Francesc Fité

Semestre de tardor 2023

Mètodes analítics en teoria de nombres

Full de problemes 1

Presenteu les vostres solucions al Campus Virtual abans del dilluns 2/10/2023 a les 23:59. Recordeu d'esmentar les fonts consultades per a la resolució dels exercicis.

Exercici 1. Definim la *funció de von Mangoldt* $\Lambda : \mathbb{Z}_{\geq 1} \to \mathbb{R}$ com

$$\Lambda(n) := \begin{cases} \log(p) & \text{si } n = p^m \text{ per algun primer } p \text{ i } m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, \\ 0 & \text{altrament,} \end{cases}$$

per $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Demostreu que

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \log(n)\,.$$

(La notació del peu del sumatori indica que d recorre tots els divisors de n).

Exercici 2. Definim la *funció de Möbius* $\mu : \mathbb{Z}_{\geq 1} \to \mathbb{Z}$ com

$$\mu(n) := \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, \\ (-1)^k & \text{si } n \text{ és un producte de } k \geq 1 \text{ primers diferents,} \\ 0 & \text{altrament,} \end{cases}$$

per $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Demostreu que

$$\sum_{d|n} \mu(d) = I(n) \qquad \text{on } I(n) := \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

Exercici 3. Definim la *funció d'Euler* $\varphi : \mathbb{Z}_{\geq 1} \to \mathbb{Z}$ com

$$\varphi(n) = \#(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$$

per $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Demostreu que

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

Indicació: Observeu que

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \bigcup_{d|n} \{j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \textit{ tals que } \gcd(j,n) = d\}.$$

Exercici 4. Una funció de domini $\mathbb{Z}_{\geq 1}$ i destí $\mathbb{C}$ s'anomena *funció aritmètica.* Donades dues funcions aritmètiques $f, g : \mathbb{Z}_{\geq 1} \to \mathbb{C}$ la funció aritmètica $f * g : \mathbb{Z}_{\geq 1} \to \mathbb{C}$ definida per

$$(f * g)(n) := \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right)$$

s'anomena el seu producte de Dirichlet. Demostreu que:

i) El conjunt de funcions aritmètiques és un monoide commutatiu respecte al producte de Dirichlet, és a dir, si f, g i h són funcions aritmètiques, aleshores es té

$$f * g = g * f, \qquad (f * g) * h = f * (g * h), \qquad f * I = I * f = f,$$

on I és la funció definida a l'Exercici 2.

ii) Si $f(1) \neq 0$, aleshores existeix una funció aritmètica f^{-1} tal que

$$f * f^{-1} = I,$$

anomenada la inversa de Dirichlet de f.

Indicació: Definiu f^{-1} recursivament mitjançant la fórmula

$$f^{-1}(1) := 1/f(1), \qquad f^{-1}(n) := \frac{-1}{f(1)} \sum_{d|n, d<n} f\left(\frac{n}{d}\right) f^{-1}(d).$$

Exercici 5 (Fórmula d'inversió de Möbius). Siguin f i g funcions aritmètiques.

i) Demostreu que

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \qquad \text{per a tot } n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$$

si i només si

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right) \qquad \text{per a tot } n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}.$$

Indicació: Considereu la funció $u : \mathbb{Z}_{\geq 1} \to \mathbb{Z}$ definida per $u(n) = 1$. Reescriviu les igualtats donades com $f = g * u$ i $g = f * \mu$ i relacioneu u i μ a través de l'Exercici 2.

ii) Demostreu que per a tot $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, tenim

$$\Lambda(n) = -\sum_{d|n} \mu(d) \log(d) \qquad \text{i} \qquad \varphi(n) = \sum_{d|n} d\mu\left(\frac{n}{d}\right).$$

Francesc Fité

Semestre de tardor 2023

Mètodes analítics en teoria de nombres

Full de problemes 2

Presenteu les vostres solucions al Campus Virtual abans del dilluns 9/10/2023 a les 23:59. Recordeu d'esmentar les fonts consultades per a la resolució dels exercicis.

Exercici 1. Sigui $\sum_{n\geq 1}\frac{f(n)}{n^s}$ una sèrie de Dirichlet. Demostreu que:

i) Si existeix $M\in\mathbb{R}_{>0}$ tal que

$$\left|\sum_{n\leq x} f(n)\right| \leq M \qquad \text{per a tot } x\in\mathbb{R}_{\geq 1},$$

aleshores l'abscissa de convergència satisfà $\sigma_c \leq 0$.

ii) Si existeix $M\in\mathbb{R}_{>0}$ tal que $|f(n)|\leq M$ per a tot $n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$, aleshores l'abscissa de convergència absoluta satisfà $\sigma_a\leq 1$.

iii) Si $f(n)=(-1)^n$, aleshores $\sigma_c=0$ i $\sigma_a=1$.

iv) Si $f(n)=1$, aleshores $\sigma_c=\sigma_a=1$.

Indicació: Per a i), utilitzeu el Lema 5 amb $s_0=0$, §1, vist a la classe de teoria.

Exercici 2 (Fórmula de sumació d'Euler). Sigui $f:[y,x]\to\mathbb{C}$ una funció amb derivada contínua, on $0<y<x$ són nombres reals. Demostreu que:

$$\sum_{y<n\leq x} f(n) = \int_y^x f(t)dt + \int_y^x (t-\lfloor t\rfloor)f'(t)dt + f(x)(\lfloor x\rfloor - x) - f(y)(\lfloor y\rfloor - y).$$

Indicació: Apliqueu la fórmula de sumació d'Abel prenent $a(n)=1$ per deduir

$$\sum_{y<n\leq x} f(n) = -\int_y^x \lfloor t\rfloor f'(t)dt + f(x)\lfloor x\rfloor - f(y)\lfloor y\rfloor$$

i després apliqueu integració per parts a $\int_y^x tf'(t)dt$ i combineu les dues expressions.

Exercici 3. Demostreu que

$$\sum_{n\leq x}\frac{1}{n} = \log(x) + C + O\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{per } x\geq 1,$$

on

$$C = 1 - \int_1^\infty \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}dt.$$

Indicació: Apliqueu l'Exercici 3 prenent $f(t) = 1/t$.

Exercici 4. Siguin $F(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^s}$ i $G(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{g(n)}{n^s}$ sèries de Dirichlet absolutament convergents per $\sigma > \sigma_0$.

i) Demostreu que:

$$F(s) \cdot G(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{(f * g)(n)}{n^s} \qquad \text{per } \sigma > \sigma_0.$$

ii) Deduïu que

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n\geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \qquad \text{per } \sigma > 1.$$

Indicació: Utilitzeu Ex. 1 de FP 1 i el Corol.lari 10 de la classe de teoria.

iii) Deduïu que

$$\zeta(s)^{-1} = \sum_{n\geq 1} \frac{\mu(n)}{n^s} \qquad \text{per } \sigma > 1.$$

Indicació: Utilitzeu Ex. 2 de FP 1.

iv) Deduïu que

$$\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \sum_{n\geq 1} \frac{\varphi(n)}{n^s} \qquad \text{per } \sigma > 2.$$

Indicació: Utilitzeu Ex. 3 de FP 1.

