Algunas reciprocidades geométricas

Universitat de Barcelona

Barcelona, Junio, 2018

La reciprocidad de Weil

Teorema

Sea k un cuerpo perfecto, C una curva lisa, irreducible, completa sobre k, f y g dos funciones meromorfas en C. Denotamos $div(f) = \sum n_p \cdot p$, $div(g) = \sum m_q \cdot q$ con $n_p, m_q > 0$ sus correspondientes divisores principales.

Si los soportes de $div(f)$ y $div(g)$ son disjuntos, entonces

$$\prod f(q)^{m_q} = \prod g(p)^{n_p}.$$

(Weil, 1940)

La reciprocidad de Weil

Teorema

Sea k un cuerpo perfecto, C una curva lisa, irreducible, completa sobre k, f y g dos funciones meromorfas en C. Denotamos $div(f) = \sum n_p \cdot p$, $div(g) = \sum m_q \cdot q$ con $n_p, m_q > 0$ sus correspondientes divisores principales.

Si los soportes de $div(f)$ y $div(g)$ son disjuntos, entonces

$$\prod f(q)^{m_q} = \prod g(p)^{n_p}.$$

(Weil, 1940)

Varias demostraciones (p. ej. una sencilla para $k = \mathbb{C}$ para en el libro de Griffith-Harris).

Reformulación

La reciprocidad de Weil se puede reformular de la manera siguiente:

[1] siguiendo a Tate

Reformulación

La reciprocidad de Weil se puede reformular de la manera siguiente: Se define[1] el símbolo moderado de f, g en $p \in C$ como

$$(f,g)_p = (-1)^{v_p(f)\, v_p(g)} \cdot \left[\frac{f^{v_p(g)}}{g^{v_p(f)}}\right](p)$$

donde v_p es la valoración en p.

[1] siguiendo a Tate

Reformulación

La reciprocidad de Weil se puede reformular de la manera siguiente: Se define[1] el símbolo moderado de f, g en $p \in C$ como

$$(f,g)_p = (-1)^{v_p(f)\, v_p(g)} \cdot \left[\frac{f^{v_p(g)}}{g^{v_p(f)}}\right](p)$$

donde v_p es la valoración en p. Entonces,

Teorema (reciprocidad de Weil, forma alternativa)

Si f, g son funciones meromorfas en C,

$$\prod_{p\in C} (f,g)_p = 1.$$

[1] siguiendo a Tate

Conmensurabilidad

Arbarello, de Concini y Kac dieron una demostración de la reciprocidad de Weil usando algunos métodos introducidos por Tate:

Conmensurabilidad

Arbarello, de Concini y Kac dieron una demostración de la reciprocidad de Weil usando algunos métodos introducidos por Tate:

En los años 60, Tate da una demostración algebraica del teorema de los residuos, que evita argumentos trascendentes,

Conmensurabilidad

Arbarello, de Concini y Kac dieron una demostración de la reciprocidad de Weil usando algunos métodos introducidos por Tate:

En los años 60, Tate da una demostración algebraica del teorema de los residuos, que evita argumentos trascendentes, "as thought one had an abstract Stokes' theorem available".

Conmensurabilidad

Arbarello, de Concini y Kac dieron una demostración de la reciprocidad de Weil usando algunos métodos introducidos por Tate:

En los años 60, Tate da una demostración algebraica del teorema de los residuos, que evita argumentos trascendentes, "as thought one had an abstract Stokes' theorem available".

Utiliza de forma esencial la noción de conmensurabilidad: Si V es un espacio vectorial y A, B son subespacios, se dice que son conmensurables ($A \sim B$) si $A \cap B$ es de codimensión finita en A y en B.

Definiciones

Dados $A \subset V$, ADCK definen

$$GL(V, A) = \{g \in GL(V) \mid gA \sim A\},$$

Definiciones

Dados $A \subset V$, ADCK definen

$$GL(V, A) = \{g \in GL(V) \mid gA \sim A\},$$

y usan la siguiente noción de determinante: Si $A \sim B$, el determinante de A, B, es el espacio vectorial de dimensión 1 dado por

$$Det(A, B) := \bigwedge(A/A \cap B)^* \otimes \bigwedge(B/A \cap B)$$

Definiciones

Dados $A \subset V$, ADCK definen

$$GL(V, A) = \{g \in GL(V) \mid gA \sim A\},$$

y usan la siguiente noción de determinante: Si $A \sim B$, el determinante de A, B, es el espacio vectorial de dimensión 1 dado por

$$Det(A, B) := \bigwedge(A/A \cap B)^* \otimes \bigwedge(B/A \cap B)$$

Entonces definen

$$\widehat{GL}(V, A) = \{(g, a) \mid g \in GL(V, A),\ a \in Det(A, gA), a \neq 0\}.$$

Símbolos ADCK

Prueban que se tiene una extensión central

$$1 \longrightarrow k^{\times} \longrightarrow \widehat{GL}(V, A) \longrightarrow GL(V, A) \longrightarrow 1$$

Símbolos ADCK

Prueban que se tiene una extensión central

$$1 \longrightarrow k^\times \longrightarrow \widehat{GL}(V,A) \longrightarrow GL(V,A) \longrightarrow 1$$

y entonces,

Definición

Dados $f, g \in GL(V,A)$ que conmutan, sean $\widehat{f}, \widehat{g} \in \widehat{GL}(V,A)$ elevaciones. El símbolo ADCK de f, g es

$$(f,g)_A := [\hat{f}, \hat{g}] \in k^\times.$$

Observaciones

1. ADCK prueban que el símbolo que definen sólo depende de la clase de conmensurabilidad de A.

Observaciones

1. ADCK prueban que el símbolo que definen sólo depende de la clase de conmensurabilidad de A.

2. Si
$$V = k((t)) \quad \text{and} \quad A = k[[t]]$$
y $f, g \in k((t))^\times$, entonces $f, g \in GL(V, A)$ (como operadores de multiplicación $V \longrightarrow V$).

Observaciones

1. ADCK prueban que el símbolo que definen sólo depende de la clase de conmensurabilidad de A.

2. Si
$$V = k((t)) \quad \text{and} \quad A = k[[t]]$$
y $f, g \in k((t))^{\times}$, entonces $f, g \in GL(V, A)$ (como operadores de multiplicación $V \longrightarrow V$).

   En este caso, el símbolo ADCK coincide con el símbolo moderado.

Reciprocidad abstracta

Los símbolos ADCK verifican una ley de reciprocidad abstracta: Dados $A, B \subset V$ y $f, g \in GL(V, A) \cap GL(V, B)$ tales que $f \circ g = g \circ f$, one has

$$(f, g)_A \cdot (f, g)_B = (f, g)_{A \cap B} \cdot (f, g)_{A+B}$$

Reciprocidad abstracta

Los símbolos ADCK verifican una ley de reciprocidad abstracta: Dados $A, B \subset V$ y $f, g \in GL(V, A) \cap GL(V, B)$ tales que $f \circ g = g \circ f$, one has

$$(f, g)_A \cdot (f, g)_B = (f, g)_{A \cap B} \cdot (f, g)_{A+B}$$

Si C es una curva proyectiva, irreducible, no singular, y f, g son funciones meromorfas en C, a partir de la ley de reciprocidad abstracta se obtiene la reciprocidad de Weil.

$$\prod_{p \in C} (f, g)_p = 1.$$

Tate spaces

Para aplicar el formalismo de símbolos, determinantes, etc. hay que fijar una clase de conmensurabilidad. Esto se puede hacer usando una topología.

