4. RÉGIMEN FINANCIERO DE INTERÉS COMPUESTO A TANTO CONSTANTE Y VENCIDO

Los pactos que caracterizan al régimen financiero de interés compuesto a tanto constante y vencido son:

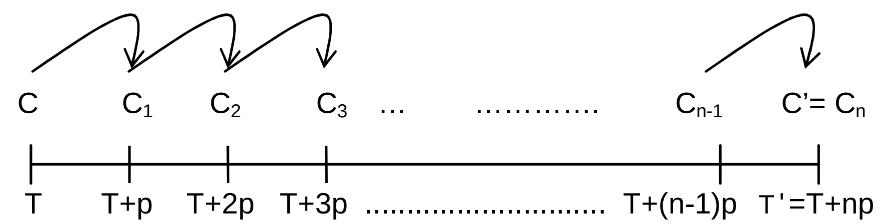
a. El precio o interés total se paga al final de la operación conjuntamente con la devolución de la cuantía inicial.

b. El plazo total de la operación se divide en periodos de capitalización y el precio se calcula en cada periodo aplicando una constante de proporcionalidad, i, que es el tanto nominal de interés, a la cuantía acumulada al inicio del periodo considerado y a la extensión del mismo.

Sea:

- C : Cuantía inicial
- C_r : Cuantía acumulada al final del periodo r $(r = 1,2,...,n)$, siendo $C_n = C'$.
- i : Tanto nominal de interés, (tanto anual).
- $t = T' - T$: Plazo de la operación, expresado en años.
- p : Periodo de capitalización, expresado en años.
- m : Frecuencia de capitalización. Es el número de periodos de capitalización en un año. Se cumple que $m = \frac{1}{p}$.
- n: Número de periodos de capitalización en que se divide el plazo de la operación. Se cumple que $n = \frac{t}{p} = m \cdot t$.

El esquema temporal correspondiente a este régimen es:



y la evolución de la cuantía periodo a periodo:

DIFERIMIENTO	**CUANTÍA**
T	C
$T+p$	$C_1 = C + i \cdot C \cdot p = C \cdot (1+i \cdot p)$
$T+2p$	$C_2 = C_1 + i \cdot C_1 \cdot p = C_1 \cdot (1+i \cdot p) = C \cdot (1+i \cdot p)^2$
$T+3p$	$C_3 = C_2 + i \cdot C_2 \cdot p = C_2 \cdot (1+i \cdot p) = C \cdot (1+i \cdot p)^3$
....	.....
$T' = T + np$	$C_n = C_{n-1} + i \cdot C_{n-1} \cdot p = C_{n-1} \cdot (1+i \cdot p) = C \cdot (1+i \cdot p)^n$

La relación entre la cuantía final y la cuantía inicial en el régimen financiero de interés compuesto a tanto constante y vencido es:

$$C' = C \cdot (1+i \cdot p)^{n}$$

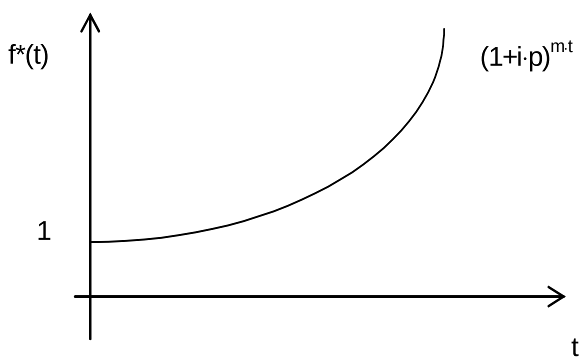
o bien,

$$C' = C \cdot (1+i \cdot p)^{\frac{t}{p}} = C \cdot (1+i \cdot p)^{m \cdot t}$$

Esta ecuación cumple todas las propiedades de la equivalencia financiera, lo que implica que el factor financiero empírico que se deduce de este régimen verifica a su vez todas las propiedades del factor financiero teórico, siendo su expresión:

$$f^*(T,T') = f^*(t) = \frac{C'}{C} = \frac{C \cdot (1+i \cdot p)^{m \cdot t}}{C} = (1+i \cdot p)^{m \cdot t}$$

Se trata de una función exponencial cuya representación gráfica es:



A partir de la expresión que caracteriza al régimen financiero de interés compuesto a tanto constante,

$$C' = C \cdot (1 + i \cdot p)^{m \cdot t}$$

se deduce:

$$C = C' \cdot (1 + i \cdot p)^{-m \cdot t}$$

$$i = \frac{\left(\frac{C'}{C}\right)^{1/m \cdot t} - 1}{p}$$

$$t = \frac{\ln(C'/C)}{m \cdot \ln(1 + i \cdot p)}$$

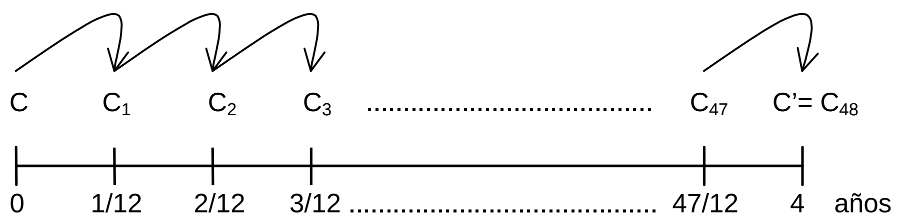
Ejemplo

Se depositan 30.000 € en una cuenta durante 4 años, bajo régimen financiero de interés compuesto a tanto constante del 3% anual capitalizable mensualmente. Hallar el saldo final.