Exercici 5. Definim la funció ϑ de Chebyshev com

$$\vartheta(x) = \sum_{p\leq x} \log(p)$$

per $x \in \mathbb{R}_{>0}$.

i) Demostreu que

$$\vartheta(x) = \pi(x)\log(x) - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt.$$

Indicació: Definim

$$p(n) = \begin{cases} 1 & \textit{si } n \textit{ és primer} \\ 0 & \textit{altrament.} \end{cases}$$

Apliqueu la fórmula de sumació d'Abel prenent $a(n) = p(n)$ i $g(x) = \log(x)$.

ii) Demostreu que

$$\pi(x) = \frac{\vartheta(x)}{\log(x)} + \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t(\log(t))^2} dt.$$

Indicació: Apliqueu la fórmula de sumació d'Abel prenent $a(n) = p(n)\log(n)$ i $g(x) = 1/\log(x)$.

Francesc Fité

Semestre de tardor 2023

Mètodes analítics en teoria de nombres

Full de problemes 3

Presenteu les vostres solucions al Campus Virtual abans del dilluns 23/10/2023 a les 23:59. Recordeu d'esmentar les fonts consultades per a la resolució dels exercicis.

Exercici 1. Sigui G un grup abelià finit i denotem per $\hat{G}$ el seu grup de caràcters. Demostreu que per a tot $g \in G$ es té que

$$\sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(g) = \begin{cases} |G| & \text{si } g = 1, \\ 0 & \text{si } g \neq 1. \end{cases}$$

Exercici 2. Escrivim $s = \sigma + it$, on $\sigma, t \in \mathbb{R}$. Demostreu que per $\sigma > 1$, tenim que

$$\mathrm{Re}(\zeta(s)) = \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(t \log(n))}{n^\sigma}.$$

Deduïu que

$$\mathrm{Re}(\zeta(s)) > 0 \qquad \text{per } \sigma \geq 2.$$

Indicació: Utilitzeu que $\sum_{n \geq 1} 1/n^2 = \pi^2/6$.

Comentari: Van de Lune ha determinat el suprem σ_0 *del conjunt dels* $\sigma \in \mathbb{R}$ *tals que existeix* $s \in \mathbb{C}$ *amb* $\sigma = \mathrm{Re}(s)$ *tal que* $\mathrm{Re}(\zeta(s)) < 0$. *Van de Lune demostra que* σ_0 *és l'única solució de*

$$\sum_p \arcsin(p^{-\sigma}) = \frac{\pi}{2}$$

on $\sigma \in \mathbb{R}_{>1}$.

Exercici 3. Demostreu:

i) Per $0 \leq x \leq 1/2$, es té

$$x \leq \arcsin(x) \leq x + 2x^3.$$

Indicació: Podeu utilitzar que per $0 \leq x \leq 1$ *es té*

$$\arcsin(x) = \sum_{n \geq 0} c_n x^{2n+1} \qquad \text{on } c_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)}.$$

Proveu que $c_n \leq 1$ *per a tot* $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ *i deduïu-ne el resultat.*

ii) Existeix un únic $\sigma \in \mathbb{R}_{>1}$ tal que

$$\sum_p \arcsin(p^{-\sigma}) = \frac{\pi}{2}.$$

Indicació: Deduïu el resultat del fet que la funció

$$f : \mathbb{R}_{>1} \to \mathbb{R}_{>0}, \qquad f(\sigma) := \sum_p \arcsin(p^{-\sigma})$$

és una funció decreixent de $+\infty$ *a* 0. *Per veure això, utilitzeu el Corol·lari 17 de §1.*

Comentari: Es pot veure que numèricament la solució de $f(\sigma) = \pi/2$ *és* $\sigma = 1.19234...$.

Exercici 4. Definim la funció ψ de Chebyshev com

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$$

per $x \in \mathbb{R}_{>0}$.

i) Demostreu que
$$\psi(x) = \vartheta(x) + O(\sqrt{x}(\log(x))^2),$$
on ϑ és la funció de Chebyshev definida a Ex. 5 de FP 2.

Indicació: Vegeu que $\psi(x) - \vartheta(x) = \sum_{2 \leq m \leq \log_2(x)} \vartheta(x^{1/m})$ *i utilitzeu la desigualtat trivial* $\vartheta(x) \leq x \log(x)$.

ii) Demostreu que el Teorema del nombre primer és equivalent a

$$\vartheta(x) \sim x \qquad \text{quan } x \to \infty.$$

Indicació: En virtut de Ex. 5 de FP 2, serà suficient demostrar les dues següents afirmacions. Primer, que el Teorema del nombre primer implica que
$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt = 0.$$
Segon, que el fet que $\vartheta(x) \sim x$ *quan* $x \to \infty$ *implica que*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\log(x)}{x} \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t(\log(t))^2} dt = 0.$$

Per demostrar aquestes dues afirmacions, noteu que $\int_2^x = \int_2^{\sqrt{x}} + \int_{\sqrt{x}}^x$.

iii) Demostreu que el Teorema del nombre primer és equivalent a

$$\psi(x) \sim x \qquad \text{quan } x \to \infty.$$

Francesc Fité

Semestre de tardor 2023

Mètodes analítics en teoria de nombres

Full de problemes 4

L'entrega d'aquest full de problemes és voluntària, no es considerarà per l'avaluació i es resoldrà el dilluns 30/10/2023. En cas que vulgueu presentar un problema a la pissarra, pengeu-ne la solució al Campus Virtual abans del diumenge 29/11/2023 a les 15:00. En tal cas, recordeu d'esmentar les fonts consultades per a la resolució.

Exercici 1. Donat q un primer, definim el *polinomi ciclotòmic q-èsim* com

$$\Phi_q(T) = T^{q-1} + T^{q-2} + \cdots + T + 1.$$

i) Sigui p un primer diferent de q. Demostreu que les següents afirmacions són equivalents:

   a) Existeix $a \in \mathbb{Z}$ tal que $\Phi_q(a) \equiv 0 \pmod{p}$.
   b) Existeix $\overline{a} \in \mathbb{F}_p^\times$ tal que $\mathrm{ord}_{\mathbb{F}_p^\times}(\overline{a})$ és q.
   c) $p \equiv 1 \pmod{q}$.

ii) Demostreu que existeixen infinits primers p tals que

$$p \equiv 1 \pmod{q}.$$

   Indicació: Suposeu que existeix només un nombre finit de primers p tals que $p \equiv 1 \pmod{q}$ i denoteu per Π el seu producte. Demostreu que $\Phi_q(q\Pi) > 1$, que tot primer dividint $\Phi_q(q\Pi)$ és $\equiv 1 \pmod{q}$, i que això és una contradicció amb la definició de Π.

Comentari: Aquest exercici proporciona una demostració algebraica d'un cas particular del teorema de la progressió aritmètica de Dirichlet.

Exercici 2.

i) Sigui $f : \mathbb{Z}_{\geq 1} \to \mathbb{C}$ una funció aritmètica tal que $A(x) := \sum_{n \leq x} f(n)$ satisfà $A(x) = O(x \log(x))$. Demostreu que per $\sigma > 1$ tenim

$$\sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n^s} = s \int_1^\infty \frac{A(x)}{x^{s+1}} dx.$$

ii) Doneu una demostració alternativa de la identitat

$$\zeta(s) = s \int_1^\infty \frac{\lfloor x \rfloor}{x^{s+1}} dx$$

   vista a la demostració del Teorema 15 de §1.

iii) Demostreu que per $\sigma > 1$ tenim

$$\frac{1}{\zeta(s)} = s\int_1^\infty \frac{\sum_{n\le x}\mu(n)}{x^{s+1}}dx \qquad \text{i} \qquad -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = s\int_1^\infty \frac{\sum_{n\le x}\Lambda(n)}{x^{s+1}}dx.$$

Indicació: Utilitzeu Ex. 4 de FP 2.