Tate spaces

Para aplicar el formalismo de símbolos, determinantes, etc. hay que fijar una clase de conmensurabilidad. Esto se puede hacer usando una topología.

Definición

Un EVT V es linealmente compacto si:

1. *Es completo y Hausdorff.*
2. *Tiene una base de entornos de 0 formada por subespacios vectoriales.*
3. *Cualquier subespacio abierto tiene codimensión finita.*

Tate spaces

Para aplicar el formalismo de símbolos, determinantes, etc. hay que fijar una clase de conmensurabilidad. Esto se puede hacer usando una topología.

Definición

Un EVT V es linealmente compacto si:

1. *Es completo y Hausdorff.*
2. *Tiene una base de entornos de 0 formada por subespacios vectoriales.*
3. *Cualquier subespacio abierto tiene codimensión finita.*

Ejemplo

$k[[t]]$ con la topología t-ádica.

Espacios de Tate

Definición

Un espacio de Tate es un EVT que tiene un subespacio abierto y linealmente compacto.

Espacios de Tate

Definición

Un espacio de Tate es un EVT que tiene un subespacio abierto y linealmente compacto.

Ejemplo

$k((t))$ *con la topología t-ádica (i.e., los subespacios* $t^n k[[t]]$ *son una base de entornos de* 0*), puesto que* $k[[t]] \subset k((t))$ *es abierto y linealmente compacto.*

Espacios de Tate

Definición

Un espacio de Tate es un EVT que tiene un subespacio abierto y linealmente compacto.

Ejemplo

$k((t))$ *con la topología t-ádica (i.e., los subespacios* $t^n k[[t]]$ *son una base de entornos de* 0*), puesto que* $k[[t]] \subset k((t))$ *es abierto y linealmente compacto.*

Los espacios de Tate los consideró inicialmente Lefschetz (con el nombre *espacios localmente linealmente compactos*) y más recientemente Kapranov, Drinfeld... (que introducen el término "espacio de Tate")

Propiedades de los espacios de Tate

1. Si V es de Tate, existe un subespacio discreto D y uno linealmente compacto C tales que $V = D \oplus C$.

Propiedades de los espacios de Tate

1. Si V es de Tate, existe un subespacio discreto D y uno linealmente compacto C tales que $V = D \oplus C$. Por ejemplo,

$$k((t)) = t^{-1}k[t^{-1}] \oplus k[[t]].$$

Propiedades de los espacios de Tate

1. Si V es de Tate, existe un subespacio discreto D y uno linealmente compacto C tales que $V = D \oplus C$. Por ejemplo,

$$k((t)) = t^{-1}k[t^{-1}] \oplus k[[t]].$$

Diremos que D es un sumando discreto y C es un sumando compacto.

Propiedades de los espacios de Tate

1. Si V es de Tate, existe un subespacio discreto D y uno linealmente compacto C tales que $V = D \oplus C$. Por ejemplo,

$$k((t)) = t^{-1}k[t^{-1}] \oplus k[[t]].$$

   Diremos que D es un sumando discreto y C es un sumando compacto.
2. Si D_1, D_2 son discretos, entonces $D_1 \sim D_2$. Además, $D_1 + D_2$ y $D_1 \cap D_2$ también son discretos (analog. para compactos).

Propiedades de los espacios de Tate

1. Si V es de Tate, existe un subespacio discreto D y uno linealmente compacto C tales que $V = D \oplus C$. Por ejemplo,

$$k((t)) = t^{-1}k[t^{-1}] \oplus k[[t]].$$

   Diremos que D es un sumando discreto y C es un sumando compacto.
2. Si D_1, D_2 son discretos, entonces $D_1 \sim D_2$. Además, $D_1 + D_2$ y $D_1 \cap D_2$ también son discretos (analog. para compactos).
3. Todo espacio de Tate tiene dos clases de conmensurabilidad distinguidas, la de los sumandos discretos y la de los sumandos compactos.

Propiedades de los espacios de Tate

1. Si V es de Tate, existe un subespacio discreto D y uno linealmente compacto C tales que $V = D \oplus C$. Por ejemplo,

$$k((t)) = t^{-1}k[t^{-1}] \oplus k[[t]].$$

   Diremos que D es un sumando discreto y C es un sumando compacto.
2. Si D_1, D_2 son discretos, entonces $D_1 \sim D_2$. Además, $D_1 + D_2$ y $D_1 \cap D_2$ también son discretos (analog. para compactos).
3. Todo espacio de Tate tiene dos clases de conmensurabilidad distinguidas, la de los sumandos discretos y la de los sumandos compactos.

Funciones analíticas

¿Se pueden definir símbolo como el de ADCK para funciones holomorfas con singularidades arbitrarias?

Funciones analíticas

¿Se pueden definir símbolo como el de ADCK para funciones holomorfas con singularidades arbitrarias? Consideremos

$$\mathbb{C}\{\{t\}\} = \left\{ \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i t^i \mid \exists \varepsilon > 0 \text{ la serie converge para } 0 < \|t\| < \varepsilon \right\}.$$

Funciones analíticas

¿Se pueden definir símbolo como el de ADCK para funciones holomorfas con singularidades arbitrarias? Consideremos

$$\mathbb{C}\{\{t\}\} = \left\{ \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i t^i \mid \exists \varepsilon > 0 \text{ la serie converge para } 0 < \|t\| < \varepsilon \right\}.$$

Este anillo tiene una topología natural: Si $U \subset \mathbb{C}$ es abierto, en $\Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathbb{C}})$ tenemos la topología determinada por las seminormas

$$\|f\|_K = \sup\{ \ \|f(x)\| \ \mid \ x \in K \ \} \ \ , K \subset U \text{ compacto.}$$

Funciones analíticas

¿Se pueden definir símbolo como el de ADCK para funciones holomorfas con singularidades arbitrarias? Consideremos

$$\mathbb{C}\{\{t\}\} = \left\{ \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i t^i \mid \exists \varepsilon > 0 \text{ la serie converge para } 0 < \|t\| < \varepsilon \right\}.$$

Este anillo tiene una topología natural: Si $U \subset \mathbb{C}$ es abierto, en $\Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathbb{C}})$ tenemos la topología determinada por las seminormas

$$\|f\|_K = \sup\{\ \|f(x)\| \ \mid\ x \in K\ \}\ \ , K \subset U \text{ compacto.}$$

En $\mathbb{C}\{\{t\}\} = \varinjlim_{0\in U} \Gamma(U - \{0\}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}})$ tenemos la topología límite directo.

