, amb un canvi de característica:

$$\theta_P[\mathbf{m}']([1];Z) = \theta_P[\mathbf{m}](Z);$$
$$\tilde{\theta}_P[\mathbf{m}']([1];Z) = \tilde{\theta}_P[\mathbf{m}](Z).$$

• Recíprocament, les noves es poden recuperar de les antigues. Per a això es fa ús de la immersió d'Eichler.

6.6.2 La immersió d'Eichler

Recordem que, donades dues matrius $A \in \mathbf{M}(m \times n, R)$, $B \in \mathbf{M}(r \times s, R)$, podem considerar el producte

$$A \otimes B := \begin{bmatrix} Ab_{1,1} & \dots & Ab_{1,s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Ab_{r,1} & \dots & Ab_{r,s} \end{bmatrix} \in \mathbf{M}(mr \times ns, R).$$

6.6.6 Proposició. *Siguin $A \in \mathbf{M}(m,R)$, $B \in \mathbf{M}(n,R)$ matrius simètriques, $G = [g_1,\dots,g_n] \in \mathbf{M}(m \times n, R)$, amb $g_1,\dots,g_n \in \mathbf{M}(m \times 1, R)$, i posem $g := \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}$, el vector columna de mn components. Llavors,*

$$g^t(A \otimes B)g = \mathrm{tr}(G^tAGB). \ \square$$

6.6.7 Corol·lari. *Si $S = S^t \in \mathbf{M}(r,\mathbb{R})$, $Y = Y^t \in \mathbf{M}(n,\mathbb{R})$ són matrius definides positives, llavors $S \otimes Y$ també és simètrica i definida positiva.* $\square$

6.6.8 Definició. Podem definir, doncs, una immersió $\mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_{nr}$ per $Z \mapsto S \otimes Z$.

6.6.9 Proposició. *La immersió $Z \mapsto S \otimes Z$ és compatible amb l'acció dels grups simplèctics $\mathbf{Sp}(n,\mathbb{R})$, $\mathbf{Sp}(nr,\mathbb{R})$ en el sentit que l'aplicació*

$$\begin{aligned} \mathbf{Sp}(n,\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbf{Sp}(nr,\mathbb{R}) \\ M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} &\mapsto M^S := \begin{bmatrix} 1 \otimes A & S \otimes B \\ S^{-1} \otimes C & 1 \otimes D \end{bmatrix} \end{aligned}$$

és un morfisme de grups injectiu tal que

$$M^S\langle S \otimes Z\rangle = S \otimes (M\langle Z\rangle). \ \square$$

6.6.10 Definició. Per a cada matriu racional simètrica i definida positiva $S \in \mathbf{M}(r,\mathbb{R})$, posarem

$$\Gamma_n(S) := \{M \in \mathbf{Sp}(n,\mathbb{R}) :\ M^S \in \Gamma_{nr,\theta}\}.$$

6.6.11 Observació. Com que S és una matriu racional, llavors $\Gamma(S)$ és un subgrup de congruència.

6.6.12 Definició. Una matriu S s'anomena parella si és entera i els seus elements diagonals són parells. Equivalentment, si per a $g \in \mathbb{Z}^r$ és $g^t S g \equiv 0 \pmod 2$.

6.6.13 Proposició. (a) *Si S és una matriu parella i q és un nombre natural tal que la matriu qS^{-1} també és parella, llavors el grup $\Gamma_n(S)$ conté $\Gamma_{n,0}[q]$.*

(b) *Si q és un nombre natural tal que qS i qS^{-1} són totes dues parelles, llavors $\Gamma(S)$ conté el grup d'Igusa $\Gamma_n[q,2q]$.* $\square$

6.6.14 Notació. Sigui $g = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}$ el vector $g \in \mathbb{C}^{rn}$ format pels n vectors columna d'una matriu $G = [g_1, \ldots, g_n]$. Escriurem $G \leftrightarrow g$ per a indicar que la matriu $G \in \mathbf{M}(r \times n,\mathbb{C})$ es correspon amb el vector g via l'isomorfisme natural $\mathbf{M}(r \times n,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}^{rn}$.