Exercici 3. Per $n \in \mathbb{Z}_{\ge 1}$, sigui $d(n)$ el nombre de divisors positius de n. Demostreu que per $\sigma > 1$, es té que

$$\sum_{n\ge 1}\frac{d(n)}{n^s} = \zeta(s)^2, \qquad \sum_{n\ge 1}\frac{d(n^2)}{n^s} = \frac{\zeta(s)^3}{\zeta(2s)}.$$

Indicació: Observeu que $n \mapsto d(n^2)$ és una funció aritmètica multiplicativa. Podeu doncs considerar productes d'Euler en un semiplà de convergència absoluta i utilitzar la identitat

$$\sum_{m\ge 1} m x^m = \frac{x}{(x-1)^2}.$$

Exercici 4. Demostreu que

$$\sum_{m,n}{}' \frac{1}{m^2n^2} = \frac{\zeta(2)^2}{\zeta(4)},$$

on $\sum'_{m,n}$ indica la suma sobre totes les parelles $(m,n) \in (\mathbb{Z}_{\ge 1})^2$ tals que m i n són coprimers.

Indicació: Reescriviu

$$\sum_{m,n}{}' \frac{1}{m^2n^2} = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}_{\ge 1}} \frac{I(\gcd(m,n))}{m^2n^2},$$

on $I(n)$ és 1 si $n = 1$ i 0 altrament. Utilitzeu Ex. 2 de FP 1 i Ex. 4. de FP 2 per concloure la demostració.

Francesc Fité

Semestre de tardor 2023

Mètodes analítics en teoria de nombres

Full de problemes 5

Presenteu les vostres solucions al Campus Virtual abans del dilluns 13/11/2023 a les 23:59. Recordeu d'esmentar les fonts consultades per a la resolució dels exercicis.

Exercici 1. Sigui K un cos, q un primer senar different de la característica de K i ω una arrel primitiva q-èsima de la unitat. Donat $a \in \mathbb{F}_q^\times$, definim la *suma de Gauss* relativa a a i ω com

$$G_\omega(a) := G(a) := \sum_{m \in \mathbb{F}_q^\times} \left(\frac{m}{q}\right) \omega^{ma} .$$

Escriurem simplement G per denotar $G(1)$. Demostreu que:

i) $G(a) = \left(\frac{a}{q}\right) G$.

ii) $G = 1 + \sum_{m \in \mathbb{F}_q^\times} \omega^{m^2}$.

Exercici 2. Sigui K un cos, q un primer senar different de la característica de K i ω una arrel primitiva q-èsima de la unitat. Demostreu que:

i) Les arrels q-èsimes primitives de la unitat a la clausura algebraica $\overline{K}$ són les arrels de $\Phi_q(T) = T^{q-1} + \cdots + T + 1 \in K[T]$. En particular, la suma de totes elles és -1.

ii) $G^2 = (-1)^{\frac{q-1}{2}} q$.

Indicació: Expresseu G^2 com un doble sumatori i utilitzeu que per $a \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ tenim

$$\sum_{m \in \mathbb{F}_q^\times} \omega^{ma} = \begin{cases} q-1 & \textit{si } a = 0, \\ -1 & \textit{altrament.} \end{cases}$$

Comentari: Aquest exercici determina el valor de G llevat de signe. El valor exacte quan $K = \mathbb{C}$ serà determinat a l'exercici 4.

Comentari: Gauss va introduir aquestes sumes per donar encara una altra demostració de la llei de reciprocitat quadràtica. Aquesta és considerada al següent exercici.

Exercici 3. Siguin p i q primers senars diferents. Demostreu que

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{(p-1)(q-1)/4}.$$

Indicació: Sigui ω una arrel de $\Phi_q(T) \in \mathbb{F}_p[T]$ i considereu la suma de Gauss $G = G_\omega \in \mathbb{F}_p[\omega]$. Utilitzeu l'Exercici 1 per provar que $G^p = \left(\frac{p}{q}\right) G$ a $\mathbb{F}_p[\omega]$. Combineu aquesta igualtat amb l'Exercici 2.

Exercici 4. Sigui $G \in \mathbb{C}$ la suma de Gauss relativa a $e^{2\pi i/q}$. Demostreu que

$$G = \sqrt{q}\frac{1+i^{-q}}{1-i}.$$

Indicació: Podeu seguir els següents passos.

- *Utilitzeu sumació de Poisson per veure*

$$G = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \int_0^q e^{2\pi i\nu x + \frac{2\pi i x^2}{q}} dx.$$

- *Feu el canvi de variable $x = q(y - \nu/2)$ per mostrar que*

$$G = q \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi i \nu^2 q}{2}} \int_{\nu/2}^{1+\nu/2} e^{2\pi i q y^2} dy.$$

- *Separeu la suma respecte ν senar i ν parell per veure que*

$$G = q(1+i^{-q})e^{-\frac{\pi i \nu^2 q}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i q y^2} dy.$$

- *Mostreu que*

$$G = \sqrt{q}(1+i^{-q})C,$$

  on C és una constant independent de q. Observeu que tots els arguments fets són vàlids per q un natural senar qualsevol (no necessàriament primer) i determineu C prenent $q = 1$.

Francesc Fité

Semestre de tardor 2023

Mètodes analítics en teoria de nombres

Full de problemes 6

Presenteu les vostres solucions al Campus Virtual abans del dilluns 20/11/2023 a les 23:59. Recordeu d'esmentar les fonts consultades per a la resolució dels exercicis.

Exercici 1.

i) Demostreu que es té la següent igualtat de funcions meromorfes

$$-\frac{1}{2}\frac{\Gamma'(s/2+1)}{\Gamma(s/2+1)} = \frac{\gamma}{2} + \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n}\right).$$

Indicació: Justifiqueu que té sentit considerar $\log(\Gamma(s/2+1))$ *per* $\sigma > -2$ *i demostreu la identitat inicialment per* $\sigma > -2$*. Estengueu la validesa de la identitat per continuació analítica.*

ii) Demostreu que

$$-\frac{1}{2}\frac{\Gamma'(3/2)}{\Gamma(3/2)} = \frac{\gamma}{2} - 1 + \log(2).$$

Exercici 2.

i) Demostreu que es té la següent igualtat de funcions meromorfes

$$\frac{\xi'(s)}{\xi(s)} = \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\log(\pi) + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'(s/2+1)}{\Gamma(s/2+1)}.$$

Indicació: Justifiqueu que té sentit considerar $\log(\xi(s))$ *per* $\sigma > 1$ *i demostreu la identitat inicialment per* $\sigma > 1$*. Estengueu la validesa de la identitat per continuació analítica. Recordeu que* $\Gamma(s/2+1) = \Gamma(s/2)s/2$ *pel Lema 4 de §3.*

ii) Demostreu que

$$\frac{\xi'(s)}{\xi(s)} = -\frac{\xi'(1-s)}{\xi(1-s)}.$$

iii) Demostreu que

$$\frac{\xi'(0)}{\xi(0)} = \frac{\gamma}{2} - 1 + \frac{\log(4\pi)}{2} - \lim_{s\to 1}\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1}\right).$$

Exercici 3.