Funciones analíticas

Si ponemos $\mathbb{C}\{\{t\}\}^+ = \mathbb{C}\{\{t\}\} \cap \mathbb{C}[[t]]$, $\mathbb{C}\{\{t\}\}^- = \mathbb{C}\{\{t\}\} \cap \mathbb{C}[[t^{-1}]]$,

Funciones analíticas

Si ponemos $\mathbb{C}\{\{t\}\}^+ = \mathbb{C}\{\{t\}\} \cap \mathbb{C}[[t]]$, $\mathbb{C}\{\{t\}\}^- = \mathbb{C}\{\{t\}\} \cap \mathbb{C}[[t^{-1}]]$,

también tenemos una descomposición (topológica)

$$\mathbb{C}\{\{t\}\} = \mathbb{C}\{\{t\}\}^+ \oplus t^{-1}\mathbb{C}\{\{t\}\}^- ,$$

Funciones analíticas

Si ponemos $\mathbb{C}\{\{t\}\}^+ = \mathbb{C}\{\{t\}\} \cap \mathbb{C}[[t]]$, $\mathbb{C}\{\{t\}\}^- = \mathbb{C}\{\{t\}\} \cap \mathbb{C}[[t^{-1}]]$,

también tenemos una descomposición (topológica)

$$\mathbb{C}\{\{t\}\} = \mathbb{C}\{\{t\}\}^+ \oplus t^{-1}\mathbb{C}\{\{t\}\}^-,$$

pero $\mathbb{C}\{\{t\}\}$ no es un espacio de Tate.

Funciones analíticas

Si ponemos $\mathbb{C}\{\{t\}\}^+ = \mathbb{C}\{\{t\}\} \cap \mathbb{C}[[t]]$, $\mathbb{C}\{\{t\}\}^- = \mathbb{C}\{\{t\}\} \cap \mathbb{C}[[t^{-1}]]$,

también tenemos una descomposición (topológica)

$$\mathbb{C}\{\{t\}\} = \mathbb{C}\{\{t\}\}^+ \oplus t^{-1}\mathbb{C}\{\{t\}\}^-\,,$$

pero $\mathbb{C}\{\{t\}\}$ no es un espacio de Tate.

Si queremos definir símbolos siguiendo la pauta de ADCK necesitamos otra noción de espacio de Tate.

Algunas definiciones

En adelante, k denota un cuerpo local de característica cero (es decir, $k = \mathbb{R}$ ó $k = \mathbb{C}$ ó k es una extensión finita de $\mathbb{Q}_p$).

[2] introducida por Grothendieck

Algunas definiciones

En adelante, k denota un cuerpo local de característica cero (es decir, $k = \mathbb{R}$ ó $k = \mathbb{C}$ ó k es una extensión finita de $\mathbb{Q}_p$).

Sean V, W espacios vectoriales topológicos localmente convexos (EVT).

1. Una aplicación lineal $f : V \longrightarrow W$ es compacta si la imagen de cualquier subconjunto acotado V tiene clausura compacta en W. Una noción próxima [2] es la de aplicación nuclear.

[2] introducida por Grothendieck

Algunas definiciones

En adelante, k denota un cuerpo local de característica cero (es decir, $k = \mathbb{R}$ ó $k = \mathbb{C}$ ó k es una extensión finita de $\mathbb{Q}_p$).

Sean V, W espacios vectoriales topológicos localmente convexos (EVT).

1. Una aplicación lineal $f : V \longrightarrow W$ es compacta si la imagen de cualquier subconjunto acotado V tiene clausura compacta en W. Una noción próxima [2] es la de aplicación nuclear.
2. V es un espacio nuclear si para todo espacio de Banach B, las aplicaciones contínuas $V \longrightarrow B$ son nucleares.

[2] introducida por Grothendieck

algunas más...

Ejemplo

El espacio de funciones diferenciables en un abierto de $\mathbb{R}^n$ *o el espacio defunciones holomorfas en un abierto de* $\mathbb{C}^n$ *son nucleares. Los espacios de Banach no son nucleares, salvo si son de dimensión finita.*

algunas más...

Ejemplo

El espacio de funciones diferenciables en un abierto de $\mathbb{R}^n$ o el espacio defunciones holomorfas en un abierto de $\mathbb{C}^n$ son nucleares. Los espacios de Banach no son nucleares, salvo si son de dimensión finita.

Definición

6. *Un EVT es Fréchet si es metrizable y completo.*

algunas más...

Ejemplo

El espacio de funciones diferenciables en un abierto de $\mathbb{R}^n$ o el espacio defunciones holomorfas en un abierto de $\mathbb{C}^n$ son nucleares. Los espacios de Banach no son nucleares, salvo si son de dimensión finita.

Definición

6. *Un EVT es Fréchet si es metrizable y completo.*
7. *Un espacio (FN) es un EVT que es simultáneamente Fréchet y nuclear.*

algunas más...

Ejemplo

El espacio de funciones diferenciables en un abierto de $\mathbb{R}^n$ o el espacio defunciones holomorfas en un abierto de $\mathbb{C}^n$ son nucleares. Los espacios de Banach no son nucleares, salvo si son de dimensión finita.

Definición

6. *Un EVT es Fréchet si es metrizable y completo.*
7. *Un espacio (FN) es un EVT que es simultáneamente Fréchet y nuclear.*
8. *Un espacio (DFN) es el dual (fuerte) de un espacio (FN).*

Espacios de Tate analíticos

Es fácil ver que $t^{-1}\mathbb{C}\{\{t\}\}^{-}$ es Fréchet y nuclear (es decir, FN).

Espacios de Tate analíticos

Es fácil ver que $t^{-1}\mathbb{C}\{\{t\}\}^{-}$ es Fréchet y nuclear (es decir, FN).
El apareamiento

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}\{\{t\}\} \times \mathbb{C}\{\{t\}\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (f,g) & \longmapsto & Res(f \cdot dg) \end{array}$$

induce un isomorfismo topológico entre $\mathbb{C}\{\{t\}\}^{+}$ y el dual (fuerte) de $t^{-1}\mathbb{C}\{\{t\}\}^{-}$, por lo tanto $\mathbb{C}\{\{t\}\}^{+}$ es un espacio DFN.

Espacios de Tate analíticos

Es fácil ver que $t^{-1}\mathbb{C}\{\{t\}\}^-$ es Fréchet y nuclear (es decir, FN).
El apareamiento

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}\{\{t\}\} \times \mathbb{C}\{\{t\}\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (f,g) & \longmapsto & Res(f \cdot dg) \end{array}$$

induce un isomorfismo topológico entre $\mathbb{C}\{\{t\}\}^+$ y el dual (fuerte) de $t^{-1}\mathbb{C}\{\{t\}\}^-$, por lo tanto $\mathbb{C}\{\{t\}\}^+$ es un espacio DFN.

Además, la descomposición

$$\mathbb{C}\{\{t\}\} = \mathbb{C}\{\{t\}\}^+ \oplus t^{-1}\mathbb{C}\{\{t\}\}^-$$

es topológica.

