Clasificación de Grupos Abelianos

Rodrigo Peláez
Asesor: Xavier Caicedo

Universidad de Los Andes. 2001

Índice

AGRADECIMIENTOS

Ver una luz después de entender que se vive en la oscuridad; y volver a caer en la oscuridad en busca de otro destello que lleve a otro punto opaco; y así sucesivamente, hace que aprender Matemáticas sea tan mágico. Dedico este trabajo con mucho amor a aquellos que han compartido conmigo la aventura de aprender. A mi papá que me dio la posibilidad de ser humano y tomar este camino. A Juanca y Jeanqui que me abrieron las primeras puertas al pensamiento matemático y al amor por esta disciplina. A María, porque el amor es necesario para seguir. A Eduardo y Camilo que me me han enseñado tanto con su dedicación y compromiso. A Xavier Caicedo, un gran maestro que admiro profundamente y que ha marcado patrones firmes de mi ética matemática. A Alf, Jaime, Eliana, Guillermo, Germán, Pablo, Andrés.

Introducción

La clasificación módulo isomorfismo de los grupos abelianos es un objetivo aún no alcanzado por los matemáticos, aunque se han logrado avances importantes en dicho campo como la clasificación de los grupos abelianos finítamente generados, los grupos divisibles y los grupos abelianos enumerables de torsión; este último resultado, obtenido por Ulm en la primera mitad del siglo XX. Sin embargo, para la segunda mitad del siglo pasado se logra una clasificación elemental de los grupos abelianos.

Hacia finales de los cuarenta y comienzos de los cincuenta, Warszawa Szmielew se interesó en el problema concerniente a la decibilidad de la Teoría de los Grupos Abelianos. En 1955 publicó su artículo *"Elementary properties of Abelian Groups"*, [S], en el cual consiguió con éxito dar una prueba de la decibilidad de la Teoría. Junto con esta respuesta, dados los resultados que obtuvo en el camino, Szmielew logró también describir a partir de algunas sentencias de la lógica de primer orden, las distintas clases elementales de los Grupos Abelianos; estableció una clasificación, módulo equivalencia elemental, de dichos grupos.

Más tarde, a comienzos de los años setenta, Paul C. Eklof y Edward R. Fischer retomaron los resultados de Szmielew desde un punto de vista de la Teoría de Modelos y en su artículo *"The Elementary Theory of Abelian Groups"*, [EyF], presentaron nuevas pruebas para dichos puntos entre otros. Su línea de trabajo se basó principalmente en el estudio de la estructura (y la existencia) de los grupos abelianos saturados.

En este trabajo se intenta reproducir, de manera detallada y profunda, los resultados relacionados con la clasificación elemental de los grupos abelianos; consiguiendo entonces, una descripción de las extensiones completas de dicha Teoría. En la primera parte se presentan e introducen, a modo de un recorrido no muy profundo, algunos resultados y conceptos importantes de la Teoría de Grupos Abelianos, la Lógica y la Teoría de Modelos, que se utilizan a lo largo del escrito. Seguídamente, se presenta una prueba detallada del Teorema de Clasificación de Ulm motivada por la noción del *Back and Forth* introducida en el capítulo previo. En el tercer capítulo se clasifican elementalmente los grupos abelianos de torsión siguiendo un camino sugerido por las nociones de la Lógica Infinitaria introducidas en los preliminares y orientadas hacia este objetivo en [B]. Finalmente, en el cuarto capítulo se llega al Teorema de Clasificación elemental de los grupos abelianos en dos pasos siguiendo de cerca el contenido de la sección 1 de [EyF]. La primera sección se enfoca en la prueba del teorema que describe la estructura de los grupos abelianos κ-saturados (κ no enumerable) en función de ciertos invariantes (Szmielew) definibles en la Lógica de primer orden. En la segunda sección, sin usar la existencia de grupos abelianos saturados, se llega a la prueba del Teorema principal haciendo antes un análisis muy útil de ciertas subestructuras elementales de los grupos abelianos κ-saturados.

1 Preliminares

En este capítulo se hace un breve recuento de algunos resultados importantes para el desarrollo posterior del escrito y que por su carácter más general se presentan en la sección preliminar. En la primera sección se revisan los teoremas referentes a la Teoría de Grupos y en la segunda los que conciernen a la Lógica y la Teoría de Modelos.

1.1 Algunos resultados de la Teoría de Grupos Abelianos

Para la profundización en el material presentado en este apartado se recomienda revisar las primeras secciones de [K].

Si cada elemento g de un grupo abeliano G tiene orden finito n_g (n_g es el mínimo entero positivo tal que $n_g g = 0$), se dice que G es un grupo de *torsión*. Más allá, si para cada $g \in G$, $n_g = p^m$ donde p es un primo fijo y m algún entero positivo, se dice que G es un *p-grupo*.

Teorema 1. *Todo grupo abeliano de torsión G es isomorfo a la suma directa de sus p-subgrupos.*

Ahora bien, un grupo G se dice *divisible* si para cada $g \in G$ y cada $n \in \mathbb{Z}^+$, existe un $g_n \in G$ tal que $ng_n = g$.

Ejemplo 2. *El grupo aditivo de los racionales, $(\mathbb{Q}, +)$, es divisible.*

Ejemplo 3. *Para cada primo p, el p-grupo de Prüfer $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ es divisible.*

Teniendo los dos anteriores ejemplos se puede enunciar el Teorema que clasifica los grupos divisibles módulo isomorfismo.

Teorema 4. *Todo grupo abeliano divisible es isomorfo a una suma directa de grupos donde cada uno de ellos es isomorfo a $\mathbb{Q}$ o a $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ (para varios primos p)*

Es fácil ver que cada grupo abeliano G posee un único subgrupo divisible maximal. Esto se logra simplemente considerando la unión M, no vacía (pues $\{0\} \leq G$ es divisible), de todos los subgrupos divisibles de G, y verificando que efectivamente M es un subgrupo divisible de G ya que todo elemento $m \in M$ se escribe como la suma finita $m = x_1 + ... + x_k$, donde cada x_i pertenece a algún subgrupo divisible de G. Como cada x_i es divisible por todo n, entonces su suma, m, también lo es. Los siguientes Teoremas exhiben la importancia del subgrupo divisible maximal para entender la estructura de un grupo abeliano.

Teorema 5. *Todo subgrupo divisible D de un grupo abeliano G es un sumando directo.*

Teorema 6. *Todo grupo abeliano G tiene un único subgrupo divisible maximal M, y $G \cong M \oplus N$ donde N no tiene subgrupos divisibles no triviales (es reducido).*

Finalmente, un subgrupo S de un grupo abeliano G se dice *puro en G*, si para todo entero positivo n se cumple que $nG \cap S = nS$. Nótese que todo subgrupo divisibe D de un grupo abeliano G, es un subgrupo puro.

1.2 Algunos resultados de la Lógica y la Teoría de Modelos

Para la profundización en el material presentado en este apartado se recomienda revisar [B] y los capítulos 2 y 3 de [CyK].

1.2.1 Estructuras parcialmente isomorfas

Considérense dos estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ del mismo tipo. Sea $\mathcal{I}$ un conjunto no vacío de isomorfismos entre subestructuras de $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$. Se dice que $\mathcal{I}$ tiene la propiedad del *Back and Forth* si para cada $f \in \mathcal{I}$ y $a \in A$ (resp. $b \in B$), existe un $g \in \mathcal{I}$ que extiende a f y tal que $a \in dom(g)$ (resp. $b \in rng(g)$).

Se dice que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son parcialmente isomorfas, $\mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$, si existe un conjunto de isomorfismos parciales $\mathcal{I}$ entre $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ con la propiedad del *Back and Forth*.

El siguiente Teorema muestra el alcance de la noción anteriormente introducida cuando se trata de estructuras enumerables. Es de gran utilidad para la prueba del Teorema de Ulm en el siguiente capítulo.

Teorema 7. *Si dos estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ del mismo tipo son enumerables (o enumerablemente generadas), entonces $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ ssi $\mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$.*

1.2.2 Equivalencia elemental y subestructuras elementales

Dadas dos estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ asociadas al lenguaje $\mathcal{L}$, se dice que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son *elementalmente equivalentes*, $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, ssi satisfacen las mismas sentencias sobre $\mathcal{L}$ ($Th(\mathfrak{A}) = Th(\mathfrak{B})$).

El siguiente teorema muestra cómo los productos preservan la equivalencia elemental. Es de gran importancia para la clasificación elemental de los grupos abelianos de torsión en el tercer capítulo.

Teorema 8. ***(Feferman-Vaught)*** *Si I es un conjunto no vacío y $(\mathfrak{A}_i)_{i\in I}$ y $(\mathfrak{B}_i)_{i\in I}$ son dos familias de estructuras asociadas a un lenguaje $\mathcal{L}$ tales que para cada $i \in I$, $\mathfrak{A}_i \equiv \mathfrak{B}_i$, entonces $\prod\limits_{i\in I} \mathfrak{A}_i \equiv \prod\limits_{i\in I} \mathfrak{B}_i$.*

$\mathfrak{A}$ es *subestructura elemental* de $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, ssi $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ ($\mathfrak{A}$ es submodelo de$\mathfrak{B}$) y para cada fórmula ϕ sobre $\mathcal{L}$ con variables libres $x_1, x_2, ..., x_n$ y cada $a_1, a_2, ..., a_n \in A$, se tiene que

$$\mathfrak{A} \models \phi[a_1, a_2, ..., a_n] \text{ ssi } \mathfrak{B} \models \phi[a_1, a_2, ..., a_n]$$

Lema 9. ***(Tarski)*** *$\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ si y sólo si $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ y para cada fórmula $\exists x\phi(x, x_1, ..., x_n)$ con variables libres $x_1, x_2, ..., x_n$ y cada $a_1, a_2, ..., a_n \in A$, se tiene que si $\mathfrak{B} \models \exists x\phi[a_1, a_2, ..., a_n]$, entonces existe un $a \in A$ tal que $\mathfrak{B} \models \phi[a, a_1, a_2, ..., a_n]$*

Corolario 10. *Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ dos estructuras asociadas al lenguaje $\mathcal{L}$. Si para cada $a_1, a_2, ..., a_n \in A$ y $b \in B$, existe un automorfismo f de $\mathfrak{B}$ tal que $f(a_i) = a_i$ $i = 1, ..., n$ y tal que $f(b) \in A$, entonces $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$.*

Demostración. Sea $\exists x\phi(x, x_1, ..., x_n)$ una fórmula con variables libres $x_1, x_2, ..., x_n$. Supóngase que $\mathfrak{B} \models \exists x\phi[a_1, a_2, ..., a_n]$. Sea $b \in B$ tal que $\mathfrak{B} \models \phi[b, a_1, a_2, ..., a_n]$. Por hipótesis, existe un automorfismo f de $\mathfrak{B}$ tal que $f(a_i) = a_i$ $i = 1, ..., n$ y tal que $f(b) = a \in A$. Nótese que

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} \models \exists x\phi[a_1, a_2, ..., a_n] &\Rightarrow \mathfrak{B} \models \phi[b, a_1, a_2, ..., a_n] \\ &\Rightarrow \mathfrak{B} \models \phi[f(b), f(a_1), f(a_2), ..., f(a_n)] \\ &\Rightarrow \mathfrak{B} \models \phi[a, a_1, a_2, ..., a_n] \end{aligned}$$

Por el lema de Tarski, $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$. □

Una *cadena elemental* es una cadena de estructuras asociadas a un lenguaje $\mathcal{L}$

$$\mathfrak{A}_0 \prec \mathfrak{A}_1 \prec ... \prec \mathfrak{A}_\beta \prec ..., \qquad \beta < \alpha \quad (\alpha \text{ un ordinal})$$

tal que $\mathfrak{A}_\gamma \prec \mathfrak{A}_\beta$, siempre que $\gamma < \beta < \alpha$.

Teorema 11. *Sea $\mathfrak{A}_\xi$, $\xi < \alpha$, una cadena elemental de estructuras. Entonces $\mathfrak{A}_\xi \prec \bigcup\limits_{\xi<\alpha} \mathfrak{A}_\xi$ para todo $\xi < \alpha$.*

1.2.3 Lógica Infinitaria

Si $\mathcal{L}$ es un lenguaje usado en la lógica de primer orden, $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ consiste en aumentar $\mathcal{L}$ añadiendo variables v_α para cada ordinal α. La clase de fórmulas sobre $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ es la clase más pequeña Y que contiene a las fórmulas atómicas sobre $\mathcal{L}$ y es cerrada bajo:

a) Si $\phi \in Y$, entonces $(\neg\phi) \in Y$.

b) Si $\phi \in Y$, entonces $(\forall v_\alpha \phi)$ y $(\exists v_\alpha \phi)$ pertenecen a Y.

c) Si $\mathbf{\Phi}$ es un subconjunto de Y, finito o infinito, entonces la conjunción $\wedge\mathbf{\Phi}$ y la disyunción $\vee\mathbf{\Phi}$ pertenecen a Y.

Ejemplo 12. *Si G es un grupo abeliano y $\mathcal{L}$ es el lenguaje para la Teoría de Grupos Abelianos con un símbolo de función binaria $+$ y un símbolo de constante $\mathbf{0}$, entonces G es de torsión ssi G es un modelo de la sentencia sobre $\mathcal{L}_{\infty\omega}$*

$$\forall x \bigvee_{n<\omega} (nx = 0), \qquad \text{donde } nx = x + x + ... + x \ (n \text{ veces})$$

Una medida importante de la complejidad de una fórmula de $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ es su *rango cuantificacional*. Si ϕ es una fórmula sobre $\mathcal{L}_{\infty\omega}$, el *rango cuantificacional* de ϕ, $qr(\phi)$, es un ordinal y está definido por inducción en la complejidad de la fórmula, así:

$$\begin{aligned} qr(\phi) &= 0, \quad \text{si } \phi \text{ es atómica} \\ qr(\neg\phi) &= qr(\phi) \\ qr(\forall v_\alpha \phi) &= qr(\exists v_\alpha \phi) = qr(\phi) + 1 \\ qr(\vee\mathbf{\Phi}) &= qr(\wedge\mathbf{\Phi}) = \sup\{qr(\phi) : \phi \in \mathbf{\Phi}\} \end{aligned}$$

Dadas dos estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ para el lenguaje $\mathcal{L}$, se escribe

$$\mathfrak{A} \equiv_{\infty\omega} \mathfrak{B},$$

si $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son modelos de las mismas sentencias sobre $\mathcal{L}_{\infty\omega}$. Para un ordinal α, se escribe

$$\mathfrak{A} \equiv^{\alpha}_{\infty\omega} \mathfrak{B},$$

si para cada sentencia ϕ sobre $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ tal que $qr(\phi) \leq \alpha$, se tiene que $\mathfrak{A} \models \phi$ ssi $\mathfrak{B} \models \phi$. Puede mostrarse que dadas dos estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ para el lenguaje $\mathcal{L}$, $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ ssi $\mathfrak{A} \equiv^{\omega}_{\infty\omega} \mathfrak{B}$.