i) Demostreu que

$$\lim_{s\to 1}\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}+\frac{1}{s-1}\right)=1-\int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^2}dx.$$

Indicació: Utilitzeu que, pel Teorema 15 de §1, per $\sigma > 0$ tenim l'expressió $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \phi(s)$ on $\phi(s)$ és una funció holomorfa. Obtingueu calculant que

$$\lim_{s\to 1}\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}+\frac{1}{s-1}\right)=\phi(1)$$

i concloeu utilitzant que de fet $\phi(s) = 1 - s\int_1^\infty \{x\}x^{-s-1}dx$.

ii) Proveu que

$$\int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^2}dx = 1-\gamma.$$

iii) Deduïu que

$$\frac{\xi'(0)}{\xi(0)} = -\frac{\gamma}{2} - 1 + \frac{\log(4\pi)}{2}.$$

Exercici 4 (Teorema tauberià de Shapiro). Donada una successió de nombres reals no negatius $\{a_n\}_n$, per $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, definim les quantitats

$$S(x) := \sum_{n\leq x} a_n, \qquad T(x) := \sum_{n\leq x} a_n \left\lfloor \frac{x}{n}\right\rfloor, \qquad A(x) := \sum_{n\leq x}\frac{a_n}{n}.$$

Suposeu que

$$T(x) = x\log(x) + O(x) \qquad \text{quan } x \geq 1.$$

Demostreu que:

i) $S(x) = O(x)$ per $x \geq 1$.

Indicació: Proveu les desigualtats

$$S(x) - S(x/2) \leq T(x) - 2T(x/2) \leq K \cdot x$$

per una certa $K \in \mathbb{R}_{>0}$.

ii) Proveu que

$$A(x) = \log(x) + O(1) \qquad \text{quan } x \geq 1.$$

Indicació: Vegeu primer

$$T(x) = xA(x) + O(x).$$

iii) Sigui $M \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $|A(x) - \log(x)| \leq M$ quan $x \geq 1$ i sigui $\alpha := e^{-2M-1}$. Demostreu que

$$S(x) \geq \alpha x \qquad \text{quan } x \geq 1/\alpha.$$

Indicació: Proveu les desigualtats

$$\frac{S(x)}{\alpha x} \geq A(x) - A(\alpha x) \geq 1 \qquad \textit{quan } x \geq 1/\alpha.$$

Francesc Fité

Semestre de tardor 2023

Mètodes analítics en teoria de nombres

Full de problemes 7

Presenteu les vostres solucions al Campus Virtual abans del dilluns 27/11/2023 a les 23:59. Recordeu d'esmentar les fonts consultades per a la resolució dels exercicis.

Exercici 1. Demostreu que:

i) Per $x \in \mathbb{R}_{\geq 2}$, es té

$$\sum_{m \leq x} \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor \Lambda(m) = x\log(x) - x + O(\log(x)).$$

Indicació: Justifiqueu que $\sum_{m\leq x} \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor \Lambda(m) = \sum_{n\leq x}\sum_{m|n} \Lambda(m)$ *i apliqueu Ex. 1 de FP 1 i la fórmula de sumació d'Euler.*

ii) Deduïu que existeixen $A, B \in \mathbb{R}_{>0}$ tals que

$$Ax \leq \psi(x) \leq Bx \qquad \text{per } x \gg 0,$$

on ψ és la funció de Chebyshev definida a Ex. 4. de FP 3.

iii) Deduïu que

$$\sum_{n\leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \log(x) + O(1) \qquad \text{per } x \in \mathbb{R}_{\geq 2}.$$

Exercici 2. Demostreu que

$$\sum_{p\leq x} \frac{\log(p)}{p} = \log(x) + O(1) \qquad \text{per } x \in \mathbb{R}_{\geq 2}.$$

Indicació: Apliqueu l'exercici anterior.

Exercici 3. Demostreu que existeix $K \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sum_{p\leq x} \frac{1}{p} = \log(\log(x)) + K + O\left(\frac{1}{\log(x)}\right) \qquad \text{per } x \in \mathbb{R}_{\geq 2}.$$

Indicació: Observeu que

$$\sum_{p\leq x} \frac{1}{p} = \sum_{2\leq n\leq x} a_n g(n),$$

on $g(t) = 1/\log(t)$ *i* $a_n = \log(n)/n$ *si* n *és primer i* $a_n = 0$ *altrament. Apliqueu el criteri de sumació d'Abel i l'exercici anterior.*

Francesc Fité

Semestre de tardor 2023

Mètodes analítics en teoria de nombres

Full de problemes 8

Presenteu les vostres solucions al Campus Virtual abans del dilluns 11/12/2023 a les 23:59. Recordeu d'esmentar les fonts consultades per a la resolució dels exercicis.

Exercici 1.

i) Sigui $f : U \to \mathbb{C}$ una funció holomorfa, on U és un obert estable per la conjugació complexa. Demostreu que la funció $g : U \to \mathbb{C}$ definida per $g(s) = \overline{f(\overline{s})}$ és una funció holomorfa.

ii) Mostreu que l'apartat anterior roman cert si substituïm la paraula 'holomorfa' per 'meromorfa'.

iii) Demostreu que $\overline{\zeta(\overline{s})} = \zeta(s)$. Deduïu que si ρ és un zero de ζ a la franja crítica, aleshores $\overline{\rho}$ és un zero de ζ a la franja crítica.

Indicació: Proveu la igualtat $\overline{\zeta(\overline{s})} = \zeta(s)$ per $\sigma > 1$ i apliqueu continuació analítica.

iv) Al Teorema 15 de §4, hem vist que la suma dels recíprocs dels valors absoluts dels zeros de ζ a la franja crítica divergeix. Demostreu que la suma dels recíprocs dels zeros de ζ a la franja crítica convergeix si aquests són agrupats en parells de complexos conjugats. Més precisament, sigui $\{\rho_n\}_n$ una enumeració dels zeros de ζ (comptats amb multiplicitat) que tenen part imaginària positiva i pertanyen a la franja crítica. Aleshores

$$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{\rho_n}+\frac{1}{\overline{\rho}_n}\right)$$

convergeix absolutament.

Exercici 2. Sigui $\{\rho_n\}_n$ una enumeració dels zeros de ζ (comptats amb multiplicitat) que tenen part imaginària positiva i pertanyen a la franja crítica.

i) Demostreu que

$$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{\rho_n}+\frac{1}{\overline{\rho}_n}\right) = \frac{\gamma}{2}+1-\frac{\log(4\pi)}{2}.$$

Indicació: Substituïu a l'equació funcional per $\xi'(s)/\xi(s)$ obtinguda a Ex. 2 de FP6, la derivada logarítmica de la fórmula del Corol·lari 16, §4. Obtingueu la cancel·lació desitjada provant que ρ és un zero de ζ si i només si $1-\rho$ ho és.

ii) Demostreu que si ρ és un zero de ζ a la franja crítica, aleshores $|\mathrm{Im}(\varrho)| > 6$.

Indicació: Podeu utilitzar que $\gamma/2 + 1 - \log(4\pi)/2 < 0.024$.

Exercici 3. Sigui f una funció meromorfa en un entorn de $a \in \mathbb{C}$.

i) Proveu que existeix $m \in \mathbb{Z}$ tal que $f(s) = (s-a)^m g(s)$, on $g(s)$ és una funció holomorfa en un entorn de a tal que $g(a) \neq 0$.