Analytic Tate spaces

El ejemplo anterior sugiere la siguiente definición:

Analytic Tate spaces

El ejemplo anterior sugiere la siguiente definición:

Definición

Diremos que un espacio vectorial topológico localmente convexo V es un espacio de Tate analítico si hay una descomposición (topológica)

$$V = G \oplus H \ ,$$

donde G es un subespacio (DFN) y H es un subespacio (FN).

Analytic Tate spaces

El ejemplo anterior sugiere la siguiente definición:

Definición

Diremos que un espacio vectorial topológico localmente convexo V es un espacio de Tate analítico si hay una descomposición (topológica)

$$V = G \oplus H \ ,$$

donde G es un subespacio (DFN) y H es un subespacio (FN).

Diremos que G es un sumando (DFN) y que H es un sumando (FN).

Ejemplos de espacios de Tate analíticos

Ejemplos

- *Si* $k = \mathbb{R}$ *or* $\mathbb{C}$, *el anillo de gérmenes de funciones diferenciables (o analíticas) en un entorno punteado de* $0 \in k$.

Ejemplos de espacios de Tate analíticos

Ejemplos

- *Si* $k = \mathbb{R}$ *or* $\mathbb{C}$, *el anillo de gérmenes de funciones diferenciables (o analíticas) en un entorno punteado de* $0 \in k$.

- *El anillo*

$$k((t)) = k[[t]] \oplus t^{-1}k[t^{-1}],$$

con la topología dada por $k[[t]] \cong \prod_{\mathbb{N}} k$, $k[t^{-1}] \cong \oplus_{\mathbb{N}} k$.

Ejemplos de espacios de Tate analíticos

Ejemplos

- *Si* $k = \mathbb{R}$ *or* $\mathbb{C}$, *el anillo de gérmenes de funciones diferenciables (o analíticas) en un entorno punteado de* $0 \in k$.
- *El anillo*
$$k((t)) = k[[t]] \oplus t^{-1}k[t^{-1}],$$
con la topología dada por $k[[t]] \cong \prod_{\mathbb{N}} k$, $k[t^{-1}] \cong \oplus_{\mathbb{N}} k$.
- *En particular, si* $\mathfrak{g}$ *es un álgebra de Lie de dimensión finita, el álgebra de lazos* $\mathfrak{g}((t)) = \mathfrak{g} \otimes_k k((t))$ *es un espacio de Tate analítico.*

Problemas de esta definición

En un espacio de Tate analítico, si L_1, L_2 son ambos (FN) or (DFN), en general $L_1 \not\sim L_2$. No hay clase de conmensurabilidad distinguida. La definición de determinante de ADCK no funciona bien.

Problemas de esta definición

En un espacio de Tate analítico, si L_1, L_2 son ambos (FN) or (DFN), en general $L_1 \not\sim L_2$. No hay clase de conmensurabilidad distinguida. La definición de determinante de ADCK no funciona bien.

Ejemplo

Si f es una unidad de $\mathbb{C}\{\{t\}\}$, entonces $\mathbb{C}\{\{t\}\}^+$, $f \cdot \mathbb{C}\{\{t\}\}^+$ son sumandos (DFN). Pero si f tiene una singularidad esencial en 0*, entonces*

$$\mathbb{C}\{\{t\}\}^+ \cap (f \cdot \mathbb{C}\{\{t\}\}^+) = \{0\}$$

y así $\mathbb{C}\{\{t\}\}^+ \not\sim f \cdot \mathbb{C}\{\{t\}\}^+$.

Polarizaciones de Segal

Sea V un EVT. En el conjunto de descomposiciones $V = V_+ \oplus V_-$ definimos una relación de equivalencia:

Polarizaciones de Segal

Sea V un EVT. En el conjunto de descomposiciones $V = V_+ \oplus V_-$ definimos una relación de equivalencia: $V_+ \oplus V_- \sim W_+ \oplus W_-$ si las composiciones

$$V_i \hookrightarrow V \twoheadrightarrow W_j \quad \text{y} \quad W_i \hookrightarrow V \twoheadrightarrow V_j \quad (i, j \in \{+, -\},\ i \neq j).$$

son nucleares. Las flechas $\twoheadrightarrow$ son las proyecciones asociadas a las descomposiciones dadas.

Polarizaciones de Segal

Sea V un EVT. En el conjunto de descomposiciones $V = V_+ \oplus V_-$ definimos una relación de equivalencia: $V_+ \oplus V_- \sim W_+ \oplus W_-$ si las composiciones

$$V_i \hookrightarrow V \twoheadrightarrow W_j \quad \text{y} \quad W_i \hookrightarrow V \twoheadrightarrow V_j \quad (i,j \in \{+,-\},\ i \neq j).$$

son nucleares. Las flechas $\twoheadrightarrow$ son las proyecciones asociadas a las descomposiciones dadas.

Definición

Una polarización de V es una clase de equivalencia de decomposiciones.

Fijada una descomposición $V = V_+ \oplus V_-$, a las descomposiciones en la misma clase de equivalencia las llamaremos permisibles (también a las proyecciones en sus sumandos)

Polarizaciones de Segal

Sea V un EVT polarizado, $V = V_+ \oplus V_-$ una descomposición permisible, $GL(V)$ el grupo de automorfismos bicontínuos de V. Dado $g \in GL(V)$, tenemos

$$g = \begin{pmatrix} g_{++} & g_{-+} \\ g_{+-} & g_{--} \end{pmatrix} : V_+ \oplus V_- \longrightarrow V_+ \oplus V_-$$

Polarizaciones de Segal

Sea V un EVT polarizado, $V = V_+ \oplus V_-$ una descomposición permisible, $GL(V)$ el grupo de automorfismos bicontínuos de V. Dado $g \in GL(V)$, tenemos

$$g = \begin{pmatrix} g_{++} & g_{-+} \\ g_{+-} & g_{--} \end{pmatrix} : V_+ \oplus V_- \longrightarrow V_+ \oplus V_-$$

Definición

El grupo lineal restringido de V es

$$GL_{res}(V) = \{g \in GL(V) \mid g_{+,-} \text{ y } g_{-,+} \text{ son nucleares } \}.$$

Polarizaciones

El hecho esencial para obener una ley de reciprocidad en este contexto es:

Proposición

Sea V_+ un espacio (FN) y sea V_- un espacio (DFN). Entonces:

1. *Toda aplicación contínua $f : V_+ \longrightarrow V_-$ es nuclear.*
2. *Toda aplicación contínua $g : V_- \longrightarrow V_+$ es nuclear.*

Polarizaciones

El hecho esencial para obener una ley de reciprocidad en este contexto es:

Proposición

Sea V_+ un espacio (FN) y sea V_- un espacio (DFN). Entonces:

1. *Toda aplicación contínua $f : V_+ \longrightarrow V_-$ es nuclear.*
2. *Toda aplicación contínua $g : V_- \longrightarrow V_+$ es nuclear.*

La parte (1) es consecuencia fácil de un teorema de Grothendieck, la parte (2) se puede deducir de un teorema de Dubinsky.