Un importante Teorema que establece el vínculo entre la noción de estructuras *parcialmente isomorfas* ($\cong_p$) y *equivalentes en* $L_{\infty\omega}$ ($\equiv_{\infty\omega}$) es el Teorema de Karp, probado por primera vez en *Finite quatifier equivalence*, The Theory of Models (1965).

Teorema 13. ***(Karp)***. *Dadas dos estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ para el lenguaje $\mathcal{L}$, las siguientes son equivalentes:*

a) $\mathfrak{A} \equiv_{\infty\omega} \mathfrak{B}$

b) $\mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$

c) Existe un conjunto $\mathcal{I}$ de isomorfismos parciales entre $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ con la propiedad del Back and Forth tal que todo $f \in \mathcal{I}$ tiene dominio y rango finitamente generado.

En el tercer capítulo se utilizan fuertemente dos resultados importantes que involucran de nuevo las nociones introducidas en este apartado.

1.2.4 Estructuras κ-saturadas

Dada $\mathfrak{A}$ una estructura asociada a un lenguaje $\mathcal{L}$ y un subconjunto $X \subset A$, se escribe $\mathfrak{A}_X$ para referirse a la estructura $\mathfrak{A}$ distinguiendo los elementos de X. Su lenguaje asociado, $\mathcal{L}_X$, tiene nombres para cada uno de estos elementos. Se dice que $\mathfrak{A}$ es *κ-saturada* si para todo subconjunto $X \subset A$ tal que $|X| < \kappa$ se tiene que todo conjunto de fórmulas $\Gamma(x)$ sobre $\mathcal{L}_X$ consistente con $Th(\mathfrak{A}_X)$ es realizado en $\mathfrak{A}_X$.

El siguiente lema se utuliza frecuentemente en las demostraciones de la primera sección del capítulo cuarto; es por eso que se enuncia para estructuras ω_1-saturadas, protagonistas en dicha parte del trabajo.

Lema 14. *Sea $\mathfrak{A}$ una estructura ω_1-saturada. Para todo subconjunto enumerable $X \subset A$, cada tipo $\Gamma(x_1, x_{2,...})$ sobre $\mathcal{L}_X$ con enumerables variables consistente con $Th(\mathfrak{A}_X)$ es realizado en $\mathfrak{A}_X$.*

Demostración. Sea $\Gamma(x_1, x_{2,...})$ un tipo sobre $\mathcal{L}_X$ consistente con $Th(\mathfrak{A}_X)$. Se construirá el subconjunto enumerable $a_1, a_2, ... \subset A$ que realiza Γ en $\mathfrak{A}_X$ recursivamente. Para encontrar el primer elemento,
i) Primer paso. Sea $\Gamma^1(x_1) = \{\exists x_2 x_3 ... x_{k_\gamma} \gamma(x_1, ...) : \gamma \in \Gamma\}$, donde $n_\gamma = \text{máx}\{\alpha : x_\alpha$ aparece libre en $\gamma\}$. Es fácil verificar que $\Gamma^1(x_1)$ es consistente con $Th(\mathfrak{A}_X)$, con lo cual, por hipótesis de ω_1-saturación, existe $a_1 \in A$ tal que $\mathfrak{A}_X \vDash \Gamma(a_1)$. Así, a_1 es entonces el primer elemento del subconjunto enumerable que se quiere construir.
Para elegir el n-ésimo elemento,
ii) n-ésimo paso. Sea $\Gamma^n(a_1, a_2, ..., a_{n-1}, x_n) = \{\exists x_{n+1} ... x_{n_\gamma} \gamma(a_1, a_2, ..., a_{n-1}, x_n, ...) : \gamma \in \Gamma\}$, donde $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ son los elementos ya encontrados. Considérese $X^n = X \cup \{a_{1,} a_2, ..., a_{n-1}\}$. Nótese que X^n es aún enumerable. Es fácil ver también que $\Gamma^n(a_1, a_2, ..., a_{n-1}, x_n)$ es consistente con $Th(\mathfrak{A}_{X^n})$, con lo cual, por hipótesis de ω_1-saturación, existe $a_n \in A$ tal que $\mathfrak{A}_{X^n} \vDash \Gamma^n(a_n)$. Esto quiere decir que $a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n$ realiza $\Gamma^n(a_1, a_2, ..., a_{n-1}, x_n)$ en $\mathfrak{A}_X$.
Queda entonces construido el subconjunto deseado. □

Los dos siguientes lemas son de gran importancia para los resultados obtenidos en la segunda sección del cuarto capítulo.

Lema 15. *Para todo modelo $\mathfrak{A}$ de una teoría sobre algún lenguaje $\mathcal{L}$, existe una extensión elemental $\mathfrak{A}' \succ \mathfrak{A}$ tal que para todo subconjunto enumerable $X \subset A$ y todo 1-tipo completo con parámetros en X consistente con $Th(\mathfrak{A}_X)$, $\Gamma_X(x)$, existe un $a' \in A'$ tal que $\mathfrak{A}' \vDash \Gamma_X(a')$.*

Demostración. Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ la familia de todos los subconjuntos enumerables de A. Para cada $i \in I$, considérese $\left\{\Gamma^{j_i}_{X_i}(x)\right\}_{j_i \in J_i}$, la familia de todos los 1-tipos completos con parámetros en X_i consistentes con $Th(\mathfrak{A}_{X_i})$ (es importante notar que $Th(\mathfrak{A}_{X_i}) \subset \Gamma^{j_i}_{X_i}(x)$ para todo $j_i \in J_i$).
Ahora bien, para cada $\Gamma^{j_i}_{X_i}(x)$ considérese un símbolo de constante $c^{j_i}_i$ que no está en $\mathcal{L}_A$ y tal que $c^{j_i}_i \neq c^{l_k}_k$ si $i \neq k$ o $j \neq l$. Defínase entonces los siguientes conjuntos de sentencias sobre el nuevo lenguaje $\mathcal{L}' = \mathcal{L}_A \cup \left\{c^{j_i}_i\right\}_{\substack{i\in I \\ j_i \in J_i}}$

$$\Gamma^{j_i}_{X_i}(c^{j_i}_i) = \left\{\sigma(c^{j_i}_i) : \sigma(x) \in \Gamma^{j_i}_{X_i}(x)\right\}$$

y considérense entonces la teoría $T = \bigcup_{\substack{i\in I \\ j_i \in J_i}} \Gamma^{j_i}_{X_i}(c^{j_i}_i)$. Nótese que cada $\Gamma^{j_i}_{X_i}(c^{j_i}_i)$ es consistente (por la consistencia de $\Gamma^{j_i}_{X_i}(x)$). Al unir finitos de estos para un X_i fijo, se obtiene de igual

manera una teoría consistente ya que $Th(\mathfrak{A}_{X_i}) \subset \Gamma^{j_i}_{X_i}(c^{j_i}_i)$ para cualquier j_i[1]. Análogamente, al unir dos de estos tipos con parámetros en X_1 y X_2 respectivamente, se obtiene de nuevo una teoría consistente debido a que $Th(\mathfrak{A}_{X_1 \cap X_2}) \subset \Gamma^{j_i}_{X_i}(c^{j_i}_i)$ para $i = 1, 2$. Por compacidad, T es una teoría consistente y tiene entonces un modelo $\mathfrak{A}'$.
Cada elemento de A está identificado con una constante distinta de $\mathcal{L}'$, que a su vez denota un elemento distinto de A'. Además nótese que

$$Th(\mathfrak{A}_A) \subset \bigcup_i Th(\mathfrak{A}_{X_i}) \subset \bigcup_i \Gamma^{j_i}_{X_i}(c^{j_i}_i) \subset T,$$

con lo cual $\mathfrak{A}' \vDash Th(\mathfrak{A}_X)$, y entonces $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{A}'$. Claramente $\mathfrak{A}'$ realiza cada uno de los tipos $\Gamma^{j_i}_{X_i}(x)$ (su respectivo $c^{j_i}_i$ lo hace). Se tiene entonces lo deseado. $\square$

Lema 16. *Para cualquier par de modelos $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ de la misma teoría sobre un lenguaje $\mathcal{L}$, existe un par de extensiones elementales ω_1-saturadas $\mathfrak{A}^* \succ \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}^* \succ \mathfrak{B}$ tales que $|\mathfrak{A}^*| = |\mathfrak{B}^*|$.*

Demostración. Se construirán dos cadenas elementales $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \prec \mathfrak{A}_1 \prec \ldots \prec \mathfrak{A}_\alpha \prec \ldots$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 \prec \mathfrak{B}_1 \prec \ldots \prec \mathfrak{B}_\alpha \prec \ldots$ simultáneamente e inductivamente sobre los ordinales enumerables, así:

1. $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}$.
2. Para $\alpha = \beta + 1$, $\alpha \leq \omega_1$, $\mathfrak{A}_a = \mathfrak{A}'_\beta$ y $\mathfrak{B}_\alpha = \mathfrak{B}'_\beta$; donde $\mathfrak{A}'_\beta$ y $\mathfrak{B}'_\beta$ se logran de la manera descrita en el lema 15.
3. Para $\alpha \leq \omega_1$ un ordinal límite, $\mathfrak{A}_a = \bigcup_{\beta < \alpha} \mathfrak{A}_\beta$ y $\mathfrak{B}_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \mathfrak{B}_\beta$.

$\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A}_{\omega_1}$ es ω_1-saturada. Sea $X \subset A^*$ un subconjunto enumerable de parámetros. Por construcción, $X \subset A_\alpha$ para algún $\alpha < \omega_1$. Nótese que, también por construcción, $\mathfrak{A}_{\alpha+1}$ realiza todos los 1-tipos con parámetros en X y por lo tanto $\mathfrak{A}^*$ también los realiza.
Análogamente $\mathfrak{B}^* = \mathfrak{B}_{\omega_1}$ es también una estructura ω_1-saturada. Por el Teorema de Cadenas Elementales (teorema 11), $\mathfrak{A}^* \succ \mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}^* \succ \mathfrak{B}$. Se tiene entonces lo deseado. $\square$

[1] Aquí es importante notar que si surge una contradiccion a partir de dos sentencias en las que aparecen dos constantes distintas, entonces surge una contradicción a partir de dos sentencias que no las mencionan. Por ser estos tipos consistentes con $Th(\mathfrak{A}_{X_i})$, tal contradicción no puede surgir.

2 Teorema de Ulm

En este capítulo se demuestra el Teorema de Ulm, que clasifica, módulo isomorfismo, los grupos abelianos enumerables de torsión. La demostración que aquí se presenta sigue la línea propuesta en la sección 11 de [K] aunque hace evidente la motivación que sugiere la noción de *estructuras parcialmente isomorfas* presentada en el capítulo anterior.

Teorema 17. ***(Ulm)*** *Dos grupos de torsión enumerables con los mismos invariantes de Ulm, son isomorfos.*

Antes de dar una prueba, algunas definiciones y observaciones.

1. Nótese que por el teorema 1 es suficiente probar la afirmación del teorema para *p-grupos.*

2. También es importante notar que basta considerar p-grupos reducidos (sin subgrupos divisibles no triviales) ya que la estructura de los grupos divisibles está caracterizada por el teorema 4 y se tiene además que todo grupo abeliano se puede ver como la suma directa de su subgrupo divisible maximal y un subgrupo reducido (teorema 6).

3. Durante este capítulo, G será entonces un p-grupo abeliano reducido enumerable de torsión.

Pues bien, considérese la siguiente sucesión transfinita de subgrupos de G, donde α es un ordinal:

$$p^\alpha G = \begin{cases} p(p^\beta G), & \text{si} \quad \alpha = \beta + 1 \\ \bigcap\limits_{\beta<\alpha} p^\beta G, & \text{si} \quad \alpha \quad \text{es} \quad \text{un} \quad \text{ordinal} \quad \text{límite} \end{cases}$$

Nótese que así se tiene una cadena descendente de subgrupos de G que se estabiliza en cierto ordinal mínimo λ (pues toda cadena descendente de cardinales es estacionaria), la *longitud* de G.

$$G > pG > ... > p^\lambda G = p^{\lambda+1} G$$

Ahora considérense los subgrupos de G dados por:

$$p^\alpha G[p] = P \cap p^\alpha G, \quad donde \quad P = \{g \in G : pg = 0\}$$

De nuevo se tiene una cadena descendente estacionaria de subgrupos

$$pG[p] > p^2 G[p] > ... > p^\lambda G[p] = p^{\lambda+1} G[p]$$

Nótese que cada uno de los cocientes $(p^\alpha G[p]/p^{\alpha+1}G[p])$ puede verse como un espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_p$, y por lo tanto tendrán una respectiva dimensión vistos como tal. Se llamará el *$\alpha-$ésimo invariante de Ulm* a la dimensión de $(p^\alpha G[p]/p^{\alpha+1}G[p])$. Es decir, el conjunto de los *invariantes de Ulm* de G puede verse como el rango de la función

$$\begin{array}{rcl} f : Ordinales & \longrightarrow & Cardinales \\ \alpha & \longmapsto & dim\left(p^\alpha G[p]/p^{\alpha+1}G[p]\right) \end{array}$$

Definición 18. *Se dice que $g \in G$ tiene* altura *α si $g \in p^\alpha G$ pero $g \notin p^{\alpha+1}G$. Se denota $h(g)$ a la altura de g.*

Nótese que todo elemento g de G tiene altura por lo menos nula ya que $g \in p^0 G = G$. En el caso de la identidad, como $0 \in p^\alpha G$ para todo ordinal α, se escribe $h(0) = \infty$, con la convención de que ∞ es mayor que cualquier ordinal, y se dice que tiene altura infinita. Con esta definición de altura es fácil verificar que se cumplen las siguientes:

1. $h(x) < h(y) \Rightarrow h(x+y) = h(x)$
2. $h(x) = h(y) \Rightarrow h(x+y) \geq h(x)$
3. $x \neq 0 \Rightarrow h(px) > h(x)$

Definición 19. *Sea $S \leq G$ y $g \in G$. Se dice que g es* propio *con respecto a S si $h(g) \geq h(g+s)$, para todo $s \in S$; es decir, si g tiene altura maximal en $g+S$.*

Antes de formular un lema importante para la demostración del teorema, se considerarán algunos grupos y un isomorfismo entre ellos.
Sea $S_\alpha^* = S_\alpha \cap p^{-1}(p^{\alpha+2}G)$, donde $S_\alpha = S \cap p^\alpha G$ y $p^{-1}(p^{\alpha+2}G) = \{g \in G : pg \in p^{\alpha+2}G\}$. (*observación:* $p^{\alpha+1}G \subset p^{-1}(p^{\alpha+2}G)$).
Nótese que si $x \in S_\alpha^*$, entonces $px \in p^{\alpha+2}G$, y por tanto existe un $y \in p^{\alpha+1}G$ tal que $px = py$. Además para cualquier $z \in p^{\alpha+1}G[p]$ se tiene que $p(y+z) = py + pz = py = px$, es decir, tal elemento y está bien definido módulo $p^{\alpha+1}G[p]$.
Pues bien, nótese que $(x-y) \in P$ (*pues* $p(x-y) = 0$) y que $(x-y) \in p^\alpha G$ (*pues* $x \in S_\alpha^* \subset p^\alpha G$, $y \in p^{\alpha+1}G \subset p^\alpha G$), con lo cual se tiene que $(x-y) \in p^\alpha G[p]$.
Considérese entonces la función

$$\begin{array}{rcl} U : S_\alpha^* & \longrightarrow & p^\alpha G[p]/p^{\alpha+1}G[p] \\ x & \longmapsto & (x-y) + p^{\alpha+1}G[p] \end{array}$$

Su buena definición se tiene de la buena definición de y módulo $P_{\alpha+1}$, y es relativamente sencillo ver que se trata de un homomorfismo.
Dado que $(x-y) \in p^\alpha G[p]$, $x \in S_\alpha^*$ y $y \in p^{\alpha+1}G$, nótese que:

$$\begin{array}{rll} U(x) = \bar{0} & ssi & (x-y) \in p^{\alpha+1}G[p] \\ & ssi & (x-y) \in P \text{ y } (x-y) \in p^{\alpha+1}G \\ & ssi & x \in p^{\alpha+1}G \\ & ssi & x \in S_{\alpha+1} \end{array}$$

con lo cual se tiene que $Ker(U) = S_{\alpha+1}$, y por tanto que $(S_\alpha^*/S_{\alpha+1}) \approx Im(U)$.
Teniendo estos elementos, se puede enunciar el Lema.