Indicació: Podeu utilitzar que si f *és holomorfa en* a*, aleshores existeix* $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ *tal que* $f(s) = (s-a)^m g(s)$*, on* $g(s)$ *és una funció holomorfa tal que* $g(a) \neq 0$.

ii) Proveu que f'/f no és holomorfa en a si i només si $m \neq 0$. Proveu que en tal cas f'/f té un pol simple en a de residu m.

iii) Proveu que existeix $K \in \mathbb{R}$ tal que per $1 < \sigma \leq 2$ es té

$$-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} < \frac{1}{\sigma - 1} + K.$$

Francesc Fité

Semestre de tardor 2023

Mètodes analítics en teoria de nombres

Full de problemes 9

L'entrega d'aquest full de problemes és voluntària, **però és clau per la preparació de l'examen** i es resoldrà el divendres 12/1/2024. En cas que vulgueu presentar un problema a la pissarra, pengeu-ne la solució al Campus Virtual abans del dimecres 10/1/2024 a les 23:59. En tal cas, recordeu d'esmentar les fonts consultades per a la resolució.

Exercici 1. Sigui q un primer i χ un caràcter de Dirichlet mòdul q no principal. Definim la suma de Gauss relativa a χ com

$$G(\chi) = \sum_{m=1}^{q-1} \chi(m) e^{2\pi i m/q}.$$

i) Demostreu que per tot $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, tenim

$$\chi(n) G(\overline{\chi}) = \sum_{m=1}^{q-1} \overline{\chi}(m) e^{2\pi i n m/q}$$

ii) Demostreu que

$$|G(\chi)| = \sqrt{q}.$$

Indicació: Calculeu el valor de

$$(q-1)|G(\overline{\chi})|^2 = \sum_{n=0}^{q-1} |\chi(n) G(\overline{\chi})|^2$$

utilitzant l'expressió obtinguda per $\chi(n)G(\overline{\chi})$ *a l'apartat anterior.*

iii) Proveu que $\overline{G(\chi)} = \chi(-1) G(\overline{\chi})$ i deduïu que

$$G(\chi)G(\overline{\chi}) = \begin{cases} q & \text{si } \chi(-1) = 1, \\ -q & \text{si } \chi(-1) = -1. \end{cases}.$$

iv) Per $x \in \mathbb{R}_{>0}$, definim la funció ϑ de Jacobi relativa a χ com

$$\vartheta(\chi, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi(n) e^{-n^2 \pi x/q}.$$

Demostreu que

$$G(\overline{\chi}) \vartheta(\chi, x) = \sqrt{\frac{q}{x}} \vartheta(\overline{\chi}, x^{-1}).$$

Indicació: Podeu utilitzar la fórmula de sumació de Poisson

$$\sqrt{x} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-n^2 \pi x + 2\pi i n \alpha} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{(n+\alpha)^2 \pi}{x}}.$$

Exercici 2. Sigui q un primer i χ un caràcter de Dirichlet mòdul q no principal i tal que $\chi(-1) = 1$. Es defineix la funció L associada a χ completada com

$$\xi(\chi, s) := \left(\frac{q}{\pi}\right)^{s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) L(\chi, s).$$

i) Demostreu que per $\sigma > 0$

$$\xi(\chi, s) = \frac{1}{2} \int_0^\infty x^{s/2-1} \vartheta(\chi, x) dx.$$

Indicació: Partiu de la definició

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s/2-1} dx \quad \textit{per } \sigma > 0$$

i procediu imitant la demostració del Teorema 8 de §3.

ii) Proveu que

$$\xi(\chi, s) = \frac{1}{2} \int_1^\infty x^{s/2-1} \vartheta(\chi, x) dx + \frac{\sqrt{q}}{2G(\overline{\chi})} \int_1^\infty x^{-s/2-1/2} \vartheta(\overline{\chi}, x) dx.$$

iii) Deduïu que

$$\xi(\overline{\chi}, 1-s) = \frac{\sqrt{q}}{G(\chi)} \xi(\chi, s).$$

Comentari: En primer lloc, observeu que ii) mostra que $\xi(\chi, s)$ estén a una funció entera a tot $\mathbb{C}$. Podem reescriure l'equació funcional de l'últim apartat com

$$L(\chi, s) = \frac{G(\chi)}{\sqrt{q}} \left(\frac{q}{\pi}\right)^{-s+1/2} \frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} L(\overline{\chi}, 1-s).$$

Al Lema 7 de §2 vam veure que $L(\chi, s)$ és holomorfa per $\sigma > 0$. L'expressió anterior ens diu que $L(\chi, s)$ és holomorfa a tot $\mathbb{C}$, que els únics zeros amb $\sigma < 0$ són a $-2, -4, -6, \ldots$ i que $L(\chi, 0) = 0$.

Exercici 3. Sigui q un primer $\equiv 3 \pmod 4$, denotem per χ el caràcter quadràtic $\left(\frac{\cdot}{q}\right)$ i considerem la suma de Gauss

$$G(\chi) = \sum_{m=1}^{q-1} \chi(m) e^{2\pi i m/q}.$$

i) Demostreu que

$$L(\chi, 1) = -\frac{1}{G(\chi)} \sum_{m=1}^{q-1} \left(\frac{m}{q}\right) \log\left(1 - e^{2\pi i m/q}\right).$$

Indicació: Utilitzeu que

$$\left(\frac{n}{q}\right) = \frac{1}{G(\chi)} \sum_{m=1}^{q-1} \left(\frac{m}{q}\right) e^{2\pi i m n/q}$$

tal com vam veure a Ex. 1 de FP 5.

ii) Donat $\theta \in (0, 2\pi) \subseteq \mathbb{R}$, demostreu que $|1 - e^{i\theta}| = 2\sin(\theta/2)$ i $\arg(1 - e^{i\theta}) = (\theta - \pi)/2$, on $\arg(s) \in (-\pi, \pi)$ denota la determinació principal de l'argument.

Indicació: Recordeu el teorema del sinus per triangles.

iii) Demostreu que

$$L(\chi, 1) = -\frac{\pi}{q^{3/2}} \sum_{m=1}^{q-1} \left(\frac{m}{q}\right) m.$$

Indicació: Utilitzeu que $G(\chi) = i\sqrt{q}$ tal com vam veure a Ex. 4 de FP 5.

iv) Demostreu que

$$\sum_{m=1}^{q-1} \left(\frac{m}{q}\right) m < 0.$$

8/11/2023

Semestre de tardor 2023

Mètodes analítics en teoria de nombres

Examen parcial

Entregueu exercicis diferents en fulls diferents.

Exercici 1 (3 punts). Per $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, sigui $\nu(n)$ el nombre de divisors primers diferents de n.

i) Proveu que $f(n) := 2^{\nu(n)}$ és una funció aritmètica multiplicativa. Demostreu que $f(n) \leq n$ i que l'abscissa de convergència absoluta de

$$\sum_{n\geq 1} \frac{2^{\nu(n)}}{n^s}$$

és ≤ 2.

ii) Demostreu que per $\sigma > 1$ es té

$$\sum_{n\geq 1} \frac{2^{\nu(n)}}{n^s} = \frac{\zeta(s)^2}{\zeta(2s)}.$$

Exercici 2 (4 punts). Sigui $1 \neq s \in \mathbb{C}$ i sigui σ la part real de s.

i) Demostreu que per $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, tenim

$$\int_n^{n+1} \int_n^x st^{-s-1} dt dx = \frac{1}{n^s} - \frac{n^{1-s} - (n+1)^{1-s}}{s-1}.$$

ii) Suposeu que $\sigma > 0$. Demostreu que

$$\left| \int_n^{n+1} \int_n^x st^{-s-1} dt dx \right| \leq \frac{|s|}{2n^{1+\sigma}}$$

i deduïu que tenim que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$ convergeix si i només si, per $N \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, el límit $\lim_{N\to\infty} N^{1-s}$ existeix.

iii) Suposeu que $\sigma = 1$. Demostreu que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$ no convergeix.