Polarizaciones

El hecho esencial para obener una ley de reciprocidad en este contexto es:

Proposición

Sea V_+ un espacio (FN) y sea V_- un espacio (DFN). Entonces:

1. *Toda aplicación contínua $f : V_+ \longrightarrow V_-$ es nuclear.*
2. *Toda aplicación contínua $g : V_- \longrightarrow V_+$ es nuclear.*

La parte (1) es consecuencia fácil de un teorema de Grothendieck, la parte (2) se puede deducir de un teorema de Dubinsky.

A partir de ahora, el subídice "+" denota (FN) y el "-" denota (DFN).

Polarizaciones

Corolario

1. *Un espacio de Tate analítico tiene una polarización esencialmente única, es decir, si tenemos un isomorfismo topológico*

$$V_+ \oplus V_- \cong W_+ \oplus W_-$$

donde V_+, W_+ *son (FN) y* V_-, W_- *son (DFN), entonces estas descomposiciones son equivalentes.*

Polarizaciones

Corolario

1. *Un espacio de Tate analítico tiene una polarización esencialmente única, es decir, si tenemos un isomorfismo topológico*

$$V_+ \oplus V_- \cong W_+ \oplus W_-$$

donde V_+, W_+ *son (FN) y* V_-, W_- *son (DFN), entonces estas descomposiciones son equivalentes.*

2. *Si* V *es de Tate analítico, entonces* $GL(V) = GL_{res}(V)$.

Determinantes de Segal

Aún necesitamos un análogo de los determinantes de ADCK para construir una extensión central.

[3] supongo por simplicidad que su índice es cero.

Determinantes de Segal

Aún necesitamos un análogo de los determinantes de ADCK para construir una extensión central.

Sea $f : V \longrightarrow W$ de Fredholm (contínua, $Ker(f)$ y $Coker(f)$ de dimensión finita)[3] y $Seg(f) = \{(g, \lambda) \mid f - g \text{ is nuclear }, \lambda \in k\}$.

[3] supongo por simplicidad que su índice es cero.

Determinantes de Segal

Aún necesitamos un análogo de los determinantes de ADCK para construir una extensión central.

Sea $f : V \longrightarrow W$ de Fredholm (contínua, $Ker(f)$ y $Coker(f)$ de dimensión finita)[3] y $Seg(f) = \{(g, \lambda) \mid f - g \text{ is nuclear }, \lambda \in k\}$.

En $Seg(f)$ consideramos la relación de equivalencia

$$(g \circ \theta, \lambda) \sim (g, \det(id - \theta) \cdot \lambda) \text{ where } id - \theta : V \longrightarrow V \text{ is nuclear.}$$

donde $\det(id - \theta)$ es el determinante de Fredholm (θ es una perturbación nuclear de $id : V \longrightarrow V$, esta es la razón para considerar espacios nucleares).

[3] supongo por simplicidad que su índice es cero.

Definición

El determinante de Segal de f es $Det_S(V, W, f) = Seg(f)/\sim$.

[4] i.e., si dos operadores de Fredholm difieren en uno nuclear, sus determinantes son canónicamente isomorfos.

Definición

El *determinante de Segal* *de* f *es* $Det_S(V, W, f) = Seg(f)/\sim$.

Por su propia definición, el determinante de Segal es invariante por perturbaciones nucleares[4].

[4] i.e., si dos operadores de Fredholm difieren en uno nuclear, sus determinantes son canónicamente isomorfos.

Definición

El determinante de Segal de f es $Det_S(V, W, f) = Seg(f)/\sim$.

Por su propia definición, el determinante de Segal es invariante por perturbaciones nucleares[4]. Además se tiene:

Proposición

Hay un isomorfismo canónico y functorial

$$Det_S(V, W, f) \cong \left(\bigwedge Ker(f)\right)^* \otimes \bigwedge Coker(f)\ .$$

[4] i.e., si dos operadores de Fredholm difieren en uno nuclear, sus determinantes son canónicamente isomorfos.

Definición

El determinante de Segal de f es $Det_S(V, W, f) = Seg(f)/\sim$.

Por su propia definición, el determinante de Segal es invariante por perturbaciones nucleares[4]. Además se tiene:

Proposición

Hay un isomorfismo canónico y functorial

$$Det_S(V, W, f) \cong \left(\bigwedge Ker(f)\right)^* \otimes \bigwedge Coker(f) .$$

[4] i.e., si dos operadores de Fredholm difieren en uno nuclear, sus determinantes son canónicamente isomorfos.

Líneas y determinantes

Sea $V = V_+ \oplus V_-$ de Tate analítico. Si tenemos otra descomposición $V = W_+ \oplus W_-$ y $p : V \longrightarrow W_+$ es la proyección, es fácil ver que $p_{|V_+}$ es Fredholm, con lo que podemos considerar $\mathbf{Det}(V_+, W_+, p_{|V_+})$.

Líneas y determinantes

Sea $V = V_+ \oplus V_-$ de Tate analítico. Si tenemos otra descomposición $V = W_+ \oplus W_-$ y $p : V \longrightarrow W_+$ es la proyección, es fácil ver que $p_{|V_+}$ es Fredholm, con lo que podemos considerar $\mathbf{Det}(V_+, W_+, p_{|V_+})$. Si tenemos

$$
\begin{tikzcd}
 & W_+ \oplus W_- = W_+ \oplus U_- \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\
W_+ & & W_+
\end{tikzcd}
$$

La diferencia $p_{|V_+} - q_{|V_+}$ es nuclear, por tanto hay un isomorfismo canónico

$$\mathbf{Det}(V_+, W_+, p_{|V_+}) \cong \mathbf{Det}(V_+, W_+, q_{|V_+})$$

Líneas y determinantes

Sea $V = V_+ \oplus V_-$ de Tate analítico. Si tenemos otra descomposición $V = W_+ \oplus W_-$ y $p : V \longrightarrow W_+$ es la proyección, es fácil ver que $p_{|V_+}$ es Fredholm, con lo que podemos considerar $\mathbf{Det}(V_+, W_+, p_{|V_+})$. Si tenemos

$$
\begin{tikzcd}
 & W_+ \oplus W_- = W_+ \oplus U_- \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\
W_+ & & W_+
\end{tikzcd}
$$

La diferencia $p_{|V_+} - q_{|V_+}$ es nuclear, por tanto hay un isomorfismo canónico

$$\mathbf{Det}(V_+, W_+, p_{|V_+}) \cong \mathbf{Det}(V_+, W_+, q_{|V_+})$$

y ponemos

$$\mathbf{Det}(V_+ : W_+) = \varinjlim_{p} \mathbf{Det}(V_+, W_+, p_{|V_+}) \,.$$