Los datos del ejemplo son:

- $C = 30.000$ €
- $i = 0{,}03$
- $p = \frac{1}{12} \Rightarrow m = 12$
- $t = 4$ años
- $n = t \cdot m = 48$ meses

El esquema de la operación es:



Aplicando directamente la expresión que caracteriza al régimen financiero de interés compuesto a tanto constante y vencido se obtiene:

$$C' = C \cdot (1 + i \cdot p)^{m \cdot t} = 30.000 \cdot \left(1 + 0{,}03 \cdot \frac{1}{12}\right)^{48} = 33.819{,}84 \text{ €}$$

Tantos de interés: tanto nominal y tanto efectivo

- **Tanto nominal de interés**

El tanto nominal de interés, que aparece en la expresión que caracteriza al régimen financiero de interés compuesto, $C' = C \cdot (1 + i \cdot p)^{m \cdot t}$, es un precio unitario respecto a la cuantía inicial de cada periodo y medio respecto al periodo. Es un tanto anual aunque su frecuencia de capitalización puede ser distinta a la anual. Para poner de manifiesto dicha frecuencia el tanto nominal de interés se simboliza por i_m .

Ejemplo

i_{12} : Tanto nominal capitalizable mensualmente.

i_4 : Tanto nominal capitalizable trimestralmente.

- **Tanto efectivo de interés**

Teniendo en cuenta que $p = \frac{1}{m}$, la relación entre cuantías:

$$C' = C \cdot (1 + i \cdot p)^{m \cdot t}$$

puede escribirse también como:

$$C' = C \cdot (1 + i_m \cdot p)^{m \cdot t} = C \cdot \left(1 + \frac{i_m}{m}\right)^{m \cdot t}$$

Se denomina **tanto efectivo de interés** con frecuencia de capitalización m, y se simboliza por I_m, al cociente entre el tanto nominal de interés y su frecuencia de capitalización:

$$I_m = \frac{i_m}{m}$$

El tanto efectivo de interés, I_m, está referido al periodo de capitalización. Es un precio unitario respecto la cuantía inicial de cada periodo y total respecto al periodo.

En función del tanto efectivo de interés, la expresión que caracteriza al régimen financiero de interés compuesto es:

$$C' = C \cdot (1+I_m)^n = C \cdot (1+I_m)^{m \cdot t}$$

Ejemplo

Si $i_{12} = 0{,}03$ es el tanto nominal de interés anual capitalizable mensualmente, el tanto efectivo mensual es $I_{12} = \frac{0{,}03}{12} = 0{,}0025$

Tantos efectivos de interés equivalentes

Dados dos capitales financieros equivalentes:

$$(C,T) \sim (C',T')$$

Si la operación se pacta en régimen financiero de interés compuesto al tanto I_m resulta:

$$C' = C \cdot (1+I_m)^{m \cdot t}$$

Si esta misma operación se pacta al tanto, $I_{m'}$, se tiene:

$$C' = C \cdot (1+I_{m'})^{m' \cdot t}$$

de modo que:

$$\left.\begin{aligned} C' &= C \cdot (1+I_m)^{m \cdot t} \\ C' &= C \cdot (1+I_{m'})^{m' \cdot t} \end{aligned}\right\}$$

de lo que resulta:

$$(1+I_m)^m = (1+I_{m'})^{m'}$$

siendo,

$$I_{m'} = (1+I_m)^{\frac{m}{m'}} - 1$$

Los tantos efectivos de interés, I_m y $I_{m'}$, reciben el nombre de tantos efectivos de interés equivalentes, y se simboliza por:

$$I_m \sim I_{m'}$$

Ejemplo

Dado el tanto efectivo trimestral de interés, $I_4 = 0{,}012$, hallar el tanto efectivo de interés anual equivalente, I_1.

Para hallar $I_1 \sim I_4 = 0{,}012$ se debe aplicar la siguiente fórmula:

$$I_{m'} = (1+I_m)^{\frac{m}{m'}} - 1$$

para el caso particular que $m' = 1$ y $m = 4$, esto es:

$$I_1 = (1+I_4)^{\frac{4}{1}} - 1 = (1+0{,}012)^4 - 1 = 0{,}048871$$

$$I_4 = 0{,}012 \sim I_1 = 0{,}048871$$