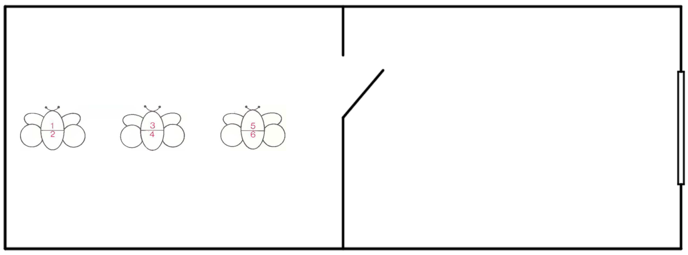
Las tres avispas

En la habitación de la izquierda hay tres avispas. La puerta de la habitación de al lado está abierta. Una avispa vuela a través de la puerta abierta cada minuto. El azar decide qué avispa cambia de habitación. Tiramos el dado y ponemos en la otra habitación la avispa que tiene el número que ha salido en su espalda. Si la avispa está en la habitación de la izquierda, pasa a la derecha y viceversa. Esto continúa hasta que todas las avispas están en la habitación correcta. Después ya podemos cerrar la puerta y nos hemos deshecho de todas las avispas.



Queremos saber cuánto tiempo se tarda de media hasta que todas las avispas estén en la habitación contigua.

Experimentación:

Conjeturas y formas de abordaje en el aula:

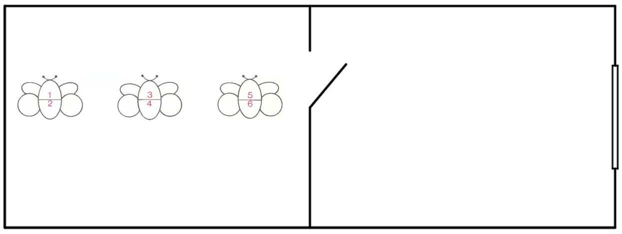
Generamos preguntas:

Extraído del Manual de La Caja de Varga (página 14).

Segunda parte del taller: profundización (25 minutos)

Resituación del problema.

Recordemos el enunciado
En la habitación de la izquierda hay tres avispas. La puerta de la habitación de al lado está abierta. Una avispa vuela a través de la puerta abierta cada minuto. El azar decide qué avispa cambia de habitación. Tiramos el dado y ponemos en la otra habitación la avispa que tiene el número que ha salido en su espalda. Si la avispa está en la habitación de la izquierda, pasa a la derecha y viceversa. Esto continúa hasta que todas las avispas están en la habitación correcta. Después ya podemos cerrar la puerta y nos hemos deshecho de todas las avispas.



Queremos saber cuánto tiempo se tarda de media hasta que todas las avispas estén en la habitación adecuada.

¿Cómo ha ido la experimentación realizada en la primera parte?

¿Qué conjeturas hemos hecho?

¿Qué preguntas se nos han planteado y han quedado "aparcadas"?

¿Es posible que las avispas "salgan" en 1 o 2 tiradas?
¿Es posible que las avispas "salgan" en 3 tiradas?
¿Es posible que las avispas "salgan" en 4 tiradas? ¿En 5? ¿En 6?
¿Se observa alguna regularidad?

El abordaje del problema desde un punto de vista matemático puede hacerse pensando en que podemos tener cuatro configuraciones en cuánto a la distribución de las avispas:

C_{30}: 3 avispas en la primera habitación, 0 en la segunda. Esta configuración, en particular, se da en la posición inicial, pero puede volverse a ella a lo largo del proceso.

C_{21}: 2 avispas en la primera habitación, 1 en la segunda.

C_{12}: 1 avispa en la primera habitación, 2 en la segunda.

C_{03}: 0 avispas en la primera habitación, 3 en la segunda. Esta configuración indica el final del proceso

En los apartados siguientes nos será útil este planteamiento.