Lema 20. *Siendo U el homomorfismo anteriormente definido, las siguientes son equivalentes:*
a) El rango de U no es todo $p^\alpha G[p]/p^{\alpha+1}G[p]$
b) Existe $x \in p^\alpha G[p]$ con altura α propio con respecto a S.

Demostración. **a)** $\Rightarrow$ **b)**. Sea $v \in p^\alpha G[p]$ tq. $(v + p^{\alpha+1}G[p]) \notin rng(U)$. Es claro que v no está en $p^{\alpha+1}G[p]$ pues si estuviera, $(v + p^{\alpha+1}G[p]) = p^{\alpha+1}G[p] \in rng(U)$. Así, se tiene que $h(v) = \alpha$. Falta mostrar que v es propio con respecto a S. Supóngase que no; en tal caso existiría un $s \in S$ tal que $h(s-v) > \alpha$, con lo cual $(s-v) \in p^{\alpha+1}G$ y $(s-v) = pt$ para algún $t \in p^\alpha G$. Así, $ps - pv = ps = p^2t$, es decir, $s \in p^{-1}(p^{\alpha+2}G)$; y como $s \in S_\alpha$ (*pues* $(s-v), v \in p^\alpha G$), se tiene entonces que $s \in S_\alpha^*$. Ahora bien, aplicando U se tiene que $U(s) = (s-pt) + p^{\alpha+1}G[p] = v + p^{\alpha+1}G[p]$, lo cual es una contradicción ya que por hipótesis $(v + p^{\alpha+1}G[p]) \notin rng(U)$.
b) $\Rightarrow$ **a)**. Sea $v \in p^\alpha G[p]$ tal que $h(v) = \alpha$ y es propio con respecto a S. Supóngase que $(v + p^{\alpha+1}G[p]) \in rng(U)$. De esta forma, existiría un $x \in S_\alpha^*$ y un $y \in p^{\alpha+1}G$ tales que $px = py$ y $(x-y) + p^{\alpha+1}G[p] = v + p^{\alpha+1}G[p]$. Así, existriía un $w \in p^{\alpha+1}G[p]$ tal que $(x-y) = (v+w)$, con lo que $h(x-v) = h(w+y) > \alpha$ (*pues* $w \in p^{\alpha+1}G[p]$, $y \in p^{\alpha+1}G$). Lo anterior contradice el hecho de que v fuera propio con respecto a S. $\square$

Ahora bien, con los elementos y observaciones anteriores, se puede reenunciar el Teorema de Ulm de la siguiente manera:

Teorema 21. *Dos p-grupos enumerables reducidos G y H con los mismos invariantes de Ulm, son isomorfos .*

Demostración. El objetivo de la demostración es encontrar un conjunto de isomorfismos parciales entre G y H con la propiedad de *Back and Forth*. Con la enumerabilidad de ambas estructuras, por el teorema 7 quedaría completa la prueba.
Considérese $\mathcal{I}$ el conjunto de isomorfismos entre subgrupos finitamente generados (subgrupos finitos en este caso) de G y H que preservan alturas. $\mathcal{I}$ es no vacío ya que $f : 0_G \longrightarrow 0_H \in \mathcal{I}$. Pues bien, sean S y T dos subgrupos finitos de G y H respectivamente y tales que existe un $V \in \mathcal{I}$, $V : S \longrightarrow T$. Sea $x_1 \in G - S$. Nótese que como G es de torsión, existe un $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $p^n x_1 \in S$ pero $p^{n-1}x_1 \notin S$. Pues bien, sea $x_2 = p^{n-1}x_1$ y sea $x \in (x_2 + S)$ *(nótese que* $x + S = x_2 + S$, $x \notin S$ y $px \in S$*)* tal que $h(x) \geq h(x+s)$ $\forall s \in S$ y tal que si $h(x) = h(x+s)$, entonces $h(px) \geq h(px+ps)$. Sea $h(x) = \alpha$ y $V(px) = z$. De esta manera el objetivo se reduce a encontrar un $w \in H - T$ propio con respecto a T tal que $h(w) = \alpha$ y $pw = z$. Teniendo este elemento, se extiende V al isomorfismo parcial $V' \in \mathcal{I}$, $V' :< S, x > \longrightarrow < T, w >$ definido así: $V'(ax+s) = aw + V(s)$ $\;$ (donde $0 \leq a < p$, $s \in S$)[2] . Es importante notar que el elemento inicialmente escogido x_1 será capturado en finitos pasos por la subestructura que se está extendiendo (simplemente al aplicar sucesivamente el procedimiento de extensión, se escoge como x_2' el primero de derecha a izquierda de los elementos $x_1, px_1, p^2x_1, ..p^n x_1$ que no pertenezca aún a la subestructura); esto garantiza la propiedad del *Back and Forth* para $\mathcal{I}$. Así, el objetivo se limitará a encontrar dicho w.
caso 1) $\mathbf{h(z) = \alpha + 1}$.
En este caso, como $h(0) > \alpha + 1$, entonces $z \neq 0 \Rightarrow px \neq 0$.Sea $w \in p^\alpha H$ tal que $pw = z$ *(existe pues $z \in p^{\alpha+1}H$)*. Nótese que $h(w) \geq \alpha$ (pues $w \in p^\alpha H$) y $h(w) \leq \alpha$ *(* pues $h(w) < h(pw) = h(z) = \alpha + 1$ por hipótesis*)*. De esta forma, $h(w) = \alpha$. Ahora bien, $w \notin T$, pues si $w \in T$, entonces $w = V(y)$ para algún $y \in S$. Así, $h(x - y) = \alpha$ (porque x es propio con respecto a S y $h(y) = h(w) = \alpha$), $pw = z = pV(y) = V(py) = V(px)$ y entonces $py = px$; con lo cual $h(px - py) = h(0) > \alpha + 1 = h(px)$, y se tendría una contradicción con la hipótesis de maximalidad de $h(px)$. Sólo falta mostrar que w es propio con respecto a T. Supóngase que no lo es. Entonces existiría un $t \in T$ tal que $h(w + t) \geq \alpha + 1$. Sea $s \in S$ tal que $V(s) = t$. Como $w \notin T$, $w + t \neq 0$, y entonces $h(pw + pt) = h(px + ps) \geq \alpha + 2$, lo cual contradice de nuevo la maximalidad de $h(px)$, pues $h(x + s) = \alpha$ *(nótese que* $(h(w+t) \geq \alpha+1) \wedge (h(w) = \alpha) \Rightarrow h(t) \geq \alpha + 1 \Rightarrow h(s) \geq \alpha + 1 \Rightarrow h(x + s) = \alpha$*)* y $h(px + ps) > \alpha + 1 = h(px)$.
caso 2) $\mathbf{h(z) > \alpha + 1}$.
En este caso, $h(px) > \alpha + 1$ y entonces $px \in p^{\alpha+2}G$. Así, $px = py$ para algún $y \in p^{\alpha+1}G$. Nótese que $p(x - y) = 0$, $h(x) = \alpha$ y $y \in p^{\alpha+1}G$, con lo cual $(x - y) \in p^\alpha G[p]$ y $h(x - y) = h(x) = \alpha$. Al ser x propio con respecto a S, $(x - y)$ también lo es. Pues bien, aplicando el lema anterior, se tiene que:

$$\dim\left(S^*_\alpha/S_{\alpha+1}\right) < \dim\left(p^\alpha G[p]/p^{\alpha+1}G[p]\right) =^3 \dim\left(p^\alpha H[p]/p^{\alpha+1}H[p]\right)$$

[2]Nótese que todo elemento en $< S, x >$ (el mínimo subgrupo de G que contiene a S y x) se ecribe de manera única como $ax + s$ para algún $0 \leq a < p$ y algún $s \in S$. Para ver esto supóngase que $a_1x + s_1 = a_2x + s_2$ donde $0 \leq a_1 \neq a_2 < p$; esto implica que $(a_1 - a_2)x = (s_2 - s_1) \in S$. Como $((a_1 - a_2), p) = 1$, entonces $z_1(a_1 - a_2) + z_2p = 1$ para algunos $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$, con lo cual, multiplicando por x, se tiene que $z_1((a_1 - a_2)x) + z_2(px) = x$. Como $px \in S$ por hipótesis, se tiene entonces que $x \in S$, pero esto contradice la elección de x. Queda entonces verificada la buena definición de V'.

Para ver que $V' \in \mathcal{I}$ basta ver que preserva alturas. Sea $ax + s \in < S, x >$; debido a que $V \in \mathcal{I}$, x es propio con respecto a S y w es propio con respecto a T,
i) si $h(s) = h(V(s)) < h(x) = h(w)$, entonces $h(ax + s) = h(s) = h(V(s)) = h(aw + V(s)) = h(V'(ax + s))$
ii) si $h(s) = h(V(s)) \geq h(x) = h(w)$, entonces $h(x) = h(w) \leq h(ax + s), h(aw + V(s)) \leq h(x) = h(w)$, con lo cual $h(ax + s) = h(aw + V(s)) = h(V'(ax + s))$.
Lo anterior garantiza que V' preserva alturas.

Y teniendo en cuenta que V conserva las alturas de los elementos,

$$\dim\left(T_\alpha^*/T_{\alpha+1}\right) = \dim\left(S_\alpha^*/S_{\alpha+1}\right) < \dim\left(p^\alpha H[p]/p^{\alpha+1}H[p]\right)$$

Aplicando una vez más el lema, existe un elemento $w_1 \in p^\alpha H[p]$ tal que $h(w_1) = \alpha$ y es propio con respecto a T. Como $h(z) > \alpha + 1$ por hipótesis, entonces existe $w_2 \in p^{\alpha+1}H$ tal que $pw_2 = z$. Ahora bien, considérese el elemento $w = w_1 + w_2$. Nótese que:

1. $h(w) = h(w_1) = \alpha$, pues $h(w_2) \geq \alpha + 1$
2. $pw = p(w_1 + w_2) = 0 + z = z$
3. w es propio con respecto a T. Pues si no lo fuera, existiría un $t \in T$ tal que $h(w+t) > \alpha$, es decir, $h(w_2 + (w_1 + t)) = h(w_1 + t) > \alpha$, lo cual contradice el hecho de que w_1 es propio con respecto a T.

Tal w es el elemento deseado. □

[3] Es importante notar que justo en este punto es donde se utiliza la hipótesis de que G y H tienen los mismos invariantes de Ulm. Nótese que la desigualdad estricta vale ya que al ser S finito, $\dim(S_\alpha^*/S_{\alpha+1})$ es finita.

3 Clasificación elemental de los grupos abelianos de torsión

En este capítulo se enuncia y demuestra un Teorema que clasifica, módulo equivalencia elemental, los grupos abelianos de torsión. Se sigue una línea motivada por la sección 6 de [K] basándose en los conceptos introducidos en la sección de Lógica Infinitaria del primer capítulo.

El siguiente teorema es una formulación más fina del teorema de Karp (teorema 13) que establece una caracterización de la noción $\equiv^{\alpha}_{\infty\omega}$ para un ordinal α en términos de propiedades de *Back and Forth* y que es de gran utilidad para la demostración del teorema de clasificación para los grupos abelianos de torsión.

Teorema 22. *Para cualquier par de estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ asociadas al lenguaje $\mathcal{L}$ y para cualquier ordinal α, las siguientes son equivalentes:*

1. $\mathfrak{A} \equiv^{\alpha}_{\infty\omega} \mathfrak{B}$
2. *Existe una sucesión*
$$I_0 \supseteq I_1 \supseteq ... \supseteq I_\beta \supseteq ... \supseteq I_\alpha,$$
donde, para cada $\beta \leq \alpha$, I_β es un conjunto no vacío de isomorfismos parciales entre subestructuras finítamente generadas de $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, y tales que si $\beta + 1 \leq \alpha$ y $f \in I_{\beta+1}$, entonces para cada $a \in A$ ($b \in B$) existe un $g \in I_\beta$ con $f \subseteq g$ y $a \in dom(g)$ (resp. $b \in rng(g)$).

Siendo G un p-grupo abeliano de torsión y $U_G(\alpha)$ su α-ésimo invariante de Ulm, se define

$$\hat{U}_G(\alpha) = \left(\begin{array}{ll} U_G(\alpha) & \text{si } U_G(\alpha) \text{ es finito} \\ \infty & \text{de lo contrario} \end{array} \right.$$

Con los comentarios hechos en la sección de Lógica Infinitaria y teniendo en cuenta el teorema 1 y el Teorema de Feferman y Vaught (teorema 8), puede enunciarse entonces el teorema de clasificación de la siguiente manera.