Exercici 3 (3 punts). Enuncieu i demostreu el teorema de Landau vist a classe.

Solució exercici 1. Part i). Siguin $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ coprimers. Aleshores $\nu(nm) = \nu(n) + \nu(m)$, de manera que

$$f(nm) = 2^{\nu(nm)} = 2^{\nu(n)+\nu(m)} = 2^{\nu(n)}2^{\nu(m)} = f(m)f(n).$$

Per definició de $\nu(n)$, existeixen primers $p_1, p_2, \ldots, p_{\nu(n)}$ tals que

$$2^{\nu(n)} \leq p_1 \cdots p_{p_{\nu(n)}} \mid n,$$

d'on se segueix $f(n) \leq n$. Que l'abscissa de convergència absoluta és ≤ 2 es deriva del fet que

$$\left|\sum_{n\geq 1} \frac{2^{\nu(n)}}{n^s}\right| \leq \sum_{n\geq 1} \frac{n}{n^\sigma} \leq \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\sigma-1}},$$

cosa que conclou la demostració en virtut del teorema d'existència del semiplà de convergència absoluta vist a teoria.

Part ii). La multiplicativitat de $2^{\nu(n)}$ i la convergència absoluta per $\sigma > 2$, ens permeten considerar el producte d'Euler de la sèrie de Dirichlet donada sobre aquest semiplà

$$\sum_{n\geq 1} \frac{2^{\nu(n)}}{n^s} = \prod_p \sum_{m\geq 0} \frac{2^{\nu(p^m)}}{p^{ms}} = \prod_p \left(1 + \sum_{m\geq 1} \frac{2}{p^{ms}}\right) = \prod_p \left(1 + \frac{2p^{-s}}{1-p^{-s}}\right) =$$

$$= \prod_p \frac{1+p^{-s}}{1-p^{-s}} = \prod_p \frac{1-p^{-2s}}{(1-p^{-s})^2} = \frac{\zeta(s)^2}{\zeta(2s)}.$$

Queda per veure que la sèrie de Dirichlet considerada convergeix per $\sigma > 1$. Això es deu al Teorema de Landau, que podem aplicar ja que:

- La sèrie té coeficients reals no negatius;
- Com acabem de veure, la sèrie estén a la funció $\zeta(s)^2/\zeta(2s)$ que no té pols per $\sigma > 1$.

Solució exercici 2. Part i). Tenim que

$$\int_n^{n+1}\int_n^x st^{-s-1}dtdx = \int_n^{n+1}(n^{-s} - x^{-s})dx = n^{-s} - \int_n^{n+1} x^{-s}dx.$$

A més a més, com que $s \neq 1$, veiem que

$$\int_n^{n+1} x^{-s}dx = \left.\frac{x^{-s+1}}{-s+1}\right|_n^{n+1} = \frac{(n+1)^{-s+1} - n^{-s+1}}{-s+1} = \frac{n^{1-s} - (n+1)^{1-s}}{s-1}.$$

Part ii). Tenim que

$$\left|\int_n^{n+1}\int_n^x st^{-s-1}dtdx\right| \leq \int_n^{n+1}\int_n^x |s|t^{-\sigma-1}dtdx \leq \int_n^{n+1} \frac{|s|(x-n)}{n^{1+\sigma}}dx =$$

$$= \left.\frac{|s|(x-n)^2}{2n^{1+\sigma}}\right|_n^{n+1} = \frac{|s|}{2n^{1+\sigma}}.$$

Combinant els dos apartats anteriors tenim que

$$\sum_{n\geq 1}\left|\frac{1}{n^s}-\frac{n^{1-s}-(n+1)^{1-s}}{s-1}\right|\leq\frac{|s|}{2}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{1+\sigma}}.$$

Per $\sigma>0$, el criteri de comparació implica que

$$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n^s}-\frac{n^{1-s}-(n+1)^{1-s}}{s-1}\right)$$

és absolutament convergent i en particular convergent. Se'n segueix que $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}$ és convergent si i només si

$$\sum_{n\geq 1}\frac{n^{1-s}-(n+1)^{1-s}}{s-1}=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N-1}\frac{n^{1-s}-(n+1)^{1-s}}{s-1}=\lim_{N\to\infty}\frac{1-N^{1-s}}{s-1}$$

és convergent, és a dir, si i només si $\lim_{N\to\infty}N^{1-s}$ existeix.

Part iii). Podem assumir $s\neq 1$, ja que altrament el resultat és conegut. Tenim doncs $s=1+it$, per $t\neq 0$. Per l'apartat anterior n'hi ha prou amb veure que

$$\lim_{N\to\infty}N^{-it}=\lim_{N\to\infty}\cos(t\log(N))+i\lim_{N\to\infty}\sin(t\log(N)).$$

no existeix. Però notem que $\lim_{N\to\infty}\cos(t\log(N))$ no existeix, ja que la successió $\{\cos(t\log(N))\}_N$ admet parcials amb límits diferents. En efecte, si per $k\in\mathbb{Z}$ definim

$$N_k=\lfloor e^{2\pi k/t}\rfloor \qquad \text{i} \qquad N_k'=\lfloor e^{\pi k/t}\rfloor,$$

aleshores tenim

$$\lim_{k\to\infty}\cos(t\log(N_k))=1 \qquad \text{i} \qquad \lim_{k\to\infty}\cos(t\log(N_k'))=-1.$$

Comentari: La demostració del Lemma 1 de §1 mostra que si una sèrie de Dirichlet convergeix absolutament en un punt s_0 *amb* $\mathrm{Re}(s_0)=\sigma_0$*, aleshores la sèrie de Dirichlet convergeix absolutament sobre tots els punts de la recta* $\sigma=\sigma_0$*. Com que* $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}$ *no convergeix absolutament en* $s=1$*, sabem que no pot convergir absolutament en cap punt de la recta* $\sigma=1$*. Com mostra aquest exercici, la demostració de la no convergència de* $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}$ *sobre la recta* $\sigma=1$ *és molt més subtil.*

18/1/2024

Semestre de tardor 2023

Mètodes analítics en teoria de nombres

Examen final

Entregueu exercicis diferents en fulls diferents.

Exercici 1 (Teoria; 2,5 punts). Sigui $s = \sigma + it$. Demostreu que per $\sigma > 1$, se satisfà

$$\operatorname{Re} \log \zeta(s) = \sum_p \sum_{m \geq 1} \frac{\cos(mt \log p)}{mp^{\sigma m}}.$$

Demostreu que per $\theta \in \mathbb{R}$ tenim $3 + 4\cos(\theta) + \cos(2\theta) \geq 0$. Deduïu-ne que $\zeta(s) \neq 0$ si $\sigma = 1$.