Mundo de las simulaciones (aspectos informáticos)

El proceso de simulación que hemos realizado "manualmente" también puede realizar-se por medios computacionales:

Simulación con GeoGebra (Jordi)
https://www.geogebra.org/m/qxtqkuen

Simulación con Snap (Raül)
https://snap.berkeley.edu/project?username=raulf&projectname=3bee
https://snap.berkeley.edu/project?username=raulf&projectname=3bee_ampliado

Simulación con Phyton (Adrià de Batlle)
https://trinket.io/python/a7b0829a64

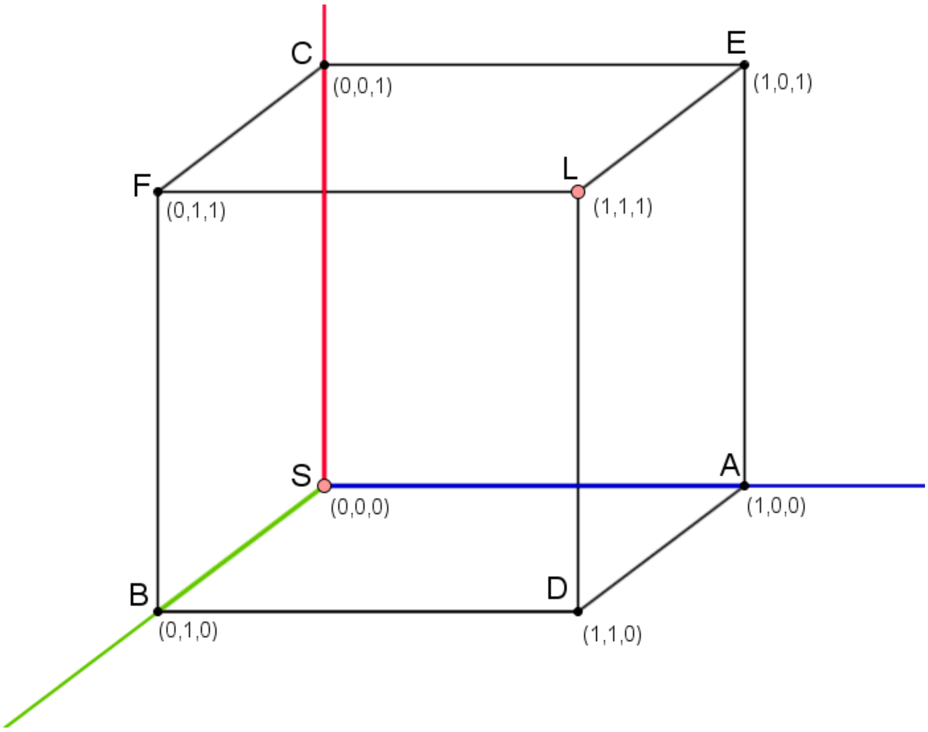
Mundo de los modelos: actividades alternativas donde subyace el mismo modelo probabilístico

En total mencionaremos cuatro contextos, cuatro problemas, que corresponden al mismo modelo probabilístico:

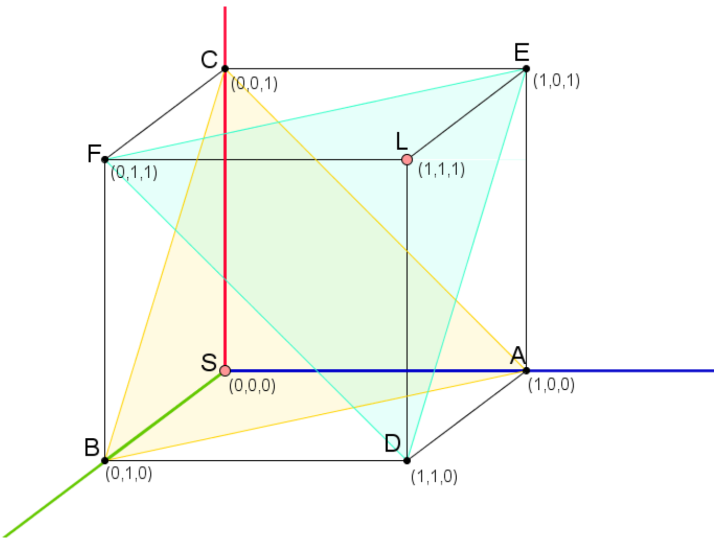
1. **Replanteemos el problema de las avispas pero formulándolo a través de un modelo geométrico.**
   Indicamos por "0" estar en la habitación de la izquierda e indicamos por "1" estar en la habitación de la derecha. Tomanos ternas de tres dígitos 0 o 1 que indiquen ordenadamente la posición de la primera avispa, la de la segunda y la de la tercera. Por exemplo:
   La terna (0,0,0) indicará que las tres avispas están en la habitación de la izquierda
   La terna (0,0,1) indicará que la primera y la segunda avispas están en la habitación de la izquierda y la tercera avispa está en la habitación de la derecha.
   La terna (1,0,1) indicará que la primera y la tercera avispas están en la habitación de la derecha y la segunda avispa está en la habitación de la izquierda.
   La terna (1,1,1) indicará que las tres avispas están en la habitación de la derecha