Teorema 23. *(Clasificación elemental de los Grupos Abelianos de Torsión) Sean G y H dos p-grupos abelianos. $\hat{U}_G(\alpha) = \hat{U}_H(\alpha)$ para todo $\alpha < \omega^2$ si y sólamente si $G \equiv^{\omega}_{\infty\omega} H$.*

Demostración. Supóngase que $\hat{U}_G(\alpha) = \hat{U}_H(\alpha)$ para todo $\alpha < \omega^2$. Sea I_β, $\beta \leq \omega$, el conjunto de isomorfismos parciales entre subestructuras finítamente generadas de G y H (subgrupos finitos) que preservan las alturas estríctamente menores que $\omega\beta$. Es decir, $f \in I_\beta$ ssi $f$es un isomorfismo entre un subgrupo finito S de G y un subgrupo finito T de H tal que para todo $x \in S$, se tiene que:

$$\begin{array}{rcl} h_G(x) & < & \omega\beta \Rightarrow h_G(x) = h_H(f(x)), \text{ y} \\ h_G(x) & \geq & \omega\beta \Rightarrow h_H(f(x)) \geq \omega\beta \end{array}$$

Nótese que con el teorema anterior, basta mostrar que si $\beta + 1 \leq \alpha$, $f \in I_{\beta+1}$ y $a \in G$ ($b \in H$), entonces existe un $g \in I_\beta$ tal que $f \subseteq g$ y $a \in dom(g)$ (resp. $b \in rng(g)$). Esta prueba está detalladamente escrita en [B] (teorema 5) y utiliza básicamente los conceptos tratados en la prueba del Teorema de Ulm.

Ahora bien, supóngase que $G \equiv^{\omega}_{\infty\omega} H$. Considérense las siguientes formulas en $L_{\infty\omega}$:

1. $\phi_n(x) := \exists y(p^n \cdot y = x) \wedge \neg(x = 0)$, para cada n. Nótese que esta fórmula expresa "$x \in p^n G$" y su rango cuantificacional es $qr(\phi_n(x)) = 1$.

2. $\phi_{\omega+n}(x) := \exists y \left(\bigwedge_{n<\omega} \phi_n(y) \wedge (p^n \cdot y = x) \right)$. Esta fórmula expresa "$x \in p^{\omega+n} G$" y su rango cuantificacional es $qr(\phi_{\omega+n}(x)) = 2$.

Pues bien, nótese que cualquier ordinal κ, $\omega \leq \kappa < \omega^2$ puede escribirse de la forma $\kappa = n\omega + m$, donde $n, m \in \mathbb{N}$ y $n \geq 1$. Así, teniendo las anteriores, se puede definir recursivamente la fórmula

$$\begin{aligned} \phi_\kappa(x) \quad &: \quad = \exists y(\phi_{n\omega}(y) \wedge (p^m \cdot y = x)), \text{ donde} \\ \phi_{n\omega}(x) \quad &: \quad = \bigwedge_{l<\omega} \phi_{(n-1)\omega+l} \quad (\text{nótese que } qr(\phi_{n\omega}(x)) = n) \end{aligned}$$

Nótese que la fómula $\phi_\kappa(x)$ expresa "$x \in p^\kappa G$"y tiene rango cuantificacional $qr(\phi_\kappa(x)) = n + 1$.

Considérese ahora la fórmula

$$\theta_{\kappa,n} := \exists x_1 ... \exists x_n \, (\phi_\kappa(x_1) \wedge ... \wedge \phi_\kappa(x_n) \wedge (p \cdot x_1 = 0) ... \wedge (p \cdot x_n = 0) \wedge \\ \left(\bigwedge_{\sigma \in \Sigma^{n*}} \neg \phi_{\kappa+1}(\sigma(x_1, ..., x_n)) \right) \right)$$

donde Σ^{n*} es el conjunto de las $(p^n - 1)$ posibles combinaciones lineales no nulas de los elementos $x_1, ..., x_n$ vistos como elementos de un espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_p$.

De esta forma, la sentencia $\theta_{\kappa,n}$ $(\kappa < \omega^2)$ expresa *"existen n elementos en $p^\kappa G[p]$ independientes módulo $p^{\kappa+1}G[p]$"* y tiene rango cuantificacional $qr(\theta_{\kappa,n}) = qr(\phi_\kappa(x)) + n < \omega$.

Ahora bien, la sentencia

$$\beta_{\kappa,n} := \theta_{\kappa,n} \wedge \neg \theta_{\kappa,n+1}$$

expresa "$\hat{U}_G(\kappa) = n$" y su rango cuatificacional es $qr(\beta_{\kappa,n}) = qr(\theta_{\kappa,n+1}) < \omega$, es decir, $\beta_{\kappa,n} \in L^\omega_{\infty\omega}$.

Finalmente, para expresar en $L^\omega_{\infty\omega}$ el hecho "$\hat{U}_G(\kappa) = \infty$", basta considerar la teoría enumerable $T_\kappa \subseteq Sent(L^\omega_{\infty\omega})$ dada por

$$T_\kappa = \{\theta_{\kappa,n} : n \in \omega\}$$

Por hipótesis se tiene que

$$G \models \beta_{\kappa,n} \quad \text{ssi} \quad H \models \beta_{\kappa,n} \quad \text{y}$$

$$G \models T_\kappa \quad \text{ssi} \quad H \models T_\kappa \quad ,$$

con lo cual $\hat{U}_G(\alpha) = \hat{U}_H(\alpha)$ para todo $\alpha < \omega^2$ como se deseaba. □

4 Clasificación elemental de los grupos abelianos

En este capítulo se dará una prueba al teorema principal de este escrito que clasifica, módulo equivalencia elemental, los grupos abelianos. La línea de estudio que se sigue es la presentada en la sección 1 de [EyF]. Un primer paso consiste en caracterizar la estructura de los grupos abelianos κ-saturados para algún cardinal κ, es decir, aquellos grupos que satisfacen todos los tipos en menos que κ variables consistentes sobre cualquier subconjunto de parámetros de tamaño menor que κ. Este paso se desarrolla en la primera sección y su importancia radica en que dicha estructura queda determinada por algunos invariantes que son definibles en la lógica de primer orden por sentencias o conjuntos enumerables de sentencias. Una vez mostrado entonces el teorema que describe la estructura de los grupos κ-saturados módulo isomorfismo, se llega al teroema de clasificación elemental de los grupos abelianos en la segunda sección por un camino basado en resultados de la Teoría de Modelos.

4.1 La estructura de los Grupos Abelianos ω_1-saturados

Inicialmente se estudiará la estructura de unos grupos conocidos como ω_1-ecuacionalmente compactos.

Definición 24. *Un grupo G se dice ω_1-ecuacionalmente compacto si cualquier sistema enumerable de ecuaciones (en cualquier número de incógnitas) con parámetros de G que sea finítamente soluble en G, es soluble en G.*

Nótese que si un grupo abeliano G es κ-saturado con κ un cardinal no enumerable, G es ω_1-*ecuacionalmente compacto*. Estos grupos son también conocidos como *algebráicamente compactos* (Teorema 38.1 en [F]). G es *algebráicamente compacto* si es un sumando directo de todo grupo que lo contiene como un subgrupo puro. Así, por el Teorema 5, todo grupo divisible es ω_1-*ecuacionalmente compacto*.

Lema 25. *Sea G un grupo ω_1-ecuacionalemente compacto. Sea G_d su subgrupo divisible maximal y D el conjunto de todos los elementos de G que son divisibles por cualquier entero $\neq 0$. Entonces $G_d = D$.*

Demostración. Claramente D es un subgrupo de G y $G_d \leq D$. Sólo basta mostrar que D es divisible. Pues bien, sea $g \in D$ y $n \in \mathbb{N}^*$. Considérese el sistema de ecuaciones $\mathcal{S} = \{my_m = x : m \in \mathbb{N}\} \cup \{nx = g\}$. Es finitamente soluble. Sea $\mathcal{S}_* = \{m_i y_{m_i} = x : i = 1, 2, ..., l\} \cup \{nx = g\}$ un subsistema finito de $\mathcal{S}$; por hipótesis $nm_1m_2...m_lz = g$ para algún $z \in G$, así que considerando $x = m_1m_2...m_lz$ se tiene lo deseado. $\square$

Ahora considérese G_r el subgrupo reducido de G tal que $G = G_r \oplus G_d$. Para cada primo p se define una "semi-norma" $|\ |_p$ en G_r así: $|g|_p = p^{-n}$ si p^n divide a g pero p^{n+1} no; y $|g| = 0$ si p^n divide a g para todo $n \in \mathbb{N}$. Con estas semi-normas, se define $|g| = \sum_p |g|_p 2^{-p}$que cumple:

1. $|g| = 0 \Leftrightarrow g = 0$. Si $|g| = 0$, $|g|_p = 0$ para todo primo p, con lo cual g es divisible por todo $n \in \mathbb{N}$; es decir, $g \in G_r \cap G_d = \{0\}$.
2. $|g_1 + g_2| \leq |g_1| + |g_2|$. Más aún, $|g_1 + g_2| \leq \max\{|g_1|, |g_2|\}$. Nótese que para todo primo p se tiene que:
   (a) Si $|g_1|_p > |g_2|_p$, entonces $|g_1 + g_2|_p = |g_1|_p$, con lo cual $|g_1 + g_2|_p \leq \max\{|g_1|_p, |g_2|_p\}$. Análogamente si $|g_1|_p < |g_2|_p$.
   (b) Si $|g_1|_p = |g_2|_p$, entonces $|g_1 + g_2|_p \leq |g_1|_p$, con lo cual $|g_1 + g_2|_p \leq \max\{|g_1|_p, |g_2|_p\}$.

3. $|g| = |-g|$, claramente.

Así, $|\ |$ define una norma para los elementos de G_r y por lo tanto induce una métrica dada por $d(g_1, g_2) = |g_1 - g_2|$. El siguiente lema muestra que toda sucesión de Cauchy con respecto a $|\ |$ converge en G_r.

Lema 26. *G_r es completo bajo la métrica inducida por $|\ |$.*

Demostración. Basta mostrar que toda sucesión de Cauchy con respecto a $|\ |_p$ converge para todo primo p [4]. Pues bien, sea $\{g_n\}_{n<\omega}$ una sucesión de Cauchy en G_r (es decir, para cada $r > 0$ y cada primo p existe un $N_{p,r}$ tal que si $n, m \geq N_{p,r}$, $|g_n - g_m| < p^{-r}$). Se quiere encontrar un x tal que para cada primo p y cada $r > 0$, $|g_n - x| < p^{-r}$ para todo $n \geq N_{p,r}$, es decir, un x tal que $(g_n - x)$ sea divisible por p^{r+1}. Nótese que basta encontrar un x tal que $\left|g_{N_{p,r}} - x\right| < p^{-r}$; pues como $\left|g_n - g_{N_{p,r}}\right| < p^{-r}$ para todo $n \geq N_{p,r}$, se tiene que $(g_n - g_{N_{p,r}}) = p^{r+1}z_1$ y $(g_{N_{p,r}} - x) = p^{r+1}z_2$ para algunos $z_1, z_2 \in G_r$. Esto implica que $(g_n - x) = p^{r+1}(z_1 + z_2)$ como se quiere. Considérese entonces el sistema de ecuaciones $\mathcal{S} = \{p^{r+1}y_{p,r} = g_{N_{p,r}} - x : p \text{ primo}, r \in \mathbb{N}^*\}$. Sea $\mathcal{S}_* = \{p_i^{r_i+1}y_{p_i,r_i} = g_{N_{p_i,r_i}} - x : i = 1, 2, ..., n\}$ un subsistema finito de $\mathcal{S}$. Sea $M = \max\{N_{p_i r_i} : i = 1, ..., n\}$. Nótese que g_M es tal que $p_i^{r_i+1}z_{p_i,r_i} = g_{N_{p_i,r_i}} - g_M$ $(i = 1, ..., n)$ para algunos $z_{p_i,r_i} \in G_r$, con lo cual $\mathcal{S}$ es finítamente soluble en G_r. Por hipótesis (G es ω_1-ecuacionalmente compacto), $\mathcal{S}$ es soluble en G (las soluciones estarán en G_r) y G_r es entonces completo. □

Considérese ahora el subconjunto $\bar{G}_p$ compuesto por los elementos de G_r que son divisibles por todos los enteros que son primos relativos a p, es decir, $\bar{G}_p = \{g \in G_r : |g|_q = 0$ para todo primo $q \neq p\}$. Sea $g \in \bar{G}_p$ y $q \neq p$ un primo. Considérese el sistema $\mathcal{S} = \{q_i y_i = x : q_i \in \text{Pr}, q_i \neq p\} \cup \{qx = g\}$. Por un argumento análogo al utilizado en la prueba del primer lema, $\mathcal{S}$ es finítamente soluble en $\bar{G}_p$ y por lo tanto soluble en $\bar{G}_p$ (pues G es ω_1-ecuacionalmente compacto). De esta forma, $\bar{G}_p$ puede verse como un Z_p-módulo ($Z_p = \{\frac{m}{n} : (n, p) = 1\}$). La topología inducida por $|\ |_p$ en $\bar{G}_p$ se llama la *topología p-ádica*, y los submódulos $p^n\bar{G}_p$ (los elementos divisibles por p, es decir, los que están a una p-distancia menor que $p^{-(n-1)}$) forman un sistema de vecindades de 0. Nótese también que en $\bar{G}_p$, $|\ |_p$ es una norma, pues si $g \in \bar{G}_p$, $|g|_p = 2^p\,|g|$.

Proposición 27. *$\bar{G}_p$ es cerrado en G_r y por lo tanto completo en su métrica p-ádica.*

Demostración. Sea $x \in G_r$ un punto límite de $\bar{G}_p$. Entonces para todo $r > 0$ y para todo primo t, existe un $g \in \bar{G}_p$ tal que $|x - g|_t < t^{-r}$. Nótese que para todo primo $q \neq p$ se cumple $|x|_q - |g|_q \leq |x - g|_q \leq |x|_q + |g|_q$; pero $|g|_q = 0$ ya que $g \in \bar{G}_p$. Así que $|x|_q < q^{-r}$ para todo $r > 0$ y todo primo $q \neq p$; es decir, $|x|_q = 0$. Esto implica que $x \in \bar{G}_p$ y que $\bar{G}_p$ es cerrado al contener sus puntos límites. □

Lema 28. *Sea G ω_1-ecuacionalmente compacto. Para cualquier primo p y cualquier $g \in G_r$, existe un único $g_p \in \bar{G}_p$ tal que $|g - g_p|_p = 0$.*

[4] Nótese que para cada primo p, $2^{-p}\,|g|_p \leq 2^{-p}$. Como $\sum_p \frac{1}{2}^p \leq \sum_n \frac{1}{2}^n$ y $\sum_n \frac{1}{2}^n$ converge a 2, se tiene que $\sum_p 2^{-p}$ converge y entonces $\sum_p 2^{-p}\,|g|_p$ converge uniformemente a $|g|$ (Ver Rudin, W. *Principles of Mathematical Analysis*, Teorema 7.10.). De esta manera (Teorema 7.11.), si se tiene una sucesión de Cauchy $\{g_i\}_{i\in\omega} \subset G_r$ que converge a g,

$$\lim_{i\to\infty} \lim_{P\to\infty} \sum_p^P 2^{-p}\,|g_i - g|_p = \lim_{P\to\infty} \lim_{i\to\infty} \sum_p^P 2^{-p}\,|g_i - g|_p\,.$$

Esto verifica la afirmación.

