11 CORRENT ALTERN: IMPEDÀNCIES I RESSONÀNCIA

Resum. En aquest estudi es tractarà la dependència en freqüència i el desfasament dels tres tipus d'impedàncies (lineals) bàsiques: la resistiva, la capacitiva i la inductiva. Per acabar, s'estudiarà el comportament ressonant que presenta la impedància de la connexió en sèrie d'un condensador i una autoinducció.

11.1 Fonament

11.1.1 Impedància.

És ben conegut que, en l'estudi del corrent continu (DC), quan a una resistència, *R*, se li aplica una tensió contínua, el corrent que hi circula és proporcional a la tensió aplicada (Llei d'Ohm)

$$R=\frac{V}{I} \tag{1}$$

En corrent altern (AC), les tensions i les intensitats depenen sinusoïdalment del temps i això fa que sigui adequat de fer el seu tractament matemàtic en base al formalisme de l'exponencial complexa.

$$V=V_0 e^{i\varphi_V} e^{i\omega t} \quad , \quad I=I_0 e^{i\varphi_I} e^{i\omega t} \tag{2}$$

En corrent altern, hi ha elements de circuit que mostren proporcionalitat entre la tensió aplicada i la intensitat que hi circula, de forma que es pot definir la “impedància de l'element de circuit”

$$Z=\frac{V_0 e^{i\varphi_V} e^{i\omega t}}{I_0 e^{i\varphi_I} e^{i\omega t}}=\frac{V_0}{I_0} e^{i(\varphi_V-\varphi_I)} \tag{3}$$

Aquesta expressió mostra que la impedància, *Z*, determina el quocient entre la amplitud de la tensió i la de la intensitat i també el desfasament entre elles. Poden donar-se tres casos bàsics.

En l'estudi del corrent altern, segons com convingui, també es fa servir el concepte d'admitància *Y*, que es defineix com a l'invers de la impedància.

11.1.2 Impedància d'una resistència.

La impedància d'una resistència és igual al seu valor òhmic, R:

$$Z_R=R \tag{4}$$

Observacions: és independent de la freqüència de la tensió, i no hi ha desfasament entre *V* i *I*.

11.1.3 Impedància d'un condensador.

Quan s'aplica una tensió alterna en terminals d'un condensador, *C*, aquest es carrega i descarrega, de forma que hi circula un corrent.

$$I(t)=\frac{d}{dt}Q(t)=C\frac{d}{dt}V(t) \tag{5}$$

Amb el formalisme complex, el càlcul del corrent mostra que

$$I=C\frac{d}{dt}\left(V_0 e^{i\varphi_V} e^{i\omega t}\right)=i\,C\,V_0\,\omega\, e^{i\varphi_V} e^{i\omega t} \tag{6}$$

de forma que la impedància del condensador resulta valer

$$Z_C=\frac{V}{I}=\frac{1}{i\omega C}=\frac{-i}{\omega C}=\frac{1}{\omega C}e^{-i\pi/2} \tag{7}$$

Observacions respecte la impedància d'un condensador:

- Sovint la descripció no es fa en termes de la pulsació, ω, sinó de la freqüència, f ($\omega = 2\pi f$)
- depèn de la freqüència de la tensió (de forma inversament proporcional)
- introdueix un desfasament $\varphi_V-\varphi_I=-\pi/2$ (la intensitat està avançada a la tensió)

11.1.4 Impedància d'una autoinducció.

Quan s'aplica una tensió alterna a una autoinducció, L, entre els seus terminals apareix una força electromotriu induïda (Llei de Henry-Faraday) que fa que la intensitat i la tensió estiguin relacionades per

$$V(t)=\frac{d}{dt}\Phi(t)=L\frac{d}{dt}I(t) \tag{8}$$

Si, expressat en forma complexa, el corrent és $I=I_0 e^{i\varphi_I} e^{i\omega t}$, es dedueix que la tensió val

$$V=L\frac{d}{dt}\left(I_0 e^{i\varphi_I} e^{i\omega t}\right)=i\,L\,I_0\,\omega\, e^{i\varphi_I} e^{i\omega t} \tag{9}$$

i, per tant, la impedància val

$$Z_L=\frac{V}{I}=i\omega L=\omega L e^{i\pi/2} \tag{10}$$

Observacions respecte la impedància d'una autoinducció:

- sovint la descripció no es fa en termes de la pulsació, ω, sinó de la freqüència, f .($\omega = 2\pi f$)
- depèn de la freqüència de la tensió (de forma directament proporcional)
- introdueix un desfasament $\varphi_V-\varphi_I=\pi/2$ (la tensió està avançada a la intensitat)
- s'ha obtingut suposant que la resistència òhmica del fil conductor amb el que s'ha fet el bobinatge és nul·la. A la pràctica, la resistència del bobinatge, $R_{bobinatge}$, és finita, de manera que la impedància d'una bobina real és

$$Z_{real}=R_{bobinat}+i\omega L \tag{11}$$

11.1.5 Impedància de les associacions d'elements de circuit

Els elements de circuit de corrent altern (resistències, condensadors i autoinduccions) es poden connectar entre ells (en sèrie, en paral·lel, ...) i les lleis que governen el càlcul de les impedàncies d'aquestes connexions són les mateixes que les que governen l'associació de resistències en corrent continu, amb la particularitat que les operacions matemàtiques són amb números complexos.

$$Z_{sèrie}=\sum_i Z_i \quad , \quad Z_{paral\cdot lel}=\left(\sum_i Z_i^{-1}\right)^{-1} \tag{12}$$

Un cas particular, important, d'impedància composta és la corresponent a la connexió en sèrie d'un condensador, C, i una autoinducció, L (el bobinatge de la qual té una resistència R):

$$(Z_{RLC})_{sèrie}=Z_{RL}+Z_C=R+i\,L\,\omega-i\frac{1}{\omega\,C} \tag{13}$$

La dependència en freqüència d'aquesta impedància presenta un fenomen de ressonància, que es descriu millor quan s'estudia a partir de l'invers de la impedància (anomenat admitància)

$$(Y_{RLC})_{sèrie}=\frac{1}{(Z_{RLC})_{sèrie}}=\frac{1}{R+i(L\omega-1/\omega C)}=\frac{\omega^2 C^2 R+i\,C\,\omega(1-LC\omega^2)}{(1-\omega^2 LC)^2+\omega^2 R^2 C^2} \tag{14}$$

L'estudi en freqüència de Y_{RLC} mostra que:

- La gràfica $|Y_{RLC}(f)|$ presenta forma de pic, de manera que hi ha una freqüència per a la qual l'admitància és màxima. És la que es coneix com a freqüència de ressonància, f_r.
- A freqüències baixes ($f<f_r$) l'admitància del conjunt és $(Y_{RLC})_{sèrie}\approx Y_C$
- A freqüències altes ($f>f_r$) l'admitància del conjunt és $(Y_{RLC})_{sèrie}\approx Y_L$
- El pic de ressonància pot presentar formes -més o menys- agudes, i aquest grau d'agudesa es mesura mitjançant el *factor de qualitat*: del pic de ressonància

$$Q \;=\; \frac{\omega_r}{\Delta\omega}=\frac{f_r}{\Delta f} \tag{15}$$

on Δf és l'amplada a meitat d'alçada del pic de ressonància.

11.2 Dispositiu experimental

- 1 oscil·loscopi
- 1 generador de tensions sinusoïdals (del que s'utilitzarà la sortida 50Ω)
- 2 multímetres (un funcionant com a voltímetre i l'altre com a amperímetre)
- 1 resistència, R
- 1 condensador, C
- 1 bobina, L, que també presenta una resistència
- 1 placa de connexions
- 1 resistència de valor conegut (R_0=1000 Ω)

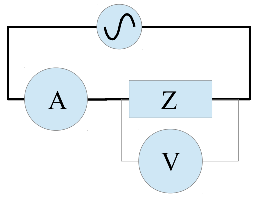


Figura 1: Connexió bàsica per a la mesura de tensió i intensitat en un element de circuit, Z, qualsevol

11.3 Procediment experimental

11.3.1 Impedància d'una resistència, R

En aquest apartat s'estudiarà la proporcionalitat que, en corrent altern, hi ha entre la intensitat, I, i la tensió, V, en una resistència i com aquesta proporcionalitat no depèn de la freqüència, f, de la tensió. Munteu el circuit de la figura 1 on, com a element Z, hi connectareu la resistència, R=1000 Ω .

Començant per *f*≈100Hz, i fins a *f*≈20000Hz, i a raó de tres freqüències per dècada (aproximadament, seqüència 1, 2, 5 ,10...), preneu mesures de *f*, *V* i *I*. S'aconsella, a més, que hi hagi varietat en les amplituds de les tensions aplicades entre *V*=2 i *V*=6V. Elaboreu una taula de valors (*f*, *V/I*).

11.3.2 Impedància d'un condensador, C

Munteu el circuit de la figura 1 on, com a element Z, hi connectareu el condensador, C. Repetiu les mesures de freqüència, tensió i intensitat. Elaboreu una taula de valors (*f*, V/I).

11.3.3 Impedància d'una autoinducció, L

Munteu el circuit de la figura 1 on, com a element Z, hi connectareu l'autoinducció, L. Repetiu les mesures de freqüència, tensió i intensitat. Elaboreu una taula de valors (*f*, V/I).

11.3.4 Admitància d'una connexió LC en sèrie

Munteu el circuit de la figura 1 on, com a element Z, hi connectareu la composició en sèrie del condensador, C, i l'autoinducció, L. L'admitància d'aquesta composició LC depèn molt de la freqüència de la tensió (figura 2), per la qual cosa caldrà prendre més densitat de mesures on l'admitància variï molt amb la freqüència. Per a optimitzar el procés de mesura cal que:

- Trobeu la freqüència de ressonància. Per a fer-ho, cal que seleccioneu una tensió qualsevol en el rang central del comandament d'amplitud del generador i, variant la freqüència, feu que la tensió a Z sigui mínima. Anoteu aquesta freqüència i, dels valors de *V* i *I*, calculeu *Y=I/V*
- Augmenteu lleugerament la freqüència fins que l'admitància hagi disminuït significativament (la figura mostra ≈10%). Anoteu la freqüència, i l'admitància (*Y=I/V*) del circuit per a aquesta nova freqüència
- Repetiu el procés d'augmentar la freqüència i prendre nota de la corresponent admitància (*Y=I/V*). La figura 2 mostra una disposició aproximada de com poden quedar repartits els punts obtinguts sobre la corba de ressonància. La figura també mostra com, en allunyar-vos de la ressonància, els augments de freqüència poden fer-se de forma més espaiada (i ser semblants als que s'han aplicat, per exemple, a l'apartat 11.3.3)
- Un cop obtingudes les admitàncies per a freqüències superiors a la de ressonància, torneu a la freqüència de ressonància i repetiu el procediment dels dos punts anteriors però disminuint la freqüència.

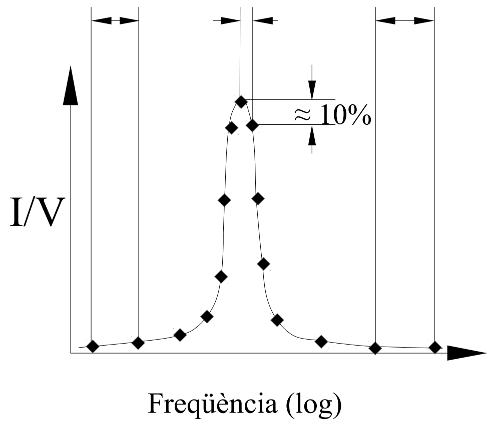


Figura 2: Valor del quocient I/V en funció de la freqüència en la zona on es produeix el pic de ressonància. A la figura es mostra com els intervals entre freqüències poden ser més grans per a aquelles freqüències allunyades de la ressonància.

11.3.5 Desfasaments entre tensió i intensitat a les impedàncies

En aquest apartat s'estudiarà quins són els desfasaments entre intensitat i tensió per a cada una de les quatre impedàncies estudiades als apartats anteriors. Munteu el circuit de la figura 3(b) on, com a element Z, hi connectareu la resistència R. Feu que la freqüència del generador sigui ≈ 1000 Hz.

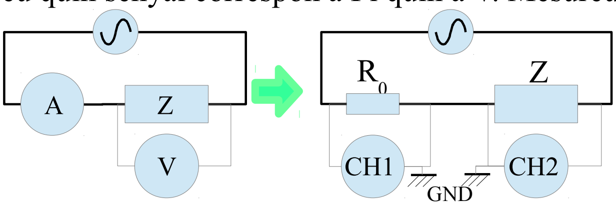
Visualitzeu a la pantalla de l'oscil·loscopi les tensions que mesura cada canal. En la configuració de l'oscil·loscopi, invertiu un dels dos canals. Aquesta canvi de signe es fa per a compensar el causat per la forma amb la que es mesuren les tensions, amb el seu zero (GND, connectors negres de les sondes) al punt on es connecten R_0 i Z (Figura 3).

El canal 2 mesura directament la tensió, V, en l'element Z que s'està estudiant, mentre que el canal 1 mesura la tensió a R_0, que està en fase amb la intensitat, I, que circula per l'element Z. Així doncs, el muntatge permet de mesurar, per a Z, el desfasament entre V i I, és a dir, la fase de la impedància Z. Comproveu que, per al cas Z=R, V i I estan en fase. Preneu una imatge de la pantalla de l'oscil·loscopi sobre la que indicareu quin senyal correspon a I i quin a V. Mesureu quin és el valor del desfasament i indiqueu quin dels dos senyals (V o I) és el que està avançat (en el temps). Varieu la freqüència i comproveu que aquest desfasament no varia.

Repetiu el muntatge de la figura 3(b) per a una impedància capacitiva ($Z=Z_C$). Preneu una imatge de la pantalla de l'oscil·loscopi sobre la que indicareu quin senyal correspon a I i quin a V. Mesureu quin és el valor del desfasament i indiqueu quin dels dos senyals (V o I) és el que està avançat (en el temps). Varieu la freqüència i comproveu que aquest desfasament no varia.

Repetiu el muntatge de la figura 3(b) per a una impedància inductiva ($Z=Z_L$). Preneu una imatge de la pantalla de l'oscil·loscopi sobre la que indicareu quin senyal correspon a I i quin a V. Mesureu quin és el valor del desfasament i indiqueu quin dels dos senyals (V o I) és el que està avançat (en el temps). Varieu la freqüència i comproveu que aquest desfasament no varia.

Repetiu el muntatge de la figura 3(b) però fent que la impedància, Z, estigui constituïda per la composició en sèrie de C i L. Observeu quin és el desfasament (φ_V-φ_I) a freqüències baixes ($f \ll f_r$), quin és a freqüències altes ($f \gg f_r$) i que, a $f = f_r$, V i I estan en fase.



(a) (b)

Figura 3: Connexió d'un oscil·loscopi per a mesurar el desfasament entre intensitat i tensió en una impedància Z. La funció del voltímetre (circuit a) la fa el canal 2 de l'oscil·loscopi (circuit b). La funció de l'amperímetre (circuit a) la fa la connexió en paral·lel del canal 1 de l'oscil·loscopi amb una resistència coneguda (típicament R_0 = 1000Ω) (circuit b).

11.4 Realització de l'informe

(a) En una mateixa gràfica, de mòdul d'impedància en funció de la freqüència, representeu els valors obtinguts a 11.3.1, 11.3.2 i 11.3.3. Representeu la inversa de la impedància capacitiva en funció de la freqüència. Feu els ajustos matemàtics que calguin per a obtenir els valors de R, L i C. Compareu-los amb els valors nominals dels diferents elements.

(b) En una gràfica del mòdul de l'admitància en funció de la freqüència (totes dues magnituds en escala logarítmica) representeu els valors obtinguts a 11.3.4. Obteniu, a partir de la gràfica, la freqüència de ressonància i el factor de qualitat del circuit ressonant. Calculeu el valor de la resistència de la bobina a partir del valor de l'admitància a la freqüència de ressonància.

(c) En el mateix gràfic de (b) afegiu-hi els valors de la admitància en funció de la freqüència Z(*f*) de la resistència (11.3.1), el condensador (11.3.2) i l'autoinducció (11.3.3). Comproveu que s'acompleixen les aproximacions descrites a 11.1.5 per a freqüències llunyanes a la freqüència de ressonància.

(d) Presenteu les imatges de la pantalla de l'oscil·loscopi obtingudes a 11.3.5, indicant en cadascuna quin senyal correspon a la intensitat i quin a la tensió. Indiqueu, en cada cas (R, L i C), el valor de $\varphi_V - \varphi_I$.

(e) Presenteu imatges de la pantalla de l'oscil·loscopi que mostrin el desfasament entre I i V a freqüències baixes ($f < f_r$) i freqüències altes ($f < f_r$). Indiqueu, el valor de $\varphi_V - \varphi_I$ en els dos casos.

(f) Representeu, en el pla complex, la impedància de la composició LC sèrie, a tres freqüències:

- $f = f_{\mathrm{r}}$
- freqüències baixes ($f < f_{\mathrm{r}}$)
- freqüències altes ($f > f_{\mathrm{r}}$)