   Consideremos un sistema de coordenas en el espacio y un cubo cuyo lado mide la unidad (véase figura) con un vértice (S) situado en el origen y con las tres aristas que concurren en él situadas sobre los ejes de coordenadas en el sentido positivo (coloreados de azul, verde y rojo para indicar la primera coordenada, la segunda y la tercera respectivamente). Anotamos las coordenadas de cada vértice y observamos que cada vértice representa una distribución de las avispas en las habitaciones.

   Cada vez que tiramos el dado tan solo una avispa cambia de habitación de manera que se pasa de un vértice a un vértice contiguo. Si sale 1 o 2 solo cambia la primera coordenada, si sale 3 o 4 solo cambia la segunda coordenada, si sale 5 o 6 solo cambia la tercera coordenada. Se parte del punto S (0,0,0), salida, y se acaba en el punto L (1,1,1), llegada.



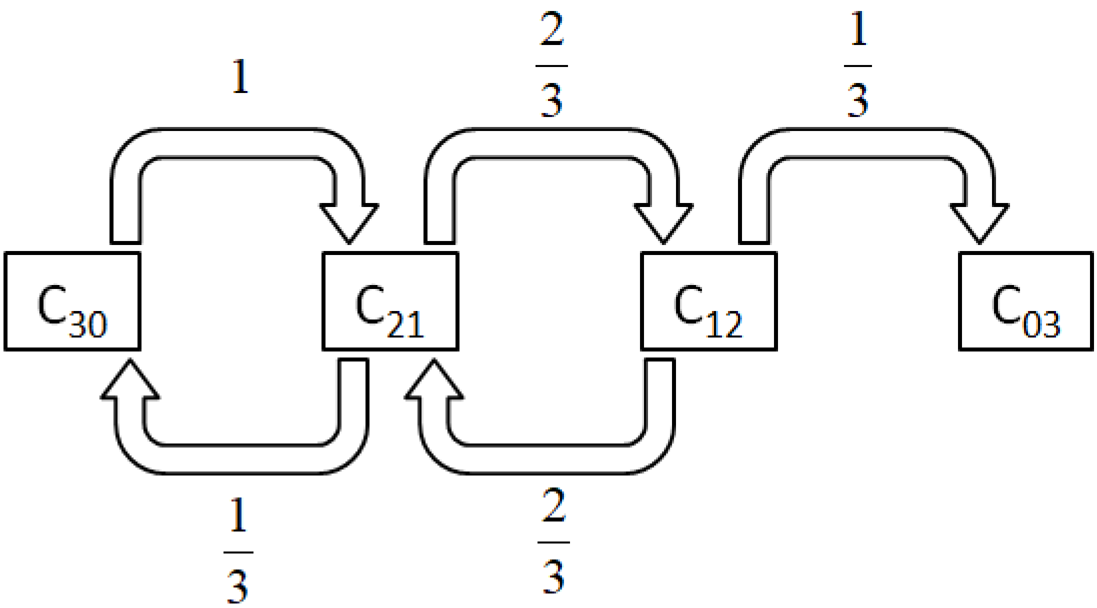
Los movimientos sobre este cubo representan cambios en la distribución de las avispas en las dos habitaciones.
Esta es pues una bonita representación geométrica del problema de las tres avispas. Obsérvese que el vértice S corresponde a la configuración que hemos indicado como C_{30}, que los vértices A, B y C corresponden a la configuración C_{21} (véase el triángulo naranja de la imagen siguiente), que los vértices D, E y F corresponden a la configuración C_{12} (véase el triángulo azul en la imagen siguiente) y que el vértice L corresponde a la configuración que hemos indicado por C_{03}.