Demostración. La unicidad está dada por el hecho de que si $g_p^1, g_p^2 \in \bar{G}_p$ son tales que $\left|g_p^1 - g\right|_p = 0 = \left|g - g_p^2\right|_p$, entonces $\left|g_p^1 - g_p^2\right| \leq \left|g_p^1 - g\right|_p + \left|g - g_p^2\right|_p = 0$; y como $|\ |_p$ se comporta como una norma en $\bar{G}_p$, $g_p^1 = g_p^2$. Para probar la existencia, considérese el sistema $\mathcal{S} = \{p^n y_n = g - x : n < \omega\} \cup \{m y_m = x : (m,p) = 1\}$. Sea $\mathcal{S}_* = \{p^{n_i} y_{n_i} = g - x : i = 1, ..., k\} \cup \{m_j y_{m_j} = x : (m_j, p) = 1,\ \ j = 1, ...l\}$ un subsistema finito de $\mathcal{S}$. Por definición del subsistema existen $s, t \in \mathbb{Z}$ tales que $s(p^{n_1} p^{n_2} ... p^{n_k}) + t(m_1 m_2 ... m_l) = 1$. Pues bien, considérese $x = t(m_1 m_2 ... m_l) g$ y nótese que es una solución para $\mathcal{S}_*$, ya que es divisible por cada m_j y $g - x = s(p^{n_1} p^{n_2} ... p^{n_k})$. Por hipótesis, al ser finitamente soluble , $\mathcal{S}$ es soluble y se tiene la existencia de g_p. □

Lema 29. *Si G es ω_1-ecuacionalmente compacto, G_r es isomorfo al producto directo $\prod_p \bar{G}_p$*

Demostración. Defínase $f : G_r \longrightarrow \prod_p \bar{G}_p$ por $f(g) = (g_{p_1}, g_{p_2}, ...)$ donde cada g_{p_i} es tal que $|g - g_{p_i}|_{p_i} = 0$. La buena definición viene dada por la existencia y unicidad de los g_{p_i}´s mostrada en el lema anterior.

Para ver que f es un homomorfismo, sean $g^1, g^2 \in G_r$. Por hipótesis, para cada p, existen unos únicos $g_p^1, g_p^2, g_p^3 \in \bar{G}_p$ tales que $\left|g^1 - g_p^1\right|_p = \left|g^2 - g_p^2\right|_p = \left|(g^1 + g^2) - g_p^3\right|_p = 0$. Pues bien, nótese que $\left|(g^1 + g^2) - (g_p^1 + g_p^2)\right|_p \leq \left|g^1 - g_p^1\right|_p + \left|g^2 - g_p^2\right|_p = 0$, con lo cual $g_p^1 + g_p^2 = g_p^3$.

Para ver que f es inyectiva, supóngase que $(g_{p_1}, g_{p_2}, ...) = f(g^1) = f(g^2)$; entonces para cada primo p, $\left|g^1 - g^2\right|_p = \left|(g^1 - g_p) + (g_p - g^2)\right| \leq \left|g^1 - g_p\right| + \left|g^2 - g_p\right| = 0$, con lo cual $g^1 - g^2 = 0$, es decir, $g^1 = g^2$.

Para ver que f es sobreyectiva, sea $(g_{p_1}, g_{p_2}, ...) \in \prod_p \bar{G}_p$. Considérese la sucesión en G_r dada por $(s_n)_{n<\omega} = \sum\limits_{i=1}^{n} g_{p_i}$. Nótese que es de Cauchy pues para cualquier primo p y cualquieras $m \leq n$ tales que $p_m, p_n > p$, se tiene que $|s_n - s_m|_p = \left|\sum\limits_{i=1}^{n} g_{p_i} - \sum\limits_{i=1}^{m} g_{p_i}\right|_p = \left|\sum\limits_{i=m}^{n} g_{p_i}\right|_p \leq \sum\limits_{i=m}^{n} |g_{p_i}|_p = 0$. Ahora bien, sea $g \in Gr$ el límite de $(s_n)_{n<\omega}$ (G_r es completo). Se quiere ver que $f(g) = (g_{p_1}, g_{p_2}, ...)$ (es decir, que $|g - g_{p_i}|_{p_i} = 0$ para cada p_i). Para esto, nótese que por ser g límite, dados cualquier primo p_k y cualquier $r > 0$, existe un $n_r > k$ tal que para todo $m > n_r$,

$$\begin{aligned} p_k^{-r} > |g - s_m|_{p_k} &= \left|g - \sum_{i=1}^{m} g_{p_i}\right|_{p_k} \\ &\geq |g - g_{p_k}|_{p_k} - |g_{p_1}|_{p_k} - ... - \left|g_{p_{k-1}}\right|_{p_k} - \left|g_{p_{k+1}}\right|_{p_k} - ... - |g_{p_m}|_{p_k} \\ &= |g - g_{p_k}|_{p_k}, \end{aligned}$$

con lo cual $|g - g_{p_k}|_{p_k} = 0$ como se quería.
Así, f es un isomorfismo. □

Hasta ahora se tiene entonces que si G es un grupo ω_1-ecuacionalmente compacto, G es isomorfo a la suma directa de un grupo divisible maximal G_d y un producto directo de Z_p-módulos completos $\bar{G}_p$, $G = G_d \oplus \prod_p \bar{G}_p$. Seguidamente, el interés se centrará en estudiar la estructura de dichos Z_p-módulos y para esto se introducirá la noción de sumbódulo básico que facilita el análisis.

Definición 30. *Sea A un Z_p-módulo. Se dice que $B \leq A$ es un submódulo* ***básico*** *de A si:*

1. *B es una suma directa de Z_p-módulos cíclicos.*

2. *B es puro en A, es decir, para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $(p^n A) \cap B = p^n B$ (nótese que basta decirlo para el primo p ya que se trata de Z_p-módulos)*

3. *A/B es divisible. (Esto equivale a la densidad de B en A con respecto a la topología p-ádica, ya que es divisible ssi para todo $a \in A$ y todo $n \in \mathbb{N}$ existen algunos $b \in B$ y $a' \in A$ tales que $a - p^n a' = b$, es decir, $|a-b|_p \leq p^{-n}$)*

El objetivo consiste ahora en mostrar que $\bar{G}_p$ es el completado (en la topología p-ádica) de un submódulo básico $G_p = \bigoplus\limits_{n\in\omega} \mathbb{Z}_{p^n}^{(\alpha_n)} \oplus Z_p^{(\beta)}$, y que los α_ńs y β son invariantes de $\bar{G}_p$; esto último garantiza la unicidad del submódulo básico módulo isomorfismo. Para verificar su existencia, se introduce un concepto y se prueban algunos lemas útiles.

Definición 31. *Se dice que un subconjunto $\{x_i\}_{i\in I}$ de un Z_p-módulo A es* ***puramente independiente*** *si es independiente (es decir, $\sum\limits_{i\in I} n_i x_i = 0$ implica que $n_i x_i = 0$ para todo $i \in I$ y para todo $n_i \in Z_p$) y el submódulo generado por él es puro en A.*

Nótese que como $\bar{G}_p$ no tiene elementos de p-altura infinita, existe un $x \in \bar{G}_p$ tal que x no es divisible por p y por lo tanto por ninguna de sus potencias. Pues bien, considérese el submódulo generado por este elemento $< x >= \{\frac{m}{n}x : \frac{m}{n} \in Z_p\}$. Supóngase que existe algún $\frac{m}{n}x \in < x >$ que es divisible por p^s en $\bar{G}_p$ para algún $s \in \mathbb{Z}^+$. Como x no es divisible por p, entonces $\frac{m}{n}x = \frac{p^s m_1}{n}x = p^s \frac{m_1}{n}x$. Nótese que $\frac{m_1}{n}x \in < x >$, y por lo tanto se tiene que para todo $s \in \mathbb{Z}^+$, $p^s\bar{G}_p \cap < x >= p^s < x >$. Con esta observación, se tiene la puridad de $< x >$ y por lo tanto se garantiza la existencia de un sumbódulo cíclico puro no trivial de $\bar{G}_p$.

Es fácil ver que ser púramente independiente se preserva bajo uniones de cadenas, con lo cual, aplicando el lema de Zorn, se tiene que existe un subconjunto $\{x_i\}_{i\in I}$ de $\bar{G}_p$ maximal con dicha propiedad. Con los dos siguientes lemas se verificará que el submódulo generado por tal subconjunto es un sumbódulo básico de $\bar{G}_p$.

Lema 32. *Sea A un Z_p-módulo completo sin elementos de altura infinita. Sea $\{x_i\}_{i\in I}$ un subconjunto de A maximal púramente independiente. El submódulo B generado por $\{x_i\}_{i\in I}$, es un submódulo básico de A. Más aún, A es el completado de B en la topología p-ádica.*

Demostración. La puridad y la estructura deseada de B se tienen por construcción. Basta probar la densidad de B en A en la topología p-ádica (lo que equivale a la divisibilidad de A/B, como se notó anteriormente) para obtener lo deseado.
Pues bien, supóngase que que existe un $x \in A - \bar{B}$. Por hipótesis, x tiene altura finita (dígase n) y por lo tanto $x = p^n y$ para algún y que no es divisible por p. Claramente $y \in A - \bar{B}$. Nótese que el submódulo generado por y es puro en A (por la observación hecha para garantizar la existencia de un submódulo cíclico puro no trivial de $\bar{G}_p$) y que $\{x_i\}_{i\in I} \cup \{y\}$ sigue siendo un subconjunto puramente independiente (pues de no serlo, y estaría en el generado por $\{x_i\}_{i\in I}$, B). Esto contradice la maximalidad de $\{x_i\}_{i\in I}$, con lo cual se tiene que $\bar{B} = A$ como se quería. □

Con lo anterior se garantiza entonces que $\bar{G}_p$ es el completado (en la topología p-ádica) de un submódulo básico $G_p = \bigoplus\limits_{n\in\omega} \mathbb{Z}_{p^n}^{(\alpha_n)} \oplus Z_p^{(\beta)}$, ya que el Z_p-submódulo generado por cada $x \in \{x_i\}_{i\in I}$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_{p^n}$ si el orden de x es p^n, o isomorfo a una copia de los p-ádicos, Z_p, si x tiene orden infinito. Para tener la unicidad de los α_ńs y β, primero algunas observaciones importantes:

1. Nótese que por la estructura de G_p (sumas directas) se tiene que su n-ésimo invariante de Ulm, $U_{G_p}(n) = \dim(p^n G_p[p]/p^{n+1}G_p[p])$, coincide con el número de sumandos directos de orden mayor que p^n menos el número de sumandos directos de orden mayor

que p^{n+1}; es decir, $U_{G_p}(n)$ indica el número de sumandos directos de orden p^{n+1}, o número de copias de $\mathbb{Z}_{p^{n+1}}$ en su descomposición. Así, se concluye que para todo n, $\alpha_n = U_{G_p}(n-1)$.

2. Nótese que si T es el sumbódulo de torsión de $\bar{G}_p$, $G_p/((G_p \cap T) + pG_p)$ puede verse como un $\mathbb{Z}_p$-espacio vectorial (es por esto importante incluir pG_p en el cociente) cuya dimensión es precisamente β.

Proposición 33. *Para todo n, $p^nG_p[p]/p^{n+1}G_p[p] \cong p^n\bar{G}_p[p]/p^{n+1}\bar{G}_p[p]$.*

Demostración. Antes de dar la prueba, nótese lo siguiente:

1. Por la divisibilidad de $\bar{G}_p/G_p$ (pues G_p es un submódulo básico de $\bar{G}_p$), se tiene que $\mathbf{\bar{G}}_p$= $\mathbf{G}_p$+$\mathbf{p\bar{G}}_p$, ya que para todo $g \in \bar{G}_p$ existe algún $g_1 \in \bar{G}_p$ y algún $g_2 \in G_p$ tales que $g - pg_1 = g_2$. Así, para cualquier n, $\mathbf{p}^n\mathbf{\bar{G}}_p$= $\mathbf{p}^n\mathbf{G}_p$+$\mathbf{p}^{n+1}\mathbf{\bar{G}}_p$.

2. $\mathbf{\bar{G}}_p[\mathbf{p}] = \mathbf{G}_p[\mathbf{p}] + \mathbf{p\bar{G}}_p[\mathbf{p}]$. Claramente $G_p[p] + p\bar{G}_p[p] \subseteq \bar{G}_p[p]$ pues $G_p[p] \subseteq \bar{G}_p[p]$ y $p\bar{G}_p[p] \subseteq \bar{G}_p[p]$. Para la otra inclusión, sea $g \in \bar{G}_p[p]$. Por la anterior observación, $g = g_1 + pg_2$ para algunos $g_1 \in G_p$, $g_2 \in \bar{G}_p$. Nótese que $p(g_1 + pg_2) = pg_1 + p^2g_2 = 0$, con lo cual $pg_1 = -p^2g_2$. Por la puridad de G_p en $\bar{G}_p$, $pg_1 = -p^2g_3$ para algún $g_3 \in G_p$. Tómese $x = g_1 + pg_3$ y $y = p(g_2 - g_3)$. Nótese que *i)* $g = x + y$, *ii)* $x \in G_p[p]$ y *iii)* $y \in p\bar{G}_p[p]$. Así se tiene la igualdad y para cualquier n, $\mathbf{p}^n\mathbf{\bar{G}}_p[\mathbf{p}] = \mathbf{p}^n\mathbf{G}_p[\mathbf{p}] + \mathbf{p}^{n+1}\mathbf{\bar{G}}_p[\mathbf{p}]$.

3. $\mathbf{p}^{n+1}\mathbf{G}_p[\mathbf{p}] = \mathbf{p}^n\mathbf{G}_p[\mathbf{p}] \cap \mathbf{p}^{n+1}\mathbf{\bar{G}}_p[\mathbf{p}]$. Claramente $p^{n+1}G_p[p] \subseteq p^nG_p[p] \cap p^{n+1}\bar{G}_p[p]$, pues $p^{n+1}G_p[p] \subseteq p^nG_p[p]$ y $p^{n+1}G_p[p] \subseteq p^{n+1}\bar{G}_p[p]$. Para la otra inclusión, sea $g \in p^nG_p[p] \cap p^{n+1}\bar{G}_p[p]$. Nótese que $g = p^ng_1 = p^{n+1}g_2$ para algunos $g_1 \in G_p$ y $g_2 \in \bar{G}_p$. Por la puridad de G_p en $\bar{G}_p$, $p^ng_1 = p^{n+1}g_3$ para algún $g_3 \in G_p$. Así, $x = p^{n+1}g_3 \in p^{n+1}G_p[p]$, y se tiene la igualdad.