Si $V_+, W_+ \subset V$ son permisibles y $g \in GL_{res}(V)$, entonces $g(V_+), g(W_+)$ también son permisibles. De anera similar, se comprueba que hay un isomorfismo canónico

$$\mathbf{Det}(V_+ : g(V_+)) \longrightarrow \mathbf{Det}(W_+ : g(W_+))\,,$$

Si $V_+, W_+ \subset V$ son permisibles y $g \in GL_{res}(V)$, entonces $g(V_+), g(W_+)$ también son permisibles. De anera similar, se comprueba que hay un isomorfismo canónico

$$\mathbf{Det}(V_+ : g(V_+)) \longrightarrow \mathbf{Det}(W_+ : g(W_+))\,,$$

Definición

$$\mathbf{D}_g = \varinjlim_{V_+} \mathbf{Det}(V_+ : g(V_+))\,.$$

Si $V_+, W_+ \subset V$ son permisibles y $g \in GL_{res}(V)$, entonces $g(V_+), g(W_+)$ también son permisibles. De anera similar, se comprueba que hay un isomorfismo canónico

$$\mathbf{Det}(V_+ : g(V_+)) \longrightarrow \mathbf{Det}(W_+ : g(W_+)),$$

Definición

$$\mathbf{D}_g = \varinjlim_{V_+} \mathbf{Det}(V_+ : g(V_+)).$$

$\mathbf{D}_g$ es un k-espacio vectorial de dimensión 1. Se tiene

Proposición

Hay isomorfismos canónicos $\rho_{f,g} : \mathbf{D}_f \otimes \mathbf{D}_g \longrightarrow \mathbf{D}_{fg}$.

Una extensión central

Definición

$$GL^{+}_{res}(V) = \{(f, \alpha) \mid \; f \in GL_{res}(V) \;, \; \alpha \in \mathbf{D}_f \;\; \alpha \neq 0\} \;.$$

Una extensión central

Definición

$$GL^+_{res}(V) = \{(f, \alpha) \mid \; f \in GL_{res}(V) \; , \; \alpha \in \mathbf{D}_f \; \alpha \neq 0\} \; .$$

$GL^+_{res}(V)$ es un grupo donde la operación es

$$(f, \alpha) \cdot (g, \beta) = (f \cdot g, \; \rho_{f,g}(\alpha \otimes \beta)) \, .$$

Una extensión central

Definición

$$GL^+_{res}(V) = \{(f, \alpha) \mid \; f \in GL_{res}(V) \; , \; \alpha \in \mathbf{D}_f \; \alpha \neq 0\} \; .$$

$GL^+_{res}(V)$ es un grupo donde la operación es

$$(f, \alpha) \cdot (g, \beta) = (f \cdot g, \; \rho_{f,g}(\alpha \otimes \beta)) \, .$$

y ahora podemos repetir lo que hacían ADCK. Hay una extensión

$$1 \longrightarrow k^\times \longrightarrow GL^+_{res}(V) \longrightarrow GL_{res}(V) \longrightarrow 1 \; .$$

Una extensión central

Definición

$$GL^{+}_{res}(V) = \{(f, \alpha) \mid \; f \in GL_{res}(V) \;, \; \alpha \in \mathbf{D}_f \;\; \alpha \neq 0\} \; .$$

$GL^{+}_{res}(V)$ es un grupo donde la operación es

$$(f, \alpha) \cdot (g, \beta) = (f \cdot g, \;\; \rho_{f,g}(\alpha \otimes \beta)) \, .$$

y ahora podemos repetir lo que hacían ADCK. Hay una extensión

$$1 \longrightarrow k^{\times} \longrightarrow GL^{+}_{res}(V) \longrightarrow GL_{res}(V) \longrightarrow 1 \; .$$

Definición

Dados $f, g \in GL_{res}(V)$ que conmutan y elevaciones $\tilde{f}, \tilde{g} \in GL^{+}_{res}(V)$, definimos

$$\langle f, g \rangle = [\, \tilde{f} \, , \, \tilde{g} \,] \in k^{\times} .$$

Cálculo

Toda unidad $f \in \mathbb{C}\{\{t\}\}$ se escribe de forma única

$$f = c \cdot t^n \cdot g(t) \cdot h(t^{-1}) \ ,$$

donde $c \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$, g es holomorfa en cero, $g(0) = 1$, $h(x) = e^{\varphi(x)}$ y φ es una función entera, $\varphi(0) = 0$ (descomposición de Birkhoff).

Cálculo

Toda unidad $f \in \mathbb{C}\{\{t\}\}$ se escribe de forma única

$$f = c \cdot t^n \cdot g(t) \cdot h(t^{-1}) \ ,$$

donde $c \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$, g es holomorfa en cero, $g(0) = 1$, $h(x) = e^{\varphi(x)}$ y φ es una función entera, $\varphi(0) = 0$ (descomposición de Birkhoff).

Proposición

Dadas unidades $f_1, f_2 \in \mathbb{C}\{\{t\}\}$, con descomposiciones

$$f_i = c_i \cdot t^{n_i} \cdot g_i(t) \cdot h_i(t^{-1})$$

as above $(i = 1, 2)$, we have $\langle f_1, f_2 \rangle = c_1^{-n_2} \cdot c_2^{n_1}$.

Reciprocidad de Weil, caso complejo

Corolario

Si $f_1, f_2 \in \mathbb{C}\{t\}[t^{-1}]$ *son meromorfas, entonces* $\langle f, g \rangle^{-1}$ *es el símbolo moderado.*

Reciprocidad de Weil, caso complejo

Corolario

Si $f_1, f_2 \in \mathbb{C}\{t\}[t^{-1}]$ son meromorfas, entonces $\langle f, g\rangle^{-1}$ es el símbolo moderado.

Sea $\overset{\bullet}{\mathcal{O}}_{S,s}$ el anillo de gérmenes de funciones holomorfas en un entorno punteado de s en S. Entonces

Reciprocidad de Weil, caso complejo

Corolario

Si $f_1, f_2 \in \mathbb{C}\{t\}[t^{-1}]$ *son meromorfas, entonces* $\langle f, g\rangle^{-1}$ *es el símbolo moderado.*

Sea $\overset{\bullet}{\mathcal{O}}_{S,s}$ el anillo de gérmenes de funciones holomorfas en un entorno punteado de s en S. Entonces

Teorema

S superfície de Riemann compacta, conexa, $\Sigma \subset C$ un subconjunto finito, f, g elementos inversibles del anillo de funciones holomorfas en $S - \Sigma$.

$$\prod_{s\in\Sigma} \langle f_s, g_s\rangle_s = 1 \ ,$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$ *es el símbolo en* $\overset{\bullet}{\mathcal{O}}_{S,s}$.

Demostración

1. Primero se prueba que $V = \oplus_{s\in\Sigma} \overset{\bullet}{\mathcal{O}}_{S,s}$ es un espacio de Tate analítico y que
   - $H_1 := Image\,[\,\Gamma(S-\Sigma, \mathcal{O}_S) \longrightarrow \oplus_{s\in\Sigma} \overset{\bullet}{\mathcal{O}}_{S,s}]$
   - $H_2 = \oplus_{s\in\Sigma} \overset{\bullet}{\mathcal{O}}^{-}{}_{S,s}$

   son sumandos (FN). Como determinan la misma polarización, el valor de $\langle f, g\rangle$ es el mismo si se calcula con H_1 o con H_2.