En cada movimiento de las avispas, en el fondo se produce un salto entre una configuración y otra:

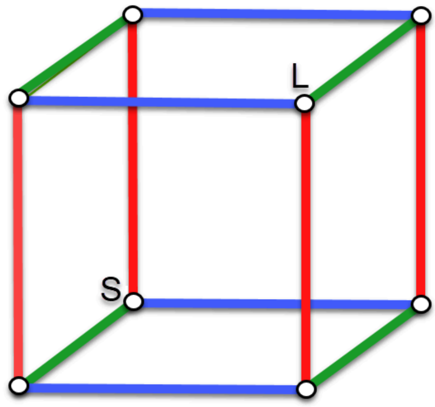
- Si estamos en S (C_{30}) culaquier moviento nos lleva a un vértice del triangulo amarillo (C_{21}).
- Si estamos en un vértice del triángulo amarillo (C_{21}) una arista nos lleva a S (C_{30}) y dos aristas nos llevan a vértices del triángulo azul (C_{12}).
- Si estamos en un vértice del triángulo azul (C_{12}) una arista nos lleva a L(C_{03}) y dos aristas nos llevan a vértices del triángulo naranja (C_{21}).
- Si estamos en L (C_{03}) hemos llegado al final, tenemos las tres avispas en la habitación de la derecha.

Estas consideraciones nos permiten hacer un esquema con los saltos entre configuraciones y sus probabilidades:

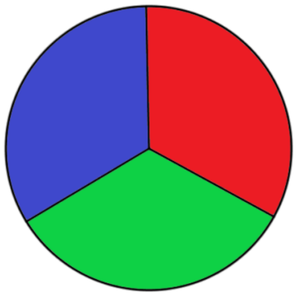


Este esquema coincide perfectamente con las consideraciones que se han hecho en el apartado de aspectos matemáticos.

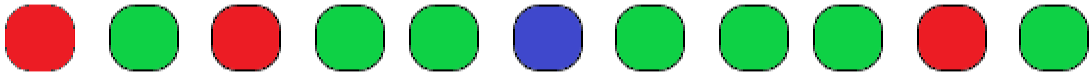
2. **El problema del escarabajo moviéndose por un cubo.**
   Un escarabajo se mueve por las aristas de un bonito cubo de alambre con aristas pintadas de colores como el de la figura:



Comienza su recorrido en el vértice S y necesita un minuto para recorrer una arista. Cuando llega a un vértice, elige aleatoriamente una de las tres aristas que concurren en él. Lo hace tirando una ruleta equilibrada como la de la figura:
NOTA: en caso de no tener ruletas físicas, siempre podemos hacer uso de los simuladores que nos ofrece polypad.



Así se va desarrollando su paseo por el cubo. Sin embargo hay una peligrosa particularidad: si llega al vértice L , se lo comerá un pájaro que le está esperando allí. Nos preguntamos cuál será la esperanza de vida de este escarabajo. Por ejemplo la obtención de la siguiente secuencia de colores,



llevará al escarabajo al vértice L en 11 minutos, con la fatal consecuencia que conlleva.

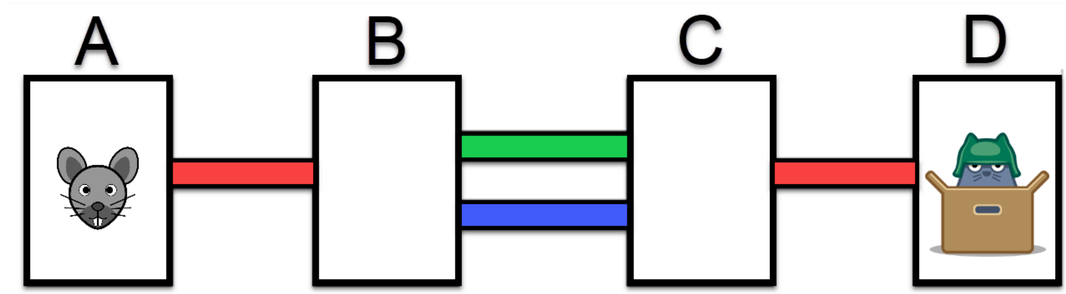
Será interesante que los alumnos, trabajando en parejas, simulen los movimientos del escarabajo sobre un tablero de juego que reproduzca el dibujo del cubo anterior.