Ahora bien, por la segunda observación, se tiene que

$$p^n\bar{G}_p[p]/p^{n+1}\bar{G}_p[p] = (p^nG_p[p] + p^{n+1}\bar{G}_p[p])/p^{n+1}\bar{G}_p[p].$$

Por el segundo teorema del isomorfismo,

$$(p^nG_p[p] + p^{n+1}\bar{G}_p[p])/p^{n+1}\bar{G}_p[p] \cong p^nG_p[p]/(p^nG_p[p] \cap p^{n+1}\bar{G}_p[p]).$$

Finalmente, por la tercera observación,

$$p^nG_p[p]/(p^nG_p[p] \cap p^{n+1}\bar{G}_p[p]) = p^nG_p[p]/p^{n+1}G_p[p],$$

con lo cual $p^n\bar{G}_p[p]/p^{n+1}\bar{G}_p[p] \cong p^nG_p[p]/p^{n+1}G_p[p]$ como se quería. □

Proposición 34. *Si T es el sumbódulo de torsión de $\bar{G}_p$, entonces $G_p/((G_p \cap T) + pG_p) \cong \bar{G}_p/(T + p\bar{G}_p)$.*

Demostración. Por la primera observación del lema anterior, $\bar{G}_p = G_p + p\bar{G}_p$ y claramente $\bar{G}_p = G_p + p\bar{G}_p + T$. Así, $\bar{G}_p/(T + p\bar{G}_p) = (G_p + (T + p\bar{G}_p))/(T + p\bar{G}_p)$. Por el segundo teorema del isomorfismo, $(G_p + (T + p\bar{G}_p))/(T + p\bar{G}_p) \cong G_p/(G_p \cap (T + p\bar{G}_p))$. Por la puridad de G_p en $\bar{G}_p$, $G_p \cap (T + p\bar{G}_p) =$[5]$(G_p \cap T) + (G_p \cap p\bar{G}_p) = (G_p \cap T) + pG_p$, con lo cual $\bar{G}_p/(T + p\bar{G}_p) \cong G_p/((G_p \cap T) + pG_p)$ como se quería. □

[5] Claramente $G_p \cap (T + p\overline{G}_p) \supseteq (G_p \cap T) + (G_p \cap p\overline{G}_p)$. Para probar la otra contenencia, sea $g \in G_p \cap (T + p\overline{G}_p)$. Si g tiene orden finito, $g \in (G_p \cap T)$ y no hay nada que probar. De la otra forma, si $g = t + pg_1$ para algunos $t \in T$ y $g_1 \in \overline{G}_p$, entonces existe un n tal que $p^ng = p^{n+1}g_1$. Por la puridad de G_p en $\overline{G}_p$, existe un $g_2 \in G_p$ tal que $p^ng = p^{n+1}g_2$. Pues bien, escríbase g como $g = t' + pg_2$ donde $t' = (g - pg_2)$. Nótese que se tiene entonces lo deseado.

Con esto se tiene entonces que para todo n, $\alpha_n = U_{G_p}(n-1) = U_{\bar{G}_p}(n-1)$ y $\beta = \dim(G_p/((G_p \cap T) + pG_p)) = \dim(\bar{G}_p/(T + p\bar{G}_p))$, lo cual caracteriza completamente la estructura de $\bar{G}_p$.

Volviendo a la estructura del grupo ω_1-ecuacionalmente compacto G, se tiene hasta ahora que $G = \prod_p \bar{G}_p \oplus G_d$ donde cada $G_p = \bigoplus_{n\in\omega} \mathbb{Z}_{p^n}^{(\alpha_{p,n})} \oplus Z_p^{(\beta_p)}$.

Una vez caracterizada la estructura de cada $\bar{G}_p$, el estudio se centrará en encontrar las relaciones entre dichos invariantes y algunos invariantes (definibles) de $G_r = \prod_p \bar{G}_p$ y de $G = G_r \oplus G_d$, además de analizar el comportamiento de cada $\alpha_{p,n}$ y β_p cuando G es un grupo κ-saturado.

Lema 35. *Sea $G = G_r \oplus G_d = \prod_p \overline{\bigoplus_{n\in\omega} \mathbb{Z}_{p^n}^{(\alpha_{p,n})} \oplus Z_p^{(\beta_p)}} \oplus G_d$ un grupo ω_1-ecuacionalmente compacto.*
i) Para todo n y todo primo p,

$$\alpha_{p,n} = \dim\left(p^{n-1}G_p[p]/p^nG_p[p]\right) = \dim\left(p^{n-1}\bar{G}_p[p]/p^n\bar{G}_p[p]\right) = \dim(p^{n-1}G[p]/p^nG[p])$$

ii) Para todo n y todo primo p, si G es κ-saturado y $\alpha_{p,n}$ es infinito, $\alpha_{p,n} \geq \kappa$.

Demostración. i) $\alpha_{p,n} = \dim\left(p^{n-1}G_p[p]/p^nG_p[p]\right) = \dim\left(p^{n-1}\bar{G}_p[p]/p^n\bar{G}_p[p]\right)$ ya fue probado. Ahora bien, nótese que como $G = G_r \oplus G_d$, entonces

$$\dim(p^{n-1}G[p]/p^nG[p]) = \dim(p^{n-1}G_r[p]/p^nG_r[p]) + \dim(p^{n-1}G_d[p]/p^nG_d[p]);$$

pero $p^nG_d = G_d$ para todo n (por la divisibilidad de G_d), con lo cual $\dim(p^{n-1}G_d[p]/p^nG_d[p]) = 0$ y por lo tanto $\dim(p^{n-1}G[p]/p^nG[p]) = \dim(p^{n-1}G_r[p]/p^nG_r[p])$. Pero nótese que $G_r = \prod_p \bar{G}_p$, así

$$\dim(p^{n-1}G_r[p]/p^nG_r[p]) = \sum_q \dim\left(p^{n-1}\bar{G}_q[p]/p^n\bar{G}_q[p]\right) = \dim\left(p^{n-1}\bar{G}_p[p]/p^n\bar{G}_p[p]\right),$$

pues $\dim\left(p^{n-1}\bar{G}_q[p]/p^n\bar{G}_q[p]\right) = 0$ para todo n y todo primo $q \neq p$, ya que en este caso $p^n\bar{G}_q = \bar{G}_q$. Con esto se tiene que $\dim(p^{n-1}G[p]/p^nG[p]) = \dim\left(p^{n-1}\bar{G}_p[p]/p^n\bar{G}_p[p]\right)$ como se quería.
ii) Fíjese un primo p y un n. Sea $\{x_\nu : \nu < \kappa\}$ un conjunto de κ variables libres. Considérese el conjunto de fórmulas

$$\begin{aligned}\mathcal{F} \;=\; & \{\exists y(p^{n-1}y = x_\nu) \wedge (px_\nu = 0) : \nu < \kappa\} \cup \\ & \left\{\forall y \left[p^{n+1}y = 0 \Rightarrow \neg(p^ny = \sigma(x_{\nu_1}, ..., x_{\nu_t}))\right] : t \in \mathbb{N}, \sigma \in \Sigma^{t*},\ \nu_i \neq \nu_j \text{ si } i \neq j\right\}\end{aligned}$$

[6]donde Σ^{t*} es el conjunto de las $(p^t - 1)$ posibles combinaciones lineales no nulas de los elementos $x_1, ..., x_t$ vistos como elementos de un espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_p$. Nótese que $\mathcal{F}$ ”dice” que existen por lo menos κ elementos en $p^{n-1}G[p]$ independientes módulo $p^nG[p]$. $\mathcal{F}$ es finitamente satisfacible pues por hipótesis $\alpha_{p,n}$ es infinito. Por la κ-saturación de G, se tiene que $G \vDash \mathcal{F}$ y entonces se tiene que $\alpha_{p,n} \geq \kappa$ para todo n y todo primo p. □

Teniendo claridad sobre los $\alpha_{p,n}$´s, se estudiará cuidadosamente β_p para cada primo p. Nótese que si en la proposición 34, T es el subgrupo de torsión de G, el resultado obtenido es

[6]Es importante notar que cuando se define este último conjunto de fórmulas se consideran, para cada t, todas las posibles t-tuplas (con sus componentes distintas), sin importar el orden, que se pueden conseguir a partir de las κ variables libres disponibles; esto para garantizar la independencia.
La misma anotación es pertinente para los lemas posteriores análogos a éste concernientes a β_p, γ_p (para un primo p) y δ.

$\beta_p = \dim(G_p/((G_p \cap T) + pG_p)) = \dim(\bar{G}_p/((\bar{G}_p \cap T) + p\bar{G}_p))$. Considerando la proyección canónica $\pi_p : G_r = \prod_q \bar{G}_q \longrightarrow \bar{G}_p$ y el epimorfismo

$$\varepsilon : G_r \longrightarrow \bar{G}_p/((\bar{G}_p \cap T) + p\bar{G}_p) \text{ dado por } \varepsilon(g) = \pi_p(g) + ((\bar{G}_p \cap T) + p\bar{G}_p),$$

puede verse que $Ker(\varepsilon) = (G_r \cap T) + pG_r$, pues para todo primo $q \neq p$, $p\bar{G}_q = \bar{G}_q$. Así, $G_r/((G_r \cap T) + pG_r) \cong \bar{G}_p/((\bar{G}_p \cap T) + p\bar{G}_p)$. De manera análoga, considerando la proyección canónica $\pi_r : G = G_r \oplus G_d \longrightarrow G_r$ y observando que $pG_d = G_d$, se concluye que $G/(T + pG) \cong G_r/((G_r \cap T) + pG_r)$.

Nótese que para todo $k \geq 0$, al multiplicar por p se tiene que

$$p^kG/(p^kT + p^{k+1}G) \cong p^{k+1}G/(p^{k+1}T + p^{k+2}G),$$

con lo cual se tiene que $\beta_p = \dim(p^kG/(p^kT + p^{k+1}G))$. Nótese también que si para algún k, $p^kT = p^{k+1}T$, entonces $p^kT + p^{k+1}G = p^{k+1}T + p^{k+1}G = p^{k+1}G$, con lo cual $\beta_p = \dim(p^kG/p^{k+1}G)$. La siguiente proposición provee información muy útil acerca de este evento.

Proposición 36. *Sea G un grupo y T su subgrupo de torsión; $p^kT = p^{k+1}T$ si y sólamente si para todo $n \geq k$,* $\dim(p^nT[p]/p^{n+1}T[p]) = 0$

Demostración. La implicación de izquierda a derecha es clara. Para la otra dirección, supóngase que $p^kT \neq p^{k+1}T$. Como $T = \bigoplus_q T_q$ puede verse como la suma directa de sus q-componentes (Teorema 1), suponer que $p^kT \neq p^{k+1}T$ equivale a suponer que $p^kT_p \neq p^{k+1}T_p$, ya que para todo primo $q \neq p$, $pT_q = T_q$. Pues bien, sea $x \in p^kT_p - p^{k+1}T\ _p$ con orden minimal, dígase p^n. Nótese que $p^{n-1}x \in (p^{k+n-1}T[p] - p^{k+n}T[p])$, pues en caso de que no, entonces $p^{n-1}x = p^{k+n}g$ para algún $g \in G$ tal que $p^{n-1}(x - p^{k+1}g) = 0$; así, $(x - p^{k+1}g) \in p^kT - p^{k+1}T$ y tendría orden p^{n-1}, lo que contradice la minimalidad del orden de x. De esta forma, $\dim(p^{k+n-1}T[p]/p^{k+n}T[p]) > 0$ □

Con el siguiente lema quedará claro el comportamiento de los β_p´s cuando G es un grupo κ-saturado, pero antes se mostrará una proposición que ayuda a comprender el comportamiento de $\dim(p^kG/p^{k+1}G)$ con relación a otras dimensiones importantes.

Proposición 37. *Para todo $k \geq 0$,*

$$\dim(p^kG/p^{k+1}G) \geq \dim(p^{k+1}G/p^{k+2}G) + \dim(p^kG[p]/p^{k+1}G[p])$$

Demostración. Basta probar que para todo $r \geq 0$,

$$\dim(p^{k+1}G/p^{k+2}G) + \dim(p^kG[p]/p^{k+1}G[p]) \geq r \Rightarrow \dim(p^kG/p^{k+1}G) \geq r$$

Pues bien, supóngase que existen $x_1, x_2, ..., x_n \in G$ tales que $p^{k+1}x_1, ..., p^{k+1}x_n \in p^{k+1}G$ son independientes módulo $p^{k+2}G$ y $y_1, y_2, ..., y_m \in G$ tales que $p^ky_1, ..., p^ky_m \in p^kG[p]$ son independientes módulo $p^{k+1}G[p]$, donde $m+n \geq r$. Claramente $p^kx_1, ..., p^kx_n, p^ky_1, ..., p^ky_m$ son elementos de p^kG; se mostrará que son independientes módulo $p^{k+1}G$.
Supóngase que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(p^kx_i) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j(p^ky_j) \equiv 0 \ (\bmod\ p^{k+1})$$

[7]para algunos α_i´s y β_j´s. Nótese que

$$p\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(p^kx_i) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j(p^ky_j)\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(p^{k+1}x_i)\right) \equiv 0 \ (\bmod p^{k+2}),$$

[7]En este escrito, " $\equiv (\bmod p^k)$" equivale a ser divisible por p^k.

pues $p^{k+1}y_j = 0$ para $j = 1, 2, ..., m$. Por hipótesis, los $p^{k+1}x_i$'s son independientes módulo $p^{k+2}G$, con lo cual se tiene que $a_i \equiv 0 \ (\text{mod} p)$, $(i = 1, ..., n)$. Así, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(p^k x_i) \equiv 0 (\text{mod} p^{k+1})$, con lo cual $\sum_{j=1}^{m} \beta_j(p^k y_j) \equiv 0(\text{mod} p^{k+1})$. Esto a su vez implica que $\sum_{j=1}^{m} \beta_j(p^k y_j) \equiv 0(\text{mod} p^k)$ (ya que si algún elemento es divisible por p^{k+1} también lo es por p^k) y utilizando el mismo argumento de independencia para los $p^k\ y_j$'s, se concluye que $\beta_j \equiv 0(\text{mod} p)\ \ (j = 1, ..., m)$. Esto prueba lo deseado. ☐

Lema 38. *Sea* $G = G_r \oplus G_d = \prod_p \overline{\bigoplus_{n\in\omega} \mathbb{Z}_{p^n}^{(\alpha_{p,n})} \oplus Z_p^{(\beta_p)}} \oplus G_d$ *un grupo* ω_1*-ecuacionalmente compacto y sea* T *el subgrupo de torsión de* G.