Exercici 2 (2,5 punts). Donat un enter positiu de la forma $n = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$, on $p_1 < \cdots < p_k$ són primers i $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Z}_{>0}$, definim

$$\lambda(n) = (-1)^{a_1 + \cdots + a_k} \qquad \text{i} \qquad \nu(n) = k.$$

Definim a més $\lambda(1) = 1$ i $\nu(1) = 0$. Demostreu que $f(n) = 2^{\nu(n)}\lambda(n)$ és una funció multiplicativa i que per $\sigma > 2$, es té

$$\sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n^s} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)^2}.$$

Exercici 3 (2,5 punts). Sigui q un primer i χ un caràcter de Dirichlet mòdul q no principal i tal que $\chi(-1) = -1$. Per $\sigma > 0$, es defineix la funció L completada associada a χ com

$$\xi(\chi, s) := \left(\frac{q}{\pi}\right)^{(s+1)/2} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) L(\chi, s).$$

i) Demostreu que per $\sigma > 0$

$$\xi(\chi, s) = \frac{1}{2} \int_0^\infty x^{(s-1)/2} \vartheta(\chi, x) dx, \qquad \text{on } \vartheta(\chi, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n\chi(n) e^{-n^2 \pi x/q}.$$

Indicació: Partiu de la definició

$$\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-u} u^{(s+1)/2} \frac{du}{u} \quad \textit{per } \sigma > 0$$

i efectueu el canvi $u = n^2 \pi x/q$.

ii) Utilitzant (sense necessitat de demostrar) que

$$\vartheta(\chi, x^{-1}) = \frac{i\sqrt{q}x^{3/2}}{G(\overline{\chi})} \vartheta(\overline{\chi}, x), \quad \text{on } G(\overline{\chi}) = \sum_{m=1}^{q-1} \overline{\chi}(m) e^{2\pi i m/q},$$

proveu que

$$\xi(\chi, s) = \frac{1}{2}\int_1^\infty x^{(s-1)/2}\vartheta(\chi, x)dx + \frac{i\sqrt{q}}{2G(\overline{\chi})}\int_1^\infty x^{-s/2}\vartheta(\overline{\chi}, x)dx.$$

iii) Utilitzant que $G(\chi)G(\overline{\chi}) = -q$ (com vam veure a Ex. 1 de FP9), deduïu que

$$\xi(\overline{\chi}, 1-s) = \frac{i\sqrt{q}}{G(\chi)}\xi(\chi, s).$$

iv) Deduïu que $L(\chi, s)$ estén a una funció holomorfa a tot $\mathbb{C}$ que, per $\sigma < 0$, només té zeros als enters senars negatius.

Exercici 4 (2,5 punts). Sigui q un primer $\equiv 3 \pmod 4$ i denotem per χ el caràcter quadràtic $\left(\frac{\cdot}{q}\right)$.

i) Demostreu que

$$L(\chi, 1) = \frac{1}{G(\chi)}\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{q}\right)\right)^{-1} \cdot \sum_{m=1}^{q-1}\left(\frac{m}{q}\right)\sum_{n\in 1+2\mathbb{N}}\frac{e^{2\pi inm/q}}{n},$$

on $1 + 2\mathbb{N}$ denota el conjunt dels enters positius senars i $G(\chi)$ la suma de Gauss associada a χ.

Indicació: Podeu utilitzar que $\left(\frac{n}{q}\right) = \frac{1}{G(\chi)}\sum_{m=1}^{q-1}\left(\frac{m}{q}\right)e^{2\pi imn/q}$ *tal com vam veure a Ex. 1 de FP 5.*

ii) Demostreu que

$$L(\chi, 1) = \frac{1}{\sqrt{q}\left(2 - \left(\frac{2}{q}\right)\right)}\sum_{m=1}^{q-1}\left(\frac{m}{q}\right)\left(\arg(1 + e^{2\pi im/q}) - \arg(1 - e^{2\pi im/q})\right),$$

on $\arg(s) \in (-\pi, \pi)$ denota la determinació principal de l'argument.

Indicació: Utilitzeu que $G(\chi) = i\sqrt{q}$ *tal com vam veure a Ex. 4 de FP 5.*

iii) Donat $\theta \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$, demostreu que

$$-\arg(1 - e^{i\theta}) + \arg(1 + e^{i\theta}) = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } \theta \in (0, \pi), \\ -\pi/2 & \text{si } \theta \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$$

Indicació: Com vam veure a Ex. 3 de FP 9, podeu utilitzar que per $\theta \in (0, 2\pi)$, *tenim* $\arg(1 - e^{i\theta}) = (\theta - \pi)/2$.

iv) Demostreu que

$$L(\chi, 1) = \frac{\pi}{\sqrt{q}\left(2 - \left(\frac{2}{q}\right)\right)}\sum_{0<m<q/2}\left(\frac{m}{q}\right).$$

v) Demostreu que

$$\sum_{0<m<q/2}\left(\frac{m}{q}\right) > 0.$$

Solució exercici 2. És suficient demostrar que $2^{\nu(\cdot)}$ i $\lambda(\cdot)$ són multiplicatives. Que $2^{\nu(\cdot)}$ és multiplicativa ja ho vam veure al parcial i que $\lambda(\cdot)$ és multiplicativa (i de fet completament multiplicativa) és trivial. Com que $|f(n)| \leq n$, la sèrie

$$\sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^s}$$

convergeix absolutament per $\sigma > 2$ i en aquest semiplà tenim

$$\sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_p \sum_{m\geq 0} \frac{f(p^m)}{p^{ms}} = \prod_p \left(1 + \sum_{m\geq 1} \frac{2(-1)^m}{p^{ms}}\right) = \prod_p \left(\frac{2}{1+p^{-s}} - 1\right) = \prod_p \frac{1-p^{-s}}{1+p^{-s}}$$

Multiplicant numerador i denominador per $1 - p^{-s}$, obtenim

$$\sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_p \frac{(1-p^{-s})^2}{1-p^{-2s}} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)^2}.$$

Comentari: De fet la igualtat anterior és vàlida per $\sigma > 1$. Això es deu al fet que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^s}$$

és absolutament convergent per $\sigma > 1$, ja que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{|f(n)|}{n^s} = \sum_{n\geq 1} \frac{2^{\nu(n)}}{n^s}$$

convergeix per $\sigma > 1$, tal com vam veure al parcial. Notem que no podem aplicar el Teorema de Landau directament ja que $f(n)$ pren valors negatius.

Solució exercici 3. Part i). Fent el canvi suggerit, obtenim

$$\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-u} u^{(s+1)/2} \frac{du}{u} = \int_0^\infty e^{-\frac{n^2\pi x}{q}} \left(\frac{n^2\pi x}{q}\right)^{(s+1)/2} \frac{dx}{x}$$

Per tant

$$\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\left(\frac{q}{\pi}\right)^{\frac{s+1}{2}} \frac{1}{n^{s+1}} = \int_0^\infty e^{-\frac{n^2\pi x}{q}} x^{(s+1)/2} \frac{dx}{x}.$$

Multiplicant per $n\chi(n)$ i sumant, obtenim

$$\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\left(\frac{q}{\pi}\right)^{\frac{s+1}{2}} L(\chi, s) = \int_0^\infty \left(\sum_{n\geq 1} n\chi(n) e^{-\frac{n^2\pi x}{q}}\right) x^{(s+1)/2} \frac{dx}{x},$$

on l'argument utilitzat per canviar l'ordre de sumació/integració és anàleg a l'utilitzat a Teorema 8 §3). Atès que $\chi(-n) = -\chi(n)$ i $\chi(0) = 0$, tenim que

$$\sum_{n\geq 1} n\chi(n) e^{-\frac{n^2\pi x}{q}} = \vartheta(\chi, x)/2,$$

d'on se'n segueix el resultat.

