

# 10 TENSIONS ALTERNES: AMPLITUD, VALOR EFICAÇ, FREQUÈNCIA, DESFASAMENT. SUMA DE TENSIONS.

**Resum.** En aquest treball de laboratori s'estudiarà, en primer lloc, la mesura dels diferents paràmetres d'una tensió alterna sinusoidal: amplitud, freqüència i valor eficaç. A continuació s'analitzarà quin és el resultat de sumar dues tensions sinusoidals de diferent freqüència: forma de la dependència temporal i valor eficaç. Finalment s'examinarà el cas de dues tensions de la mateixa freqüència i desfasades entre sí: s'identificarà quina és la que està avançada, es quantificarà el valor del desfasament i s'estudiarà quina és la tensió que en resulta de sumar-les.

## 10.1 Fonament

### 10.1.1 Tensions alternes

Una tensió alterna sinusoidal ve caracteritzada per la seva amplitud,  $V_0$ , la seva freqüència,  $\nu$ , i, en general, per un cert desfasament,  $\varphi_\nu$ , respecte d'una altra tensió que es pren com a referència:

$$V(t) = V_0 \cos(2\pi\nu t + \varphi_\nu) = V_0 \cos\left(2\pi\frac{t}{T} + \varphi_\nu\right) \quad (1)$$

Per a facilitar el tractament matemàtic, s'acostuma a fer us de la fórmula de Euler, de forma que les funcions que es manegen no són funcions sinusoidals, sinó exponencials complexes.

$$V(t) = V_0 \cos(2\pi\nu t + \varphi_\nu) = \Re[V_0 e^{i\varphi_\nu} e^{i2\pi\nu t}] \quad (2)$$

Les mesures de l'amplitud, s'acostumen a expressar en termes del valor eficaç, o valor quadràtic mitjà,  $V_{RMS}$ , que és el valor que normalment proporcionen els voltímetres d'alterna.

$$V_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T V^2(t) dt} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \quad (3)$$

Una eina molt útil en fer l'estudi de les tensions sinusoidals és el diagrama de fasors en el pla complex (figura 1), on les tensions:

- es representen com a vectors (se'ls anomena *fasors*)
- el mòdul del fasor és l'amplitud
- giren en sentit antihorari amb una velocitat angular igual a la pulsació,  $\omega$ . (en un temps  $dt$ , la seva fase s'ha incrementat en  $d\varphi = \omega dt$ )

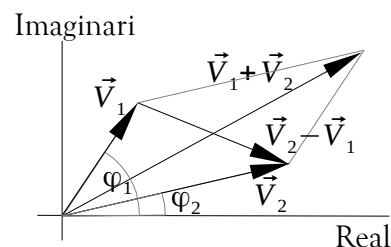


Figura 1: Representació de dos fasors de tensió, la seva suma i la seva diferència. El conjunt gira en sentit contrari a les agulles del rellotge, de forma que les dependències temporals (sinusoidals) són les projeccions dels fasors a l'eix real

- les dependències temporals de les tensions,  $V(t)$ , són la projecció dels fasors sobre l'eix real
- la suma de tensions es tracta, de manera molt simple, com a suma de vectors.

### 10.1.2 Mesura del desfasament entre tensions

La diferència de fase,  $\varphi$ , entre dues tensions de la mateixa freqüència es pot determinar si es visualitzen els dos senyals a la pantalla d'un oscil·loscopi i es mesuren el temps d'avançament  $\Delta t$  i el període  $T$ . Per a efectuar aquestes mesures és adequat de fer servir els cursors de temps (figura 2).