6.6.15 Proposició. *Suposem que $A \in \mathbf{M}(r,\mathbb{C})$, $B \in \mathbf{M}(n,\mathbb{C})$, i que g és el vector que es correspon amb G per l'isomorfisme anterior. Llavors, el vector que correspon a la matriu AGB^t és $(A \otimes B)g$. En símbols, si $G \leftrightarrow g$, llavors $AGB^t \leftrightarrow (A \otimes B)g$.* $\square$

6.6.3 Sèries theta generalitzades i Thetanullwerte

6.6.16 Proposició. *Per a tota funció holomorfa* $A : \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathbb{C}$ *existeix una altra funció holomorfa* $B : \mathcal{H}_{rn} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tal que* $B(S \otimes Z) = A(Z)$. $\square$

6.6.17 Proposició. *Per a cada funció coeficient* $P : \mathbf{M}(r \times n, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ *existeix una funció coeficient* $P_0 : \mathbb{C}^{rn} \longrightarrow \mathbb{C}$ *per a la qual se satisfà que* $P_0(g, S \otimes Z) = P(S^{1/2}G, Z)$. $\square$

6.6.18 Proposició. *Siguin* a, b *els vectors columna que es corresponen amb les matrius* U, V*, respectivament. Siguin* P, P_0 *funcions coeficient holomorfes connectades per la relació de la poposició anterior:* $P_0(g, S \otimes Z) = P(S^{1/2}G, Z)$*, amb* $g \leftrightarrow G$*. Llavors,*

$$\theta_P \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} (S; Z) = \theta_{P_0} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (S \otimes Z); \text{ i també}$$

$$\tilde{\theta}_P \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} (S; Z) = \tilde{\theta}_{P_0} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (S \otimes Z). \square$$

Finalment, enunciem la fórmula de transformació per a aquestes funcions theta.

6.6.19 Teorema. *Sigui* S *una matriu real, simètrica i definida positiva. Llavors, existeix una acció del grup* $\Gamma_n(S)$ *en l'espai de les funcions coeficient de la forma* $P : \mathbf{M}(r \times n, \mathbb{C}) \times \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathbb{C}$*, que escriurem en la forma* $(P, M) \mapsto P^M$*, i que satisfà les propietats següents.*

(a) *Si* P *és constant, llavors* $P^M = P$.

(b) *Per a tot* $M \in \Gamma(S)$ *i tot* $Z \in \mathcal{H}_n$ *se satisfà la igualtat:*

$$\tilde{\theta}_{P^M} \begin{bmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{V} \end{bmatrix} (S; M\langle Z\rangle) = v_S(M) \det(CZ + D)^{r/2} \tilde{\theta}_P \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} (S; Z).$$

Aquí, s'ha escrit

$$\tilde{U} = UD^t - S^{-1}VC^t, \quad \tilde{V} = -SUB^t + VA^t, \quad v_S(M) := v_\theta(M^S). \square$$

6.6.20 Observació. En el cas en què $\det D \neq 0$, l'acció en les funcions coeficient es pot descriure a partir de transformades de Gauss, de manera similar a com s'ha fet més amunt amb sumes de Gauss simplèctiques.

Bibliografia

[Fr 91] Freitag, E.: *Singular Modular Forms and Theta Relations*. LNM **1487**. Springer, 1991.

[Ig 72] Igusa, K.: *Theta Functions*. GMW **194**. Springer, 1972.

[Sc 74] Schoeneberg, B.: *Elliptic Modular Functions*. GMW 203, Springer-Verlag, 1974.

[Sh 76] Shimura, G.: Theta functions with complex multiplication. *Duke Math. J.* **43**, n. 4 (1976), p. 673-696.

A. Travesa

Dept. d'Àlgebra i Geometria

Universitat de Barcelona

Gran Via de les Corts Catalanes, 585

E-08007, Barcelona

travesa@mat.ub.es