i) Para todo $k \geq 0$, $\beta_p = \dim(p^k G/(p^k T + p^{k+1}G))$

ii) Si para algún $k \geq 0$, $p^k T = p^{k+1}T$, *entonces* $\beta_p = \lim_{n\to\infty} \dim(p^n G/p^{n+1}G)$ *(Nótese que tiene sentido hablar de este límite ya que se trata de una sucesión decreciente de cardinales).*

iii) Si $\lim_{n\to\infty} \dim(p^n G/p^{n+1}G)$ *es finito, entonces* $\beta_p = \lim_{n\to\infty} \dim(p^n G/p^{n+1}G)$

iv) Si G *es* κ*-saturado* $(\kappa \geq \omega)$ *y* $\lim_{n\to\infty} \dim(p^n G/p^{n+1}G) = \infty$, *entonces* $\beta_p \geq \kappa$

Demostración. *i)* y *ii)* se mostraron en las observaciones hechas antes de la proposición 36.
iii) Si $\lim_{n\to\infty} \dim(p^n G/p^{n+1}G)$ es finito, entonces existe un $k \geq 0$ tal que para todo $m \geq k$, $\dim(p^m G/p^{m+1}G) = \dim(p^{m+1}G/p^{m+2}G) < \infty$. Por la proposición 37, para todo $m \geq k$ se tiene entonces que $\dim(p^m G[p]/p^{m+1}G[p]) = 0$, lo cual implica que para todo $m \geq k$, $\dim(p^m T[p]/p^{m+1}T[p]) = 0$, ya que $p^n G[p] = p^n T[p]$ para todo n; por la proposición 36 se concluye entonces que $p^k T = p^{k+1}T$. Finalmente por la parte *ii)* de este lema, $\beta_p = \lim_{n\to\infty} \dim(p^n G/p^{n+1}G)$.
iv) Fíjese un primo p. Sea $\{x_\nu : \nu < \kappa\}$ un conjunto de κ variables libres. Considérese el conjunto de fórmulas

$$\mathcal{F} = \left\{\forall y \neg[n(\sigma(x_{\nu_1}, ..., x_{\nu_t}) - py) = 0] : t \in \mathbb{N},\ \sigma \in \Sigma^{t*},\ \nu_i \neq \nu_j \text{ si } i \neq j\right\}$$

donde Σ^{t*} es el conjunto de las $(p^t - 1)$ posibles combinaciones lineales no nulas de los elementos $x_1, ..., x_t$ vistos como elementos de un espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_p$. $\mathcal{F}$ "dice" que existen por lo menos κ elementos de G independientes módulo $T + pG$. Se mostrará que $\mathcal{F}$ es finitamente satisfacible; para esto basta probar que para un n fijo,

$$G \vDash \left\{\forall y \neg[n(\sigma(x_1, ..., x_n) - py) = 0] : t \in N,\ \sigma \in \Sigma^{t*}\right\}$$

Supóngase que $n = p^k d$, donde $(d, p) = 1$. Por hipótesis se tiene que para todo $t \in \mathbb{N}$ existen $p^k g_1, p^k g_2, ..., p^k g_t \in p^k G$ independientes módulo $p^{k+1}G$. Ahora bien, se tiene entonces que para todo y,

$$n(\sigma(g_1, ..., g_t) - py) = \sigma(d(p^k g_1), ..., d(p^k g_t)) - p^k(dy) \neq 0,$$

con lo cual se verifica que $\mathcal{F}$ es finitamente satisfacible. Por la κ-saturación de G, se tiene que $G \vDash \mathcal{F}$ y entonces $\beta_p \geq \kappa$. ☐

Una vez caracterizada la estructura de G_r, se estudiará G_d, el subgrupo divisible maximal de G. Es sabido por el Teorema 4 que $G_d = \left(\bigoplus_p (\mathbb{Z}_{p^\infty})^{(\gamma_p)}\right) \oplus \mathbb{Q}^{(\delta)}$, donde $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ es el p-grupo de Prüfer y $\mathbb{Q}$ los racionales. Se hará de nuevo un análisis de γ_p para cada primo y de δ en términos de invariantes definibles de G y se estudiará su comportamiento cuando G es κ-saturado.

Nótese que como $\mathbb{Q}$ es libre de torsión y todo elemento en $\mathbb{Z}_{q^\infty}$ tiene orden que es potencia de q, entonces $\gamma_p = \dim(G_d[p])$ visto como un espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_p$.

Considérese de nuevo T el subgrupo de torsión de G, y escríbase como se hizo anteriormente: $T = \bigoplus_q T_q$. Nótese que para algún $k \geq 0$ y cualquier primo p,

$$p^kT = p^{k+1}T \Longleftrightarrow p^kT_p = p^{k+1}T_p \Longleftrightarrow p^kT \text{ es divisible},$$

con lo cual se tiene que si $p^kT = p^{k+1}T$ para algún $k \geq 0$, entonces $p^kT \leq G_d = p^kG_d$, y por lo tanto $\gamma_p = \dim(p^kG_d[p]) = \dim(p^kT[p])$. Por la proposición 36 se conoce bien cúando ocurre este evento, y análogamente a la proposición 37 se probará la siguiente que proporciona información útil sobre algunas dimensiones importante para esta etapa del estudio.

Proposición 39. *Para todo $k \geq 0$,*

$$\dim(p^kG[p]) \geq \dim(p^{k+1}G[p]) + \dim(p^kG[p]/p^{k+1}G[p])$$

Demostración. Basta probar que para todo $r \geq 0$,

$$\dim(p^{k+1}G[p]) + \dim(p^kG[p]/p^{k+1}G[p]) \geq r \Rightarrow \dim(p^kG[p] \geq r$$

Pues bien, supóngase que existen $x_1, x_2, ..., x_n \in G$ tales que $p^{k+1}x_1, p^{k+1}x_2, ..., p^{k+1}x_n \in p^{k+1}G[p]$ son independientes (como elementos de un espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_p$) y $y_1, y_2, ..., y_m \in G$ tales que $p^ky_1, p^ky_2, ..., p^ky_n \in p^kG[p]$ módulo $p^{k+1}G[p]$, donde $m + n \geq r$. Claramente $p^{k+1}x_1, ..., p^{k+1}x_n, p^ky_1, ..., p^ky_m$ son elementos de $p^kG[p]$; se mostrará que son independientes (como elementos de un espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_p$).
Supóngase que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(p^{k+1}x_i) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j(p^ky_j) \equiv 0(\text{mod}p^{k+2}), \tag{(1)}$$

para algunos α_i´s y β_j´s. Nótese que esto implica que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(p^{k+1}x_i) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j(p^ky_j) \equiv 0(\text{mod}p^{k+1}),$$

A su vez este resultado implica claramente que

$$\sum_{j=1}^{m} \beta_j(p^ky_j) \equiv 0(\text{mod}p^{k+1}).$$

Por hipótesis, los p^ky_i´s son independientes módulo $p^{k+1}G[p]$, con lo cual se tiene que $\beta_j \equiv 0$ $(\text{mod}p)$ $(j = 1, ..., m)$. Así,

$$\sum_{j=1}^{m} \beta_j(p^ky_j) \equiv 0(\text{mod}p^{k+2})$$

Volviendo a (1), lo anterior implica que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(p^{k+1}x_i) \equiv 0(\text{mod}p^{k+2}),$$

y por hipótesis de la independencia de los $p^{k+1}x_i$´s, se concluye que $\alpha_i \equiv 0$ $(\text{mod}p)$ $(i = 1, ..., n)$. Esto prueba lo deseado. □

Ahora el lema que describe detalladamente el comportamiento de γ_p para cada primo:

Lema 40. *Sea* $G = \prod_p \bar{G}_p \oplus G_d = \prod_p \bar{G}_p \bigoplus_p (\mathbb{Z}_{p^\infty})^{(\gamma_p)} \oplus \mathbb{Q}^{(\delta)}$ *un grupo* ω_1*-ecuacionalmente compacto y sea* T *el subgrupo de torsión de* G*.*
i) Para todo $k \geq 0$, $\gamma_p = \dim(G_d[p])$
ii) Si para algún $k \geq 0$, $p^kT = p^{k+1}T$, *entonces* $\gamma_p = \lim_{n\to\infty} \dim(p^n G[p])$ *(Nótese que tiene sentido hablar de este límite ya que se trata de una sucesión decreciente de cardinales).*
iii) Si $\lim_{n\to\infty} \dim(p^n G[p])$ *es finito, entonces* $\gamma_p = \lim_{n\to\infty} \dim(p^n G[p])$.
iv) Si G *es* κ*-saturado* ($\kappa \geq \omega$) *y* $\lim_{n\to\infty} \dim(p^n G[p]) = \infty$, *entonces* $\gamma_p \geq \kappa$.

Demostración. $i)$ y $ii)$ se mostraron en las observaciones hechas antes de la proposición 39.
$iii)$ Si $\lim_{n\to\infty} \dim(p^n G[p])$ es finito, entonces existe un $k \geq 0$ tal que para todo $m \geq k$, $\dim(p^m G[p]) = \dim(p^{m+1} G[p]) < \infty$. Por la proposición 39, para todo $m \geq k$ se tiene entonces que $\dim(p^m G[p]/p^{m+1} G[p]) = 0$, lo cual implica que para todo $m \geq k$, $\dim(p^m T[p]/p^{m+1} T[p]) = 0$, ya que $p^n G[p] = p^n T[p]$ para todo n; por la proposición 36 se concluye entonces que $p^k T = p^{k+1} T$. Finalmente por la parte $ii)$ de este lema, $\gamma_p = \lim_{n\to\infty} \dim(p^n G[p])$.
$iv)$ Fíjese un primo p. Sea $\{x_\nu : \nu < \kappa\}$ un conjunto de κ variables libres. Considérese el conjunto de fórmulas

$$\begin{array}{rcll} \mathcal{F} & = & \{px_\nu = 0 : \nu < \kappa\} \cup & \text{"tienen orden } p\text{"} \\ & & \{\exists y(my = x_\nu) : \nu < \kappa, m \in \mathbb{N}\} \cup & \text{"son divisibles por todo entero"} \\ & & \left\{\neg(\sigma(x_{\nu_1}, ..., x_{\nu_t}) = 0) : t \in \mathbb{N},\ \sigma \in \Sigma^{t*},\ \nu_i \neq \nu_j \text{ si } i \neq j\right\} & \text{"son independientes"} \end{array}$$

donde Σ^{t*} es el conjunto de las $(p^t - 1)$ posibles combinaciones lineales no nulas de los elementos $x_1, ..., x_t$ vistos como elementos de un espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_p$. $\mathcal{F}$ "dice" que existen por lo menos κ elementos de $G_d[p]$ [8] independientes como elementos de un espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_p$ ($\dim(G_d[p]) \geq \kappa$). Nótese que $\mathcal{F}$ es finitamente satisfacible ya que por hipótesis, para todo n, $\dim(p^n G[p]) = \infty$. Con la κ-saturación de G se verifica que $G \vDash \mathcal{F}$ y por lo tanto $\gamma_p \geq \kappa$. $\square$

Finalmente la atención se centrará en describir el comportamiento de δ, el número de copias de $\mathbb{Q}$ en la descomposición de G_d.

Definición 41. *Se dice que un grupo* G *tiene* orden acotado *si existe un entero* n *tal que* $nG = 0$.

Con lo anterior se define entonces el *exponente* de un grupo abeliano G de la siguiente manera:

$$Exp(G) = \begin{cases} 0 & \text{si } G \text{ tiene orden acotado} \\ \infty & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

Ahora el lema que describe el comportamiento de δ.

Lema 42. *Sea* $G = \prod_p \bar{G}_p \oplus G_d = \prod_p \bar{G}_p \bigoplus_p (\mathbb{Z}_{p^\infty})^{(\gamma_p)} \oplus \mathbb{Q}^{(\delta)}$ *un grupo* ω_1*-ecuacionalmente compacto.*
i) Si $Exp(G) = 0$, *entonces* $\delta = 0$.
ii) Si G *es* κ*-saturado* ($\kappa \geq \omega$) *y* $Exp(G) = \infty$, *entonces* $\delta \geq \kappa$.

[8] Nótese que como G es ω_1-ecuacionalmente compacto, por el lema 25 se tiene que si x es divisible por todo entero, $x \in G_d$.

Demostración. i) es claro ya que $\mathbb{Q}$ no tiene orden acotado.
ii) El objetivo consiste en encontrar un conjunto independiente de elementos de G_d (vistos ahora como elementos de un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$) con orden infinito de cardinalidad κ. Sea $\{x_\nu : \nu < \kappa\}$ un conjunto de κ variables libres. Considérese el conjunto de fórmulas que expresa lo deseado

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \{\exists y(ry = x_\nu) : r \in \mathbb{Z}^+,\, \nu < \kappa\} \cup \\ & \left\{\neg\left(\sum_{i=1}^{t} m_i x_{\nu_i} = 0\right) : t \in \mathbb{Z}^+, (m_1, m_2, ..., m_t) \in Q^t - (0, ..., 0)\right\} \end{aligned}$$

Se mostrará que $\mathcal{F}$ es finitamente satisfacible. Para probar esto, es suficiente mostrar que para $r, t, k \in \mathbb{Z}^+$ fijos y cualquier tupla $(m_1^j, ..., m_t^j) \in \mathbb{Q}^t - (0, ..., 0)$, $j = 1, 2, ..., k$, el subconjunto

$$\mathcal{F}_* = \left\{\neg\left(\sum_{i=1}^{t} m_i^j x_i = 0\right) : j = 1, ..., k\right\} \cup \{\exists y(ry = x_i) : i = 1, ..., t\}$$

es satisfacible. Pues bien, nótese que para cada $j = 1, ..., k$, $f_j = \sum_{i=1}^{t} m_i^j x_i$ es un polinomio no nulo de $\mathbb{Q}[x_1, ..., x_t]$. Defínase entonces el polinomio, no nulo, $f = f_1 f_2 ... f_k \in \mathbb{Q}[x_1, ..., x_n]$. Como el único polinomio de $\mathbb{Q}[x_1, ..., x_t]$ que se anula en todo punto de $\mathbb{Q}^t$ es el polinomio cero, entonces existe una tupla $(a_1, a_2, ..., a_t) \in \mathbb{Q}^t$ tal que $f(a_1, a_2, ..., a_t) \neq 0$. Más aún, puede suponerse sin problema que tal tupla pertenece a $\mathbb{Z}^t$, al igual que cada tupla $(m_1^j, ..., m_t^j)$, $j = 1, ..., k$ (multiplicando por un entero apropiado). De esta manera, se tiene entonces que $f_j(a_1, a_2, ..., a_t) = \sum_{i=1}^{t} m_i^j a_i \neq 0$, para $j = 1, ...k$. Considérese entonces en entero $s = \prod_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{t}(m_i^j a_i) r\right)$. Por hipótesis ($Exp(G) = \infty$) existe un $g \in G$ tal que $sg \neq 0$. Así, si $x_i = (a_i r)g$, se tiene que:

$$\sum_{i=1}^{t} m_i^j x_i = \left(\sum_{i=1}^{t} m_i^j a_i r\right) g \neq 0 \quad \text{para cada } j = 1, ..., k$$

y claramente r divide a x_i para $i = 1, ..., t$. Se tiene entonces que $\mathcal{F}$ es finitamente satisfacible. Por la κ-saturación de G, se concluye que $G \models \mathcal{F}$ y por lo tanto que $\delta \geq \kappa$. $\square$

Es momento entonces de hacer un recuento de los elementos que se tienen hasta ahora.