Demostración

1. Primero se prueba que $V = \oplus_{s\in\Sigma} \,\dot{\mathcal{O}}_{S,s}$ es un espacio de Tate analítico y que
    - $H_1 := Image\,[\,\Gamma(S-\Sigma, \mathcal{O}_S) \longrightarrow \oplus_{s\in\Sigma} \,\dot{\mathcal{O}}_{S,s}]$
    - $H_2 = \oplus_{s\in\Sigma} \,\dot{\mathcal{O}}^{-}{}_{S,s}$

    son sumandos (FN). Como determinan la misma polarización, el valor de $\langle f, g\rangle$ es el mismo si se calcula con H_1 o con H_2.

2. Si tomamos H_1, entonces $\langle f, g\rangle = 1$.

Demostración

1. Primero se prueba que $V = \oplus_{s\in\Sigma} \ \dot{\mathcal{O}}_{S,s}$ es un espacio de Tate analítico y que
   - $H_1 := \mathit{Image}\,[\,\Gamma(S-\Sigma, \mathcal{O}_S) \longrightarrow \oplus_{s\in\Sigma} \ \dot{\mathcal{O}}_{S,s}]$
   - $H_2 = \oplus_{s\in\Sigma} \ \dot{\mathcal{O}}^{-}{}_{S,s}$

   son sumandos (FN). Como determinan la misma polarización, el valor de $\langle f, g\rangle$ es el mismo si se calcula con H_1 o con H_2.
2. Si tomamos H_1, entonces $\langle f, g\rangle = 1$.
3. Si tomamos H_2, entonces $\langle f, g\rangle = \prod_{s\in\Sigma} \langle f_s, g_s\rangle_s$.

El símbolo de Deligne

Deligne definió ya en 1991 un símbolo que generaliza el símbolo moderado y se aplica también a funciones con singularidades esenciales.

El símbolo de Deligne

Deligne definió ya en 1991 un símbolo que generaliza el símbolo moderado y se aplica también a funciones con singularidades esenciales.

Sea S una superfície de Riemann, $x \in S$, sean f, g funciones holomorfas e ineversibles en un entorno punteado de x. Si $S_x \subset S$ es un pequeño círculo alrededor de x y $x_0 \in S_x$, Deligne define un símbolo asociado a f, g y x como

$$(f, g)_{Del} = \exp\left(-\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{x_0}^{x_0} \log f \, \frac{d\,g}{g} - \log(g(x_0))\, \frac{d\,f}{f}\right)\right) .$$

(integral sobre S_x, $\log f$ es una rama del logaritmo definida en $S_x - \{x_0\}$).

El símbolo de Deligne

- De hecho, Deligne asocia a f, g un $\mathbb{C}^\times$- torsor[5] con conexión sobre S_x, y $(f, g)_{Del}$ es su monodromía.

[5]= fibrado principal.

El símbolo de Deligne

- De hecho, Deligne asocia a f, g un $\mathbb{C}^{\times}$- torsor[5] con conexión sobre S_x, y $(f, g)_{Del}$ es su monodromía.

- Se puede comprobar que de hecho el símbolo que hemos definido es (el inverso del) símbolo de Deligne.

[5] = fibrado principal.

El símbolo de Deligne

- De hecho, Deligne asocia a f, g un $\mathbb{C}^{\times}$- torsor[5] con conexión sobre S_x, y $(f, g)_{Del}$ es su monodromía.

- Se puede comprobar que de hecho el símbolo que hemos definido es (el inverso del) símbolo de Deligne. ☹

[5] = fibrado principal.

El símbolo de Deligne

- De hecho, Deligne asocia a f, g un $\mathbb{C}^\times$- torsor[5] con conexión sobre S_x, y $(f, g)_{Del}$ es su monodromía.
- Se puede comprobar que de hecho el símbolo que hemos definido es (el inverso del) símbolo de Deligne. ☹
- Como consecuencia, el símbolo de Deligne verifica la reciprocidad de Weil (si $S = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, esto es fácil de ver directamente a partir de la definición de Deligne).

[5]= fibrado principal.

Espacios "dagger"

Una de las variantes de la geometría p-ádica son los espacios analíticos rígidos con haz de estructura sobreconvergente [6], o "espacios dagger" que aparecen a partir de los trabajos de Monsky-Washnitzer sobre la cohomología p-ádica.

[6] =surconvergent, overconvergent

Espacios "dagger"

Una de las variantes de la geometría p-ádica son los espacios analíticos rígidos con haz de estructura sobreconvergente [6], o "espacios dagger" que aparecen a partir de los trabajos de Monsky-Washnitzer sobre la cohomología p-ádica. Están implícitos en trabajos de Berthelot, Crew y otros y los ha estudiado en detalle Grosse-Klöne.

[6] =surconvergent, overconvergent

Espacios "dagger"

Una de las variantes de la geometría p-ádica son los espacios analíticos rígidos con haz de estructura sobreconvergente [6], o "espacios dagger" que aparecen a partir de los trabajos de Monsky-Washnitzer sobre la cohomología p-ádica. Están implícitos en trabajos de Berthelot, Crew y otros y los ha estudiado en detalle Grosse-Klöne. La cohomología rígida de Berthelot se puede interpretar como cohomología de de Rham de ciertos espacios dagger.

[6] =surconvergent, overconvergent

Espacios "dagger"

Una de las variantes de la geometría p-ádica son los espacios analíticos rígidos con haz de estructura sobreconvergente [6], o "espacios dagger" que aparecen a partir de los trabajos de Monsky-Washnitzer sobre la cohomología p-ádica. Están implícitos en trabajos de Berthelot, Crew y otros y los ha estudiado en detalle Grosse-Klöne. La cohomología rígida de Berthelot se puede interpretar como cohomología de de Rham de ciertos espacios dagger.

La idea es la misma que en geometría rígida pero las algebras de Tate se reemplazan por algebras de Monsky-Washnitzer, (cocientes del álgebra de series convergentes en un polidisco de radio > 1).

[6] =surconvergent, overconvergent

Ejemplos

La definición precisa es un poco técnica pero por ejemplo, el álgebra que corresponde a la recta afín sobre $\mathbb{Q}_p$ sería

$$\mathcal{O}^{\dagger}_{\mathbb{A}^1} = \left\{ \sum_{i \geqslant 0} a_i t^i \mid \; a_i \in \mathbb{Q}_p \;, \exists \varepsilon > 1 \lim_{i \to \infty} \|a_i\| \varepsilon^i = 0 \; \right\}$$

Ejemplos

La definición precisa es un poco técnica pero por ejemplo, el álgebra que corresponde a la recta afín sobre $\mathbb{Q}_p$ sería

$$\mathcal{O}^{\dagger}_{\mathbb{A}^1} = \left\{ \sum_{i \geqslant 0} a_i t^i \;\middle|\; a_i \in \mathbb{Q}_p \,, \exists \varepsilon > 1 \lim_{i \to \infty} \|a_i\| \varepsilon^i = 0 \right\}$$

O por ejemplo, si $Y = \mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}_p} - \{0\}$, entonces

$$\mathcal{O}^{\dagger}_{Y} = \left\{ \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i t^i \;\middle|\; a_i \in \mathbb{Q}_p \,, \exists \varepsilon > 1 \lim_{i \to \infty} \|a_i\| \varepsilon^i = 0 \;\; \lim_{i \to -\infty} \|a_i\| \varepsilon^i = 0 \right\}.$$

(series convergentes en una corona de radios $\varepsilon > 1, 1/\varepsilon$).

Anillo de Robba

En este contexto, el análogo del anillo $k((t))$ es el anillo de Robba

$$\mathcal{R}_t = \left\{ \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i t^i \mid \; a_i \in \mathbb{Q}_p \;, \exists \varepsilon > 1 \lim_{i \to \infty} \|a_i\| \varepsilon^i = 0 \;\; \lim_{i \to -\infty} \|a_i\| \varepsilon^i = 0 \; \right\}$$

de las series convergentes en una corona de radio exterior 1 y radio interior $\varepsilon < 1$ (que depende de la serie tomada).

Anillo de Robba

En este contexto, el análogo del anillo $k((t))$ es el anillo de Robba

$$\mathcal{R}_t = \left\{ \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i t^i \mid \ a_i \in \mathbb{Q}_p \ , \exists \varepsilon > 1 \lim_{i \to \infty} \|a_i\| \varepsilon^i = 0 \ \lim_{i \to -\infty} \|a_i\| \varepsilon^i = 0 \ \right\}$$

de las series convergentes en una corona de radio exterior 1 y radio interior $\varepsilon < 1$ (que depende de la serie tomada).

Si $Y \hookrightarrow \overline{Y}$ es un "dagger embedding" de una curva afín no singular sobre $\mathbb{Q}_p$ en una curva proyectiva no singular $\overline{Y}$, a cada $s \in \Sigma := \overline{Y} - Y$ se le asocia un anillo $\mathcal{R}_s$ isomorfo a un anillo de Robba y un morfismo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_Y^\dagger & \longrightarrow & \mathcal{R}_s \\ f & \longmapsto & f_s \end{array}$$

Reciprocidad, caso p-adico

Los anillos de Robba son de manera natural anillos topológicos e incluso espacios de Tate analíticos, por lo tanto se puede calcular el símbolo de dos unidades de $\mathcal{R}_t$. Se tiene, con las notaciones anteriores:

Reciprocidad, caso p-adico

Los anillos de Robba son de manera natural anillos topológicos e incluso espacios de Tate analíticos, por lo tanto se puede calcular el símbolo de dos unidades de $\mathcal{R}_t$. Se tiene, con las notaciones anteriores:

Teorema

Si $f, g \in \mathcal{O}_Y^{\dagger}$ son inversibles, entonces

$$\prod_{s \in \Sigma} \langle f_s, g_s \rangle_s = 1.$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$ es el símbolo calculado en el anillo de Robba en $s \in \overline{Y} - Y$.

Reciprocidad, caso p-adico

Los anillos de Robba son de manera natural anillos topológicos e incluso espacios de Tate analíticos, por lo tanto se puede calcular el símbolo de dos unidades de $\mathcal{R}_t$. Se tiene, con las notaciones anteriores:

Teorema

Si $f, g \in \mathcal{O}_Y^\dagger$ son inversibles, entonces

$$\prod_{s\in\Sigma} \langle f_s, g_s\rangle_s = 1.$$

donde $\langle\cdot,\cdot\rangle_s$ es el símbolo calculado en el anillo de Robba en $s \in \overline{Y} - Y$.

Reciprocidad, caso p-adico

La demostración sigue exactamente la pauta del caso complejo, considerando ahora el espacio de Tate analítico $V = \oplus_{s\in\Sigma}\mathcal{R}_s$ y calculando $\langle f, g\rangle$ con dos subespacios (DFN), en este caso

1. $G_1 = \oplus_{s\in\Sigma}\mathcal{R}_s^-$
2. $G_2 = Imagen\,[\,\mathcal{O}_Y^\dagger \longrightarrow V]$.

Reciprocidad, caso p-adico

La demostración sigue exactamente la pauta del caso complejo, considerando ahora el espacio de Tate analítico $V = \oplus_{s\in\Sigma}\mathcal{R}_s$ y calculando $\langle f, g\rangle$ con dos subespacios (DFN), en este caso

1. $G_1 = \oplus_{s\in\Sigma}\mathcal{R}_s^-$
2. $G_2 = Imagen\,[\,\mathcal{O}_Y^\dagger \longrightarrow V]$.

En este contexto no hay teorema de Stokes (hasta donde yo se...).

Reciprocidad, caso p-adico

La demostración sigue exactamente la pauta del caso complejo, considerando ahora el espacio de Tate analítico $V = \oplus_{s\in\Sigma}\mathcal{R}_s$ y calculando $\langle f, g\rangle$ con dos subespacios (DFN), en este caso

1. $G_1 = \oplus_{s\in\Sigma}\mathcal{R}_s^-$
2. $G_2 = Imagen\,[\,\mathcal{O}_Y^\dagger \longrightarrow V]$.

En este contexto no hay teorema de Stokes (hasta donde yo se...). ☺

Que más...?

Algunas construcciones que usan espacios de Tate se pueden transportar al caso analítico o p-ádico.

Que más...?

Algunas construcciones que usan espacios de Tate se pueden transportar al caso analítico o p-ádico.

Aunque no es cierto que dos sumandos en un espacio de Tate analítico estén en la misma clase de conmensurabilidad, se tiene:

Proposición

Sea V un espacio de Tate analítico. Si L_1, L_2 son sumandos del mismo tipo (ambos (FN) o ambos (DFN)) y $L_1 \subset L_2$, entonces L_1/L_2 es de dimensión finita.

Que más...?

Algunas construcciones que usan espacios de Tate se pueden transportar al caso analítico o p-ádico.

Aunque no es cierto que dos sumandos en un espacio de Tate analítico estén en la misma clase de conmensurabilidad, se tiene:

Proposición

Sea V un espacio de Tate analítico. Si L_1, L_2 son sumandos del mismo tipo (ambos (FN) o ambos (DFN)) y $L_1 \subset L_2$, entonces L_1/L_2 es de dimensión finita.

Esta es la propiedad usada por Kapranov para construir un "complejo de de Rham semiinfinito" para espacios de Tate. La construcción de Kapranov se puede reproducir en este contexto.

Proyectos de futuro...?

Proyectos de futuro...?

Considerar símbolos para secciones meromorfas de un fibrado de linea en lugar de símbolos de funciones meromorfas...? Reciprocidad?

Proyectos de futuro...?

Considerar símbolos para secciones meromorfas de un fibrado de linea en lugar de símbolos de funciones meromorfas...? Reciprocidad?

Proverbio ruso: Si quieres hacer reir a Dios, explícale tus proyectos de futuro...

Gracias por su atención !!

Gracias por su atención !!