Cada pareja deberá disponer de una ruleta de tres colores y de una ficha para indicar la posición del escarabajo. Se partirá de la posición S y se irán recorriendo aristas hasta llegar a la posición L que indicará el final de la vida del escarabajo. Los alumnos deberán contar cuántos minutos ha tardado el escarabajo en ir desde S hasta L (recordemos que cada arista representa un minuto de trayecto). Cada pareja hará varias veces este proceso y finalmente se hará el promedio de los tiempos obtenidos por todas las parejas del grupo.

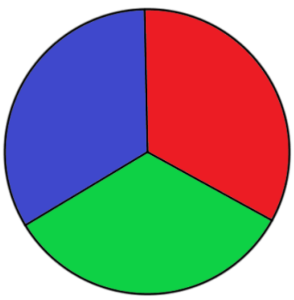
Se obtendrá un tiempo de aproximadamente 10 minutos.
Obsérvese que se trata del mismo modelo probabilístico que el del problema de las avispas.

3. **El problema del ratón y el gato.**

En una madriguera hay un conjunto de cavidades (A, B, C y D) y de caminos entre ellos, pintados de bonitos colores, como indica la figura:



En la cavidad A hay un ratón y en la D se ha infiltrado un gato. El ratón es muy inquieto y cada minuto cambia de cavidad recorriendo un único tramo. Si la cavidad en la que se encuentra tiene varios posibles caminos, escoge al azar uno de ellos haciendo girar la ruleta equilibrada de la imagen y escogiendo el camino del color que haya salido en la ruleta.

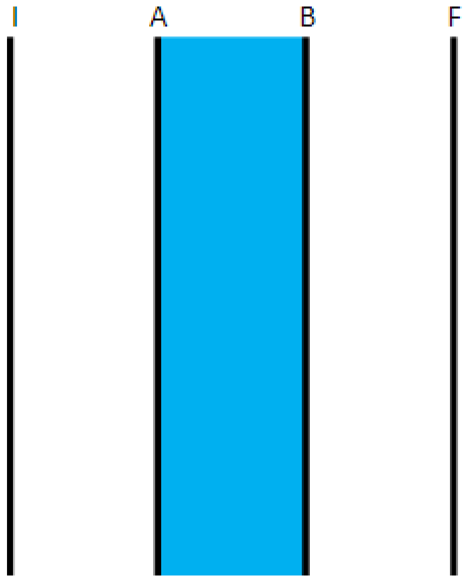


Así si está en A, al cabo de un minuto estará en B. Para salir de B tirará la ruleta y escogerá el camino del color que le salga, de manera que dependiendo de la suerte, después de otro minuto, estará en A o en C. Y así sucesivamente. El ratón no sabe que en D le espera un desagradable encuentro.
¿Podemos asegurar que, en algún momento, llegará a D?
¿Podría ser que no llegara nunca?
¿Si sale de A, cuántos minutos de vida estimarias que le quedan al ratón?

Vamos a explorar la situación a través de un “juego - simulador”. Trabajaremos en parejas. Cada pareja tendrá un tablero como el de la primera imagen de este apartado, una ficha que señalará la posición del ratón y una ruleta como la de la segunda imagen de este apartado. Se colocará la ficha en A y se irán contando los movimientos del ratón. Sin duda el primer movimiento consistirá en pasar de A a B por el pasillo rojo. Para determinar el segundo movimiento tiraremos la ruleta: si sale rojo volveremos a A, si sale verde o azul saltaremos a C y así sucesivamente hasta que se produzca el terrible encuentro o nos cansemos de jugar… Apuntaremos después de cuántos movimientos se ha llegado a D y volveremos a “jugar” partiendo de nuevo de la posición A. Después de un tiempo de hacer simulaciones calcularemos el promedio de los tiempos obtenidos por los diversos equipos (recordemos que el número de movimientos coincide con el número de minutos de vida itinerante del ratón). Así obtendremos una buena estimación de la “esperanza de vida” de nuestro ratón. Si se hace en muchos casos obtendremos un número próximo a 10.