Teorema 43. *Sea κ un cardinal no enumerable. Si G es un grupo abeliano κ-saturado, G es ω_1-ecuacionalmente compacto y por lo tanto es isomorfo a un producto $\prod_p \bar{G}_p \oplus G_d$ donde*

$$G_d = \bigoplus_p (\mathbb{Z}_{p^\infty})^{(\gamma_p)} \oplus \mathbb{Q}^{(\delta)}$$

es divisible y cada $\bar{G}_p$ es el completado, en la topología p-ádica de una suma directa de grupos cíclicos

$$G_p = \bigoplus_{n \in \omega} \mathbb{Z}_{p^n}^{(\alpha_{p,n})} \oplus Z_p^{(\beta_p)}.$$

Más aún,

$$
\begin{aligned}
\alpha_{p,n} &: \begin{cases} = \dim(p^{n-1}G[p]/p^nG[p]) \text{ si } \dim(p^{n-1}G[p]/p^nG[p]) \text{ es finito} \\ \geq \kappa \text{ de lo contrario} \end{cases} \\
\beta_p &: \begin{cases} = \lim\limits_{n\to\infty} \dim(p^nG/p^{n+1}G) \text{ si } \lim\limits_{n\to\infty} \dim(p^nG/p^{n+1}G) \text{ es finito} \\ \geq \kappa \text{ de lo contrario} \end{cases} \\
\gamma_p &: \begin{cases} = \lim\limits_{n\to\infty} \dim(p^nG[p]) \text{ si } \lim\limits_{n\to\infty} \dim(p^nG[p]) \text{ es finito} \\ \geq \kappa \text{ de lo contrario} \end{cases} \\
\delta &: \begin{cases} = \dim(p^nG[p]/p^{n+1}G[p]) \text{ si } \dim(p^nG[p]/p^{n+1}G[p]) \text{ es finito} \\ \geq \kappa \text{ de lo contrario} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Demostración. La demostración de este teorema está contenida en los resultados obtenidos a lo largo de estas sección. Las afirmaciones acerca de $\alpha_{p,n}$, $\beta_{p,n}$, γ_p y δ son tomadas, respectivamente, de los lemas 35, 38, 40 y 42. □

4.2 El Teorema de Clasificación Elemental

En esta sección se llega al teorema principal del trabajo, que clasifica, módulo equivalencia elemental, los Grupos Abelianos. Para esto, son necesarios algunos resultados previos.

Con los elementos tratados en la sección anterior, se definen los *invariantes elementales* de un grupo abeliano G de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
NDCT_{p,n}(G) &= \begin{cases} U_{G,p}(n-1) = \dim(p^{n-1}G[p]/p^nG[p]) \text{ en caso de ser finito} \\ \infty \text{ de lo contrario} \end{cases} \\
NDST_p(G) &= \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \dim(p^nG/p^{n+1}G) \text{ en caso de ser finito} \\ \infty \text{ de lo contrario} \end{cases} \\
DCT_p(G) &= \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \dim(p^nG[p]) \text{ en caso de ser finito} \\ \infty \text{ de lo contrario} \end{cases} \\
DST(G) &= Exp(G)
\end{aligned}
$$

Para justificar el hecho de llamarlos elementales, el siguiente teorema:

Teorema 44. *Dos grupos abelianos elmentalmente equivalentes G y H tienen los mismos invariantes elementales.*

Demostración. $i)$ Considérese la sentencia

$$
\begin{aligned}
\phi_{n,p,k} := \quad & \exists x_1, ...x_k \left[\bigwedge_{i=1}^{k} \left(\exists y_i (p^{n-1}y_i = x_i) \wedge (px_i = 0)\right)\right] \\
& \wedge \bigwedge_{\sigma\in\Sigma^{k*}} \left[\forall y \left[(p^{n+1}y = 0) \Rightarrow \neg(p^ny = \sigma(x_1, ..., x_k))\right]\right]
\end{aligned}
$$

donde Σ^{k*} es el conjunto de las $(p^k - 1)$ posibles combinaciones lineales no nulas de los elementos $x_1, ..., x_k$ vistos como elementos de un espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_p$.

Nótese que G satisface $\phi_{n,p,k}$ ssi $U_{G,p}(n-1) \geq k$. Como G y H son elementalmente equivalentes, se tiene que para cada cada k, $U_{G,p}(n-1) \geq k$ ssi $U_{H,p}(n-1) \geq k$. Con esto, $NDCT_{p,n}(G) = NDCT_{p,n}(H)$ para todo n y todo primo p.

$ii)$ Considérese ahora la sentencia

$$
\psi_{p,k} := \quad \exists x_1, ...x_k \left[\bigwedge_{i=1}^{k} \exists y_i (p^n y_i = x_i) \wedge \bigwedge_{\sigma\in\Sigma^{k*}} \forall y (\neg(p^{n+1}y = \sigma(x_1, ..., x_k)))\right]
$$

G satisface $\psi_{p,k}$ ssi $\dim(p^n G/p^{n+1}G) \geq k$. Al ser elementalmente equivalentes,

$$\dim(p^n G/p^{n+1}G) \geq k \;\text{ ssi }\; \dim(p^n H/p^{n+1}H) \geq k.$$

Esto implica que $\dim(p^n G/p^{n+1}G) = \dim(p^n H/p^{n+1}H)$ para todo n (en el sentido finito-∞), y por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} \dim(p^n G/p^{n+1}G) = \lim\limits_{n\to\infty} \dim(p^n H/p^{n+1}H)$. Con esto, $NDST_p(G) = NDST_p(H)$ para todo primo p.
iii) Similarmente, considérese

$$\begin{aligned}\varphi_p := \quad & \exists x_1, ...x_k \left[\bigwedge_{i=1}^{k} (\exists y_i (p^n y_i = x_i) \wedge (px_i = 0)) \right] \\ & \wedge \bigwedge_{\sigma \in \Sigma^{k*}} \neg(\sigma(x_1, ..., x_k)) = 0)\end{aligned}$$

G satisface φ_p ssi $\dim(p^n G[p]) \geq k$. Al ser elementalmente equivalentes,

$$\dim(p^n G[p]) \geq k \;\text{ ssi }\; \dim(p^n H[p]) \geq k.$$

Esto implica que $\dim(p^n G[p]) = \dim(p^n H[p])$ para todo n (en el sentido finito-∞), y por tanto $\lim\limits_{n\to\infty} \dim(p^n G[p]) = \lim\limits_{n\to\infty} \dim(p^n H[p])$. Con esto, $DCT_p(G) = DCT_p(H)$ para todo primo p.
iv) Finalmente, G tiene orden acotado divisor de n ($Exp(G) = 0$) ssi G satisface la sentencia $\forall x(nx = 0)$. Con la equivalencia elemental de G y H se tiene que $Exp(G) = Exp(H)$ y por lo tanto $DST(G) = DST(H)$.
Queda mostrado entonces el teorema. □

Ahora bien, el siguiente paso consiste en encontrar y describir ciertas subestructuras elementales de un grupo abeliano ω_1-saturado; esto permitirá demostrar de manera clara el teorema principal.

Considérese un grupo ω_1-saturado G. Por el teorema 43 se tiene que

$$G = G_r \oplus G_d = \prod_p \bar{G}_p \oplus G_d = \prod_p \overline{\bigoplus_{n\in\omega} \mathbb{Z}_{p^n}^{(\alpha_{p,n})} \oplus Z_p^{(\beta_p)}} \oplus \bigoplus_p (\mathbb{Z}_{p^\infty})^{(\gamma_p)} \oplus \mathbb{Q}^{(\delta)} \tag{1}$$

donde cada $\alpha_{p,n}$, $\beta_{p,n}$, γ_p y δ es finito o por lo menos ω_1.

Pues bien, considérese entonces el subgrupo $G' \leq G$ dado por

$$G' = G'_r \oplus G'_d = \prod_p \bar{G}'_p \oplus G'_d = \prod_p \overline{\bigoplus_{n\in\omega} \mathbb{Z}_{p^n}^{(\alpha'_{p,n})} \oplus Z_p^{(\beta'_p)}} \oplus \bigoplus_p (\mathbb{Z}_{p^\infty})^{(\gamma'_p)} \oplus \mathbb{Q}^{(\delta')} \tag{2}$$

donde cada $\alpha'_{p,n}$ (resp. $\beta'_{p,n}$, γ'_p, δ') es igual a $\alpha_{p,n}$ (resp. $\beta_{p,n}$, γ_p, δ) si éste es finito, o igual a ω_1 de lo contrario; y completando la diferencia entre los $\alpha_{p,n}$, $\beta_{p,n}$, γ_p, δ´s y los $\alpha'_{p,n}$, $\beta'_{p,n}$, γ'_p, δ'´s con copias de $\{0\}$.

Lema 45. *Sean G y G' los grupos descritos en las ecuaciones 1 y 2 respectivamente. Para todo subconjunto enumerable $S \subset G$ existe un automorfismo $f \in Aut(G)$ tal que $f(S) \subset G'$.*

Demostración. *i*) Considérese primero un subconjunto enumerable

$$S \subset \prod_p G_p \oplus G_d = \prod_p \bigoplus_{n\in\omega} \mathbb{Z}_{p^n}^{(\alpha_{p,n})} \oplus Z_p^{(\beta_p)} \oplus G_d.$$

Dada la estructura de G (sumas directas y producto directo enumerable), puede verse que cada elemento de S tiene a lo sumo enumerables componentes distintas de cero. Esto implica (por la enumerabilidad de S) que el número de coordenadas en las cuales algún elemento de

S toma un valor distinto de cero, son a lo sumo enumerables. Dado esto, pueden permutarse los sumandos directos de $\prod_p G_p \oplus G_d$ de tal manera que:

i) las coordenadas (a lo sumo enumerables) ocupadas por S en $\prod_p G'_p \oplus G'_d$ se queden fijas.

ii) Como queda una infinidad de coordenadas nulas de S en $\prod_p G'_p \oplus G'_d$ (pues de ser infinitos, los invariantes son ω_1), intercámbiense una a una, las coordenadas necesarias, en orden de aparición, con las ocupadas por S fuera de $\prod_p G'_p \oplus G'_d$.

Esta operación define claramente un automorfismo $f \in Aut\left(\prod_p G_p \oplus G_d\right)$ tal que $f(S) \subset G'$.

ii) Sólo resta mostrar que el anterior automorfismo puede extenderse a $\prod_p \bar{G}_p \oplus G_d$ conservando la propiedad deseada. Pues bien, sea $g \in \bar{G}_p$ para algún primo p. Este elemento puede verse entonces como el límite de una sucesión de Cauchy $\{g_i\}_{i\in\omega} \subset G_p$, y por tanto como el límite de una sucesión $\{s_i\}_{i\in\omega} \subset \prod_p G_p \oplus G_d$ (simplemente poniendo 0 en las demás coordenadas). Pues bien, considérese entonces $f\left(\{s_i\}_{i\in\omega}\right) = \{f(s_i)\}_{i\in\omega} \subset G'$ (por lo mostrado en el punto anterior). Como la unión enumerable de conjuntos enumerables es enumerable, basta considerar un sólo $g \in \bar{G}_p$ para algún primo p. Es suficiente notar que f conserva las alturas de los elementos para concluir que $\{f(s_i)\}_{i\in\omega}$ converge a algún $s \in \prod_p \bar{G}_p \oplus G_d$. Defínase $f(g) = s \in G'$. Para ver que f es un homomorfismo, nótese que

$$\begin{aligned}
f(g_1) + f(g_2) = \lim_{i\to\infty} f(s_{1i}) + \lim_{i\to\infty} f(s_{2i}) &= \lim_{i\to\infty} \left(f(s_{1i}) + f(s_{2i})\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} f((s_{1i} + s_{2i})) \\
&= (s_1 + s_2) = f(g_1 + g_2)
\end{aligned}$$

Se tiene entonces lo deseado. □

Lema 46. *Sean G y G' los grupos descritos en las ecuaciones 1 y 2 respectivamente. Entonces G' es subestructura elemental de G ($G' \prec G$).*

Demostración. Por el corolario 10 es suficiente probar que dados $g_1, g_2, ..., g_n \in G'$ y $g \in G$, existe un automorfismo $f \in Aut(G)$ tal que $f(g_i) = g_i \;\; i = 1, ..., n$ y tal que $f(g) \in G'$. Esto se logra con el lema anterior disponiendo ciudadosamente en el paso i) los sumandos directos (dejando fijas las coordenadas en las cuales algún g_i $i = 1, ...n$ toma un valor distinto de cero y acomodando seguídamente aquellas en las que g toma valores no nulos y que no habían aparecido). □

Finalmente puede probarse el Teorema Principal del escrito.

Teorema 47. *(Clasificación elemental de los grupos abelianos) Dos Grupos Abelianos G y H son elementalmente equivalentes si y sólamente si tienen los mismos invariantes.*

Demostración. Si G y H son elementalmente equivalentes, tienen los mismos invariantes (teorema 44). Ahora bien, supóngase que G y H tienen los mismos invariantes. Por el lema 16 existen G^* y H^* grupos abelianos ω_1-saturados tales que $G \prec G^*$ y $H \prec H^*$. Nótese que G^* y H^* tienen los mismos invariantes finitos y por el teorema 43 se tiene que su estructura coincide con la descrita en 1. Pues bien, considérense G^{**} y H^{**} subgrupos de G^* y H^* respectivamente de la forma descrita en 2. Por el lema anterior se tiene que $G^{**} \prec G^*$ y $H^{**} \prec H^*$. De esta forma $G \prec G^* \succ G^{**} \cong H^{**} \prec H^* \succ H$ y por lo tanto $G \equiv H$. □

Referencias

[B] J. Barwise, *Back and Forth through Infinitary Logic*. MAA Studies in Mathematics, vol.8. The Mathematical Association of America, 1973.

[CyK] C.C. Chang y H.J. Keisler, *Model Theory*. North-Holland, 1977.

[Ch] Cherlin

[E] P. Eklof, Some Model Theory of Abelian Groups. The Journal of Symbolic Logic, vol.37 (2), 1972. Pgs. 335-342.

[EyF] P. Eklof y E. Fisher, *The Elementary Theory of Abelian Groups*. Annals of Mathematical Logic, vol.4, 1972. Pgs. 115-171.

[F] L. Fuchs, *Infinite Abelian Groups*, vol.1. Academic Press, New York, 1970.

[K] I. Kaplansky, *Infinite Abelian Groups*. University of Michigan Press, Ann Arbor, 1969.

[S] W. Szmielew, *Elementary properties of Abelian Groups*. Fund. Math., vol.41, 1955. Pgs. 201-271.