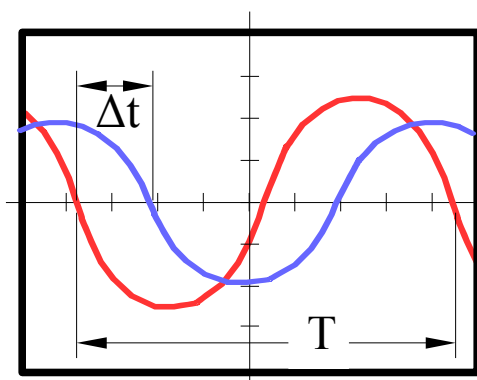


Figura 2: Pantalla d'oscil·loscopi on es mostren dues tensions sinusoidals de la mateixa freqüència. Els cursors verticals (de temps) faciliten les mesures del període,  $T$ , i del retard,  $\Delta t$ , per al càlcul del desfasament.

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi (\Delta t / T) \quad (4)$$

### 10.1.3 Suma (diferència) de tensions sinusoidals d'igual freqüència

La suma (diferència) de dues tensions sinusoidals d'amplitud respectives  $V_1$  i  $V_2$ , de la mateixa freqüència,  $\nu$ , però amb un cert desfasament entre elles, ve donada per

$$V_{\text{sum}}(t) = V_1(t) \pm V_2(t) = \Re \left[ \left( V_1 e^{i\varphi_1} \pm V_2 e^{i\varphi_2} \right) e^{i2\pi\nu t} \right] \quad (5)$$

El resultat és una tensió de freqüència  $\nu$ , i amb una amplitud que compleix:

$$V_{\text{sum}}^2 = V_1^2 + V_2^2 \pm 2V_1V_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (6)$$

Aquesta expressió s'obté de (5) i també de l'aplicació del teorema del cosinus al paral·lelepípede que, en el pla complex, formen els fasors de  $V_1(t)$  i  $V_2(t)$  (figura 1).

### 10.1.4 Suma (diferència) de tensions sinusoidals de diferent freqüència

La suma (diferència) de dues tensions de diferent freqüència ve donada per

$$V_{\text{sum}}(t) = V_1(t) \pm V_2(t) = V_1 \cos(\omega_1 t) \pm V_2 \cos(\omega_2 t) = \Re \left[ V_1 e^{i\omega_1 t} \pm V_2 e^{i\omega_2 t} \right] \quad (7)$$

Si les freqüències són diferents, l'amplitud mitjana (calculada en un temps molt llarg, comparat amb els períodes de les tensions) de la tensió suma (diferència) compleix:

$$|\bar{V}_{\text{sum}}|^2 = |\bar{V}_{\text{dif}}|^2 = |\bar{V}_1|^2 + |\bar{V}_2|^2 \quad (8)$$

## 10.2 Dispositiu experimental

- 1 multímetre digital actuant com a voltímetre AC, que proporcionarà el valor RMS de la diferència entre les tensions que tingui aplicades a la seva entrada.
- 1 placa de connexions.
- 1 oscil·loscopi de dos canals (Figura 3)
- 1 generador de funcions que permet generar 2 tensions sinusoidals (Figura 4).
- Cables de connexió

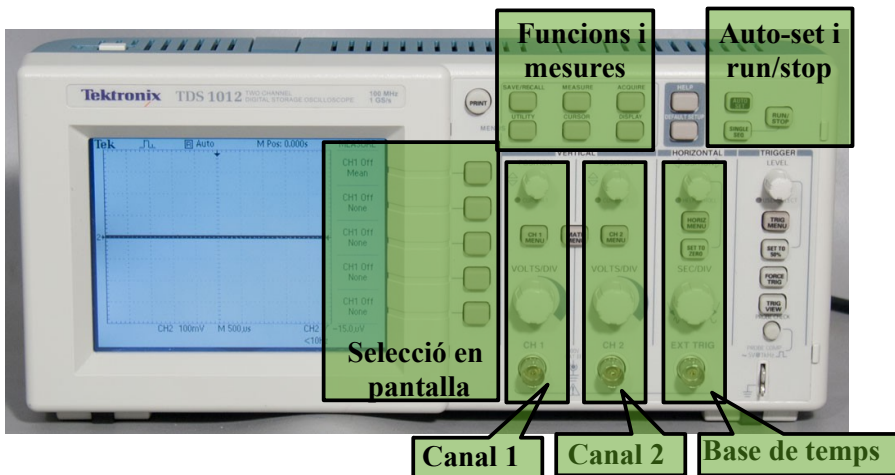


Figura 3: Oscil·loscopi de dos canals, on s'hi han indicat les àrees de comandament de cada canal, la base de temps, els pulsadors per a fer la selecció a la pantalla, la zona on se seleccionen les mesures i la posició dels comandaments auto-set i run/stop, per a simplificar el maneig de l'oscil·loscopi.



Figura 4: Generador doble de tensions sinusoidals. Cadascuna de les sortides es pot configurar en amplitud, freqüència i desfasament i, a més, permet de combinar-les amb operacions matemàtiques.

## 10.3 Procediment experimental

### 10.3.1 Voltatge altern: amplitud, freqüència, valor eficaç.

Engueu el generador de funcions i l'oscil·loscopi.

Connecteu el canal 1 l'oscil·loscopi directament a una de les sortides del generador (unint els connectors negres entre si i els connectors vermells entre si).

Ajustant els elements de configuració de l'oscil·loscopi, feu que a la pantalla es mostri una imatge semblant a la de la figura 5 (aproximadament un període ben distribuït, en amplitud i temps).

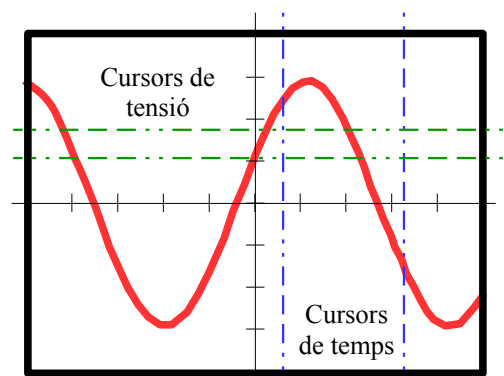


Figura 5: Pantalla de l'oscil·loscopi mostrant una tensió sinusoidal. La base de temps (time/div) i el guany en tensió (Volt/div) són els adequats per a mostrar un període ben distribuït a la pantalla. La figura també mostra els dos cursors de temps (verticals) i els dos cursors de tensió (horizontals).

Varieu l'amplitud de la tensió que subministra el generador. Observeu el seu efecte a la pantalla.

Feu aparèixer en pantalla de l'oscil·loscopi els cursors de tensió (figura 5). Desplaceu un d'ells al màxim,  $V_{MAX}$ , i l'altre al mínim,  $V_{MIN}$ , de la tensió sinusoidal. Preneu nota dels valors de  $V_{MAX}$ ,  $V_{MIN}$ , i de l'amplitud,  $V_0 = (V_{MAX} - V_{MIN})/2$ .

Feu aparèixer a la pantalla de l'oscil·loscopi els cursors de temps (figura 5). Desplaceu-los a dos màxims consecutius de la tensió sinusoidal. Anoteu el valor de la diferència de temps (igual al període,  $T$ , de la tensió). A partir d'aquest valor, calculeu la freqüència,  $\nu$ , de la tensió.

Preneu una imatge de la pantalla de l'oscil·loscopi amb la tensió sinusoidal amb la que heu fet les mesures.

Comproveu que, configurant la pantalla de mesures de l'oscil·loscopi, aquest pot proporcionar la tensió pic a pic, el període i la freqüència.

Sense desmuntar el circuit de l'aparat anterior, afegiu el multímetre (en mode voltímetre AC) de forma que el generador, el multímetre i el canal 1 de l'oscil·loscopi estiguin tots tres en paral·lel (figura 6). Anoteu el valor  $V_{RMS}$  de la tensió que mostra el multímetre i relacioneu-lo amb l'amplitud que heu mesurat mitjançant l'oscil·loscopi.

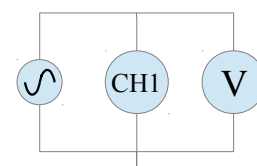


Figura 6: Connexió d'un canal d'oscil·loscopi i un voltímetre a la sortida d'un generador

Varieu la freqüència del generador i observeu que el valor mostrat pel multímetre no varia. Desmunteu el circuit.