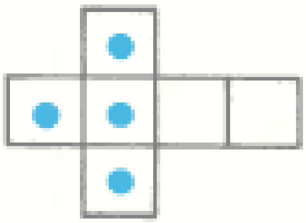
4. El problema que se plantea en el siguiente role-play

Hay en el suelo 4 líneas “verticales” separadas exactamente un paso: I (Inicio), A, B y F (Final) como indica la imagen. La franja entre A y B se indicará en azul.



Los participantes, inicialmente, se ubican a lo largo de la línea I (Inicio). Sus movimientos siempre serán en dirección “horizontal” (perpendicular a las líneas):

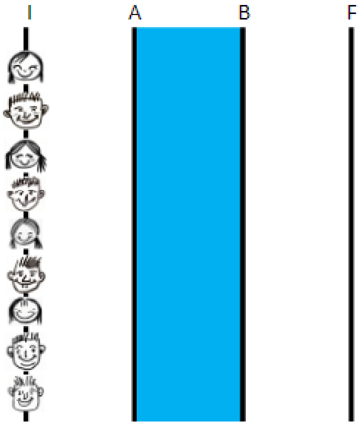
Cada participante dispondrá de un dado como el de la figura siguiente, con cuatro caras azules y dos blancas.



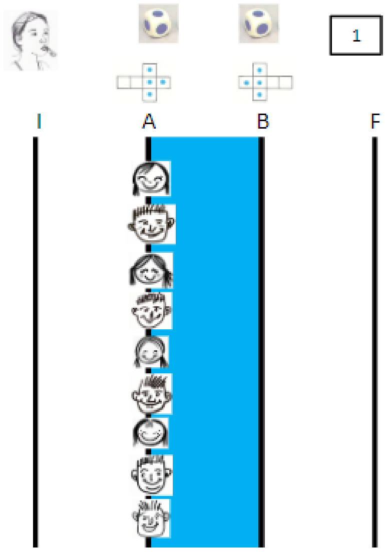
Una persona, con un objeto para emitir señales (por ejemplo con un silbato), indicará cuándo se debe dar un paso e irá contando los pasos.

Cuando un participante esté sobre la línea I el único movimiento posible será hacia la línea A. Cuando un participante esté sobre la línea A o la línea B tirará el dado y el color de la cara que salga le dirà hacía qué lado ha de dar el paso, el lado azul o el blanco. Cuando un participante, en su paseo aleatorio, llegue a la línea F, tomará nota del número de movimientos que ha hecho hasta aquel momento (el número indicado en el contador) y saldrá del role-play.

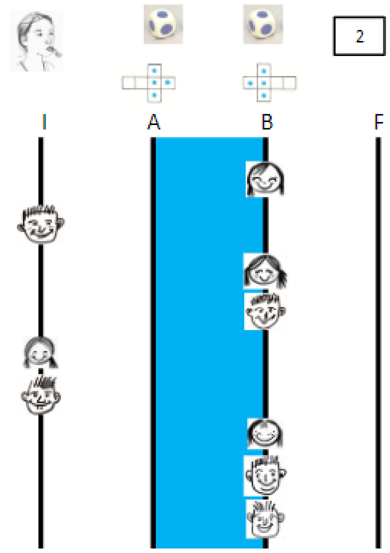
La siguiente imagen indica la posición inicial:



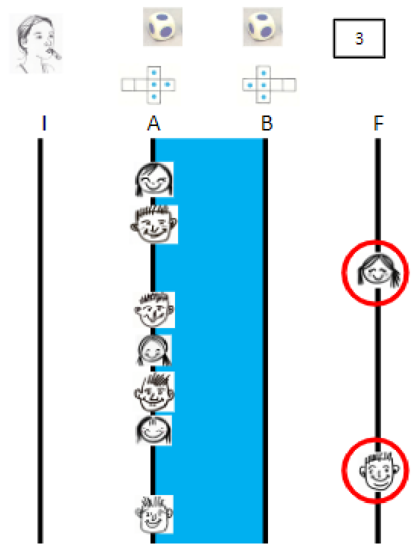
Después de un silbido estarán así:



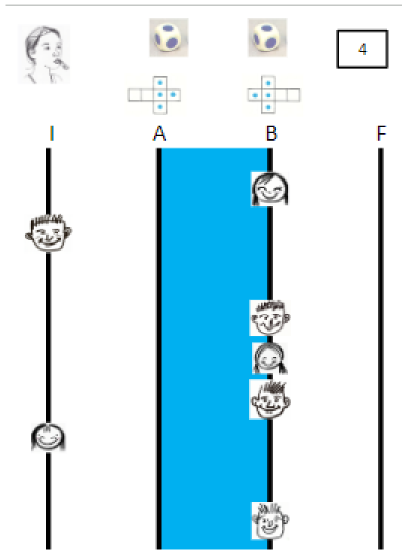
En el siguiente silbido se repartirán ya los participantes:



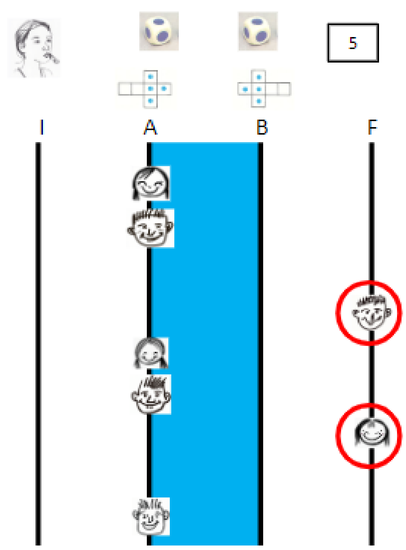
En el siguiente movimiento serà probable que algunos participantes lleguen a F y abandonen el role-play después de tomar nota del número de pasos que han dado en su "paseo":



En el cuarto paso podemos tener una configuración parecida a la siguiente:

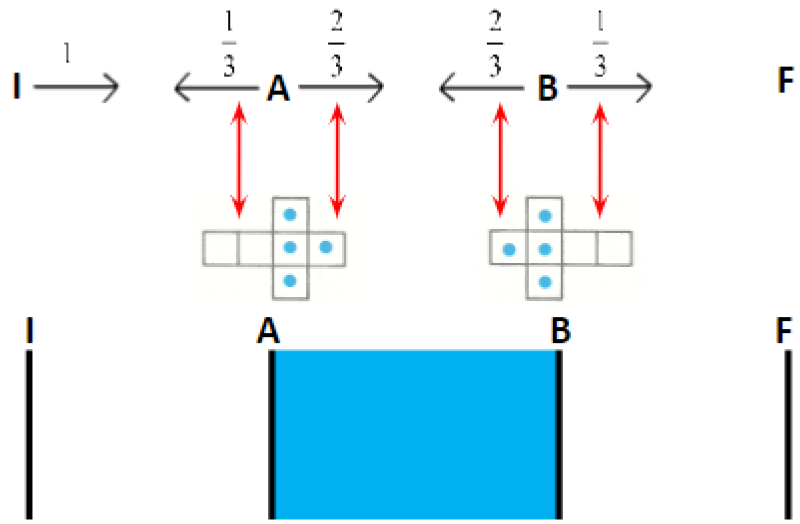


En el quinto paso podemos tener una configuración parecida a la siguiente y será probable que algunos alumnos lleguen a F y abandonen el role-play tomando nota del número de pasos de su paseo.



Una vez hayan salido del role-play todos los participantes (o casi todos ya que existe la posibilidad que algún participante nunca llegue a F o que llegue después de muchos movimientos), tendremos que calcular el promedio de los movimientos que cada uno ha necesitado para llegar a F. Muy probablemente el valor obtenido estará muy próximo a 10.