Part ii). Per l'apartat anterior sabem que

$$\xi(\chi, s) = \frac{1}{2}\int_1^\infty x^{(s-1)/2}\vartheta(\chi, x)dx + \frac{1}{2}\int_0^1 u^{(s+1)/2}\vartheta(\chi, u)\frac{du}{u}$$

Però el canvi $x = u^{-1}$ i l'equació funcional per ϑ donada impliquen que

$$\frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{s+1}{2}}\vartheta(\chi, u)\frac{du}{u} = \frac{1}{2}\int_1^\infty x^{-\frac{s+1}{2}}\vartheta(\chi, x^{-1})\frac{dx}{x} = \frac{i\sqrt{q}}{2G(\overline{\chi})}\int_1^\infty x^{-\frac{s}{2}}\vartheta(\overline{\chi}, x)dx$$

Part iii). És suficient observar que

$$\xi(\overline{\chi}, 1-s) = \frac{i\sqrt{q}i\sqrt{q}}{2G(\chi)G(\overline{\chi})}\int_1^\infty x^{-s/2}\vartheta(\overline{\chi}, x)dx + \frac{i\sqrt{q}}{2G(\chi)}\int_1^\infty x^{(s-1)/2}\vartheta(\chi, x)dx.$$

Part iv). L'expressió obtinguda a l'apartat anterior, es pot reescriure com

$$L(\chi, s) = g(s)\frac{\Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}L(\overline{\chi}, 1-s),$$

on $g(s)$ és una funció holomorfa que no s'anul·la. Això defineix $L(\chi, s)$ quan $\sigma \leq 0$, atès que aleshores $1-s$ té part real ≥ 1 i aleshores $L(\overline{\chi}, 1-s)$ com a sèrie de Dirichlet està ben definida. Com que per $\sigma < 0$, les funcions $g(s)$, $\Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right)$, i $L(\overline{\chi}, 1-s)$, no s'anul·len, els zeros de $L(\chi, s)$ són precisament els pols de $\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)$, que trobem als enters senars negatius (i que no es cancel·len amb els pols de $\Gamma((2-s)/2)$).

Solució exercici 4. Part i). Atès que tot enter positiu s'expressa de manera única com el producte d'un nombre senar i una potència de 2, tenim la identitat

$$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n}{q}\right)\frac{1}{n^s} = \left(1 - \left(\frac{2}{q}\right)\frac{1}{2^s}\right)^{-1}\sum_{n\in 1+2\mathbb{N}}\left(\frac{n}{q}\right)\frac{1}{n^s}.$$

Aquesta identitat és vàlida per $\sigma > 0$, atès que χ és no principal i per tant les sumes parcials dels coeficients de les dues sèries de Dirichlet que hi intervenen estan fitades. Per tant

$$L(\chi, 1) = \left(1 - \left(\frac{2}{q}\right)\frac{1}{2}\right)^{-1}\sum_{n\in 1+2\mathbb{N}}\left(\frac{n}{q}\right)\frac{1}{n} = \left(1 - \left(\frac{2}{q}\right)\frac{1}{2}\right)^{-1}\frac{1}{G(\chi)}\sum_{m=1}^{q-1}\left(\frac{m}{q}\right)\sum_{n\in 1+2\mathbb{N}}\frac{e^{2\pi imn/q}}{n}$$

Part ii). Escrivim $z = e^{2\pi im/q}$. Com que $e^{2\pi im/q}$ té valor absolut 1 i és $\neq \pm 1$, tenim que

$$\sum_{n\in 1+2\mathbb{N}}\frac{z^n}{n} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{n} - \sum_{n\geq 1}\frac{(-z)^n}{n}\right) = \frac{1}{2}\left(\log(1+z) - \log(1-z)\right).$$

Com que $L(\chi, 1) \in \mathbb{R}$, utilitzant que $G(\chi) = i\sqrt{q}$, tenim que

$$L(\chi, 1) = \mathrm{Re}\big(L(\chi, 1)\big) = \frac{1}{\sqrt{q}\left(2 - \left(\frac{2}{q}\right)\right)}\sum_{m=1}^{q-1}\left(\frac{m}{q}\right)\mathrm{Im}\left(\log(1 + e^{2\pi im/q}) - \log(1 - e^{2\pi im/q})\right),$$

d'on es deriva que

$$L(\chi,1) = \frac{1}{\sqrt{q}\left(2-\left(\frac{2}{q}\right)\right)} \sum_{m=1}^{q-1} \left(\frac{m}{q}\right) \left(\arg(1+e^{2\pi i m/q}) - \arg(1-e^{2\pi i m/q})\right).$$

Part iii). Utilitzant la indicació, podem reescriure

$$\arg(1+e^{i\theta}) = \begin{cases} \arg(1-e^{i(\theta+\pi)}) = \theta/2 & \text{si } \theta \in (0,\pi), \\ \arg(1-e^{i(\theta-\pi)}) = \theta/2-\pi & \text{si } \theta \in (\pi,2\pi). \end{cases}$$

Aleshores

$$-\arg(1-e^{i\theta}) + \arg(1+e^{i\theta}) = \begin{cases} (\pi-\theta)/2+\theta/2 = \pi/2 & \text{si } \theta \in (0,\pi), \\ (\pi-\theta)/2+\theta/2-\pi = -\pi/2 & \text{si } \theta \in (\pi,2\pi). \end{cases}$$

Part iv). Combinant les parts ii) i iii), obtenim

$$L(\chi,1) = \frac{1}{\sqrt{q}\left(2-\left(\frac{2}{q}\right)\right)} \left(\sum_{0<m<q/2} \left(\frac{m}{q}\right)\frac{\pi}{2} + \sum_{q/2<m<q} \left(\frac{m}{q}\right)\frac{-\pi}{2} \right).$$

Com que $q \equiv 3 \pmod 4$, tenim que $\left(\frac{-1}{q}\right) = -1$ i per tant

$$L(\chi,1) = \frac{\pi}{\sqrt{q}\left(2-\left(\frac{2}{q}\right)\right)} \sum_{0<m<q/2} \left(\frac{m}{q}\right)$$

Part v). Sabem que $L(\chi,s) > 0$ per $s \in \mathbb{R}_{>1}$ (per ser un producte d'Euler

$$\prod_p (1-\chi(p)p^{-s})^{-1}$$

de factors estrictament positius). Per continuïtat, tenim que $L(\chi,1) \geq 0$, cosa que per l'apartat anterior implica que

$$\sum_{0<m<q/2} \left(\frac{m}{q}\right) \geq 0.$$

Com que $q \equiv 3 \pmod 4$, tenim que la suma anterior té un nombre senar de termes (concretament $(q-1)/2$). Com que cadascun d'aquests termes és 1 o -1, la suma considerada no pot ser zero. Alternativament, per veure que la suma anterior no és 0 també es pot invocar el Teorema 11 de §2.

Comentari: Podem interpretar la desigualtat anterior com el fet que a la primera meitat de l'interval de 0 a $q-1$ hi ha més residus quadràtics que no quadràtics. És un fet remarcable que no es conegui cap demostració elemental (no analítica) d'aquest fet.