### 10.3.2 Mesura de desfasaments i suma de tensions desfasades.

Connecteu els dos canals de l'oscil·loscopi a les dues sortides del generador, tal com mostra la figura 7a). Assegureu-vos que el terra de l'oscil·loscopi i els del generador estan connectats al mateix punt.

Feu que totes dues sortides del generador tinguin la mateixa amplitud i freqüència, i que les dues tinguin fase zero.

Mitjançant el comandament MATH MENÚ, feu que l'oscil·loscopi mostri la suma de tensions. Mesureu les amplituds de cada tensió individual i la de la suma, i comproveu que estan relacionades per (6). Preneu una imatge de la pantalla de l'oscil·loscopi.

Utilitzant el voltímetre AC, mesureu cadascuna de les tensions per separat i el valor de la *diferència*. Per tal i com estan connectades les dues senyals, amb el voltímetre només és possible mesurar-ne la diferència. Comproveu que els valors obtinguts compleixen l'equació (6).

Varieu la fase d'una de les sortides i observeu com això fa variar la imatge que mostra l'oscil·loscopi. Augmenteu la fase fins a  $180^\circ$ . Feu que l'oscil·loscopi en faci la suma. Preneu una imatge de la pantalla de l'oscil·loscopi i repetiu les mesures amb l'oscil·loscopi i el voltímetre AC. Comproveu que els valors obtinguts compleixen l'equació (6).

Disminuïu ara la fase de la sortida fins que la pantalla de l'oscil·loscopi mostri una imatge semblant a la de la figura 2.

Identifiqueu i argumenteu quina de les dues tensions és la que està avançada respecte l'altra (tingueu present que en la pantalla s'hi estan representant les dependències temporals de les tensions). Feu que a la pantalla de l'oscil·loscopi apareguin els cursors de temps. Utilitzeu-los per a mesurar els valors de  $\Delta t$  i  $T$  (figura 2). Aplicant l'equació (4), calculeu quin és el desfasament, en radi-

ans, entre les dues tensions.

Feu que l'oscil·loscopi en faci la suma. Preneu una imatge de la pantalla de l'oscil·loscopi i repetiu les mesures amb l'oscil·loscopi i el voltímetre AC. Comproveu que els valors obtinguts compleixen l'equació (6).

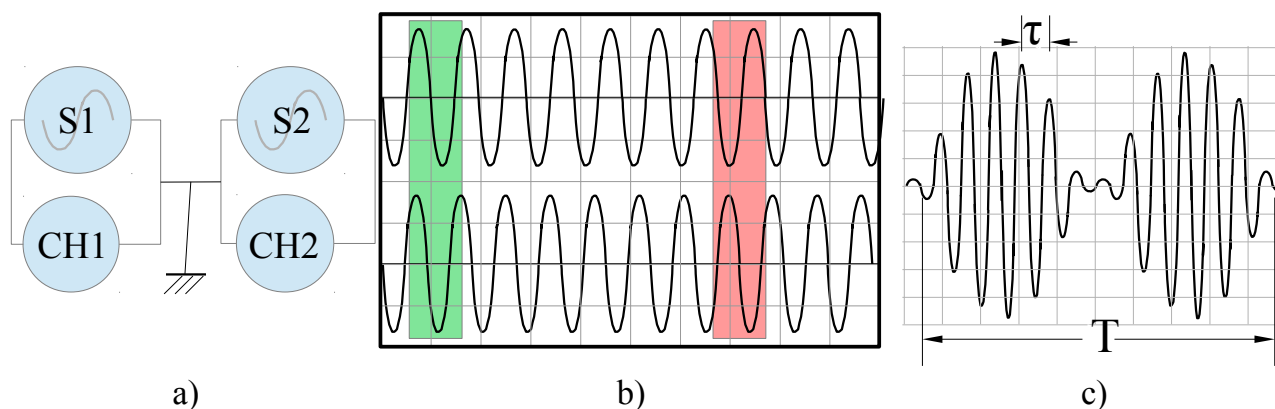


Figura 7: a) Connexió dels dos canals de l'oscil·loscopi, CH1 i CH2, per a visualitzar les tensions que proporcionen les sortides S1 i S2. b) Pantalla d'oscil·loscopi on es mostren dues tensions sinusoidals de freqüència semblant. S'hi observa que hi ha intervals de temps (assenyalats en verd) on coincideixen els màxims (i els mínims) de les dues tensions, i d'altres intervals (assenyalats en vermell) on els màxims d'una de les tensions coincideixen amb els mínims de l'altra. Els cursors verticals (de temps) faciliten les mesures dels períodes. c) Suma de dues tensions sinusoidals de la mateixa amplitud i freqüència semblant.

### 10.3.3 Suma de tensions de freqüència similar.

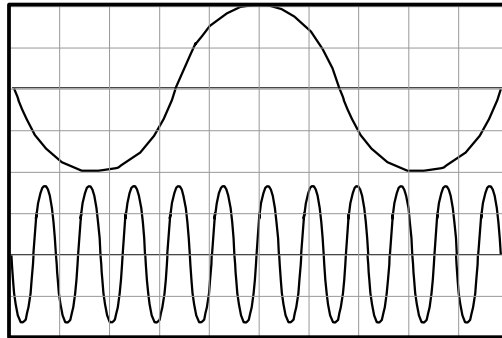
Amb el mateix muntatge que en l'apartat 10.3.2, efectueu els següents ajustos i operacions:

- Ajusteu les freqüències de les tensions a 9 i 10 kHz, aproximadament.
- Feu que les amplituds de les dues tensions siguin iguals (5 V, aproximadament).
- Premeu el comandament RUN/STOP de l'oscil·loscopi per tal de que la pantalla mostri una imatge fixa semblant a figura 7b).
- Fent servir els cursors de temps, mesureu els períodes,  $T_1$  i  $T_2$ , de les dues tensions. Calculeu les freqüències corresponents:  $f_1=1/T_1$  i  $f_2=1/T_2$
- Mitjançant el comandament MATH MENÚ, feu que l'oscil·loscopi mostri la suma de tensions. La imatge ha de ser semblant a la figura 7c). Preneu una imatge de la pantalla de l'oscil·loscopi. Measureu  $\tau$  i calculeu  $f_\tau=1/\tau$ . Measureu  $T$  i calculeu  $f_T=1/T$ . Compareu aquests valors amb  $(f_1+f_2)/2$  i  $(f_1-f_2)/2$ .
- Utilitzant el voltímetre AC, mesureu cadascuna de les tensions per separat i el valor de la diferència. Comproveu que els valors obtinguts compleixen l'equació (8).

### 10.3.4 Suma de tensions de freqüència molt diferent.

Varieu la freqüència d'un dels generadors per tal que les freqüències siguin, aproximadament, de 1 kHz i 10 kHz. La imatge de la pantalla de l'oscil·loscopi ha de ser semblant a la que mostra la figura 8. Feu que l'oscil·loscopi mostri la suma entre les tensions i preneu una imatge de la pantalla de l'oscil·loscopi.

Utilitzant el voltímetre AC, mesureu cadascuna de les tensions per separat i el valor de la *diferència*. Comproveu que els valors obtinguts compleixen l'equació (8).



*Figura 8: Pantalla d'oscil·loscopi on es mostren dues tensions sinusoidals de diferent freqüència. Els cursors verticals (els de temps) permeten de fer les mesures dels períodes.*

#### **10.4 Realització de l'informe**

- (a) Presenteu les dades i resultats obtinguts.
- (b) Dibuixeu en el pla complex les tensions  $V_1$ ,  $V_2$ , i  $V_{\text{sum}}$ , tenint en compte els mòduls i els desfasaments obtinguts a 10.3.2.