Obsérvese que la configuración de probabilidades es idèntica a la que se observaba en los saltos entre las configuraciones C_{30}, C_{21}, C_{12},C_{03} del problema de las avispas y en las otros contextos que se han planteado:



Aspectos matemáticos

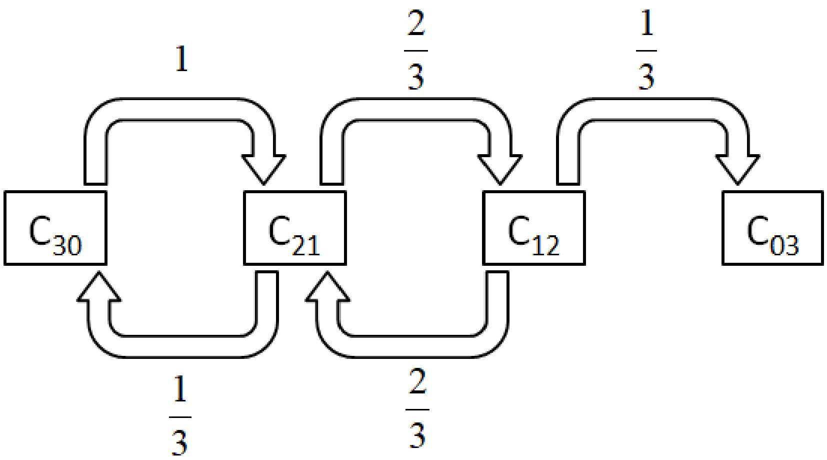
Este apartado está destinado al profesorado ya que requiere ciertas técnicas matemáticas alejadas de los contenidos de la educación secundaria. En principio, en el trabajo de los alumnos, no se contempla hacer una demostración formal del cálculo exacto de la esperanza matemática como la que se hará a continuación, sinó simplemente efectuar estimaciones experimentales y observar la coincidencia del modelo matemático en las diversas situaciones que se han descrito.

El abordaje del problema puede hacerse a partir de las configuraciones que ya se habían comentado en cuánto a la distribución de las avispas:

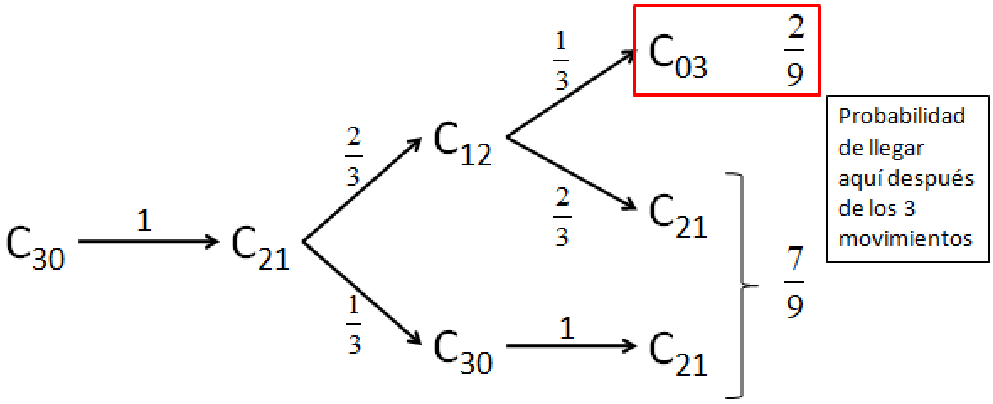
- C_{30}: 3 avispas en la primera habitación, 0 en la segunda. Esta configuración, en particular, se da en la posición inicial, pero puede volverse a ella a lo largo del proceso.
- C_{21}: 2 avispas en la primera habitación, 1 en la segunda.
- C_{12}: 1 avispa en la primera habitación, 2 en la segunda.
- C_{03}: 0 avispas en la primera habitación, 3 en la segunda. Esta configuración indica el final del proceso.

Recordemos que pretendemos calcular la esperanza matemática del número de movimientos que se requieren para acabar el proceso que, en cada caso, se describe.

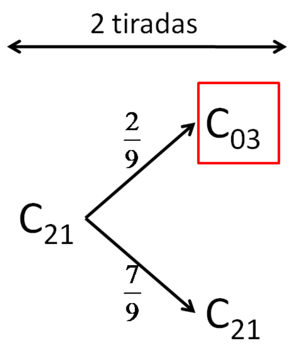
Retomemos el esquema que subyace en todos los problemas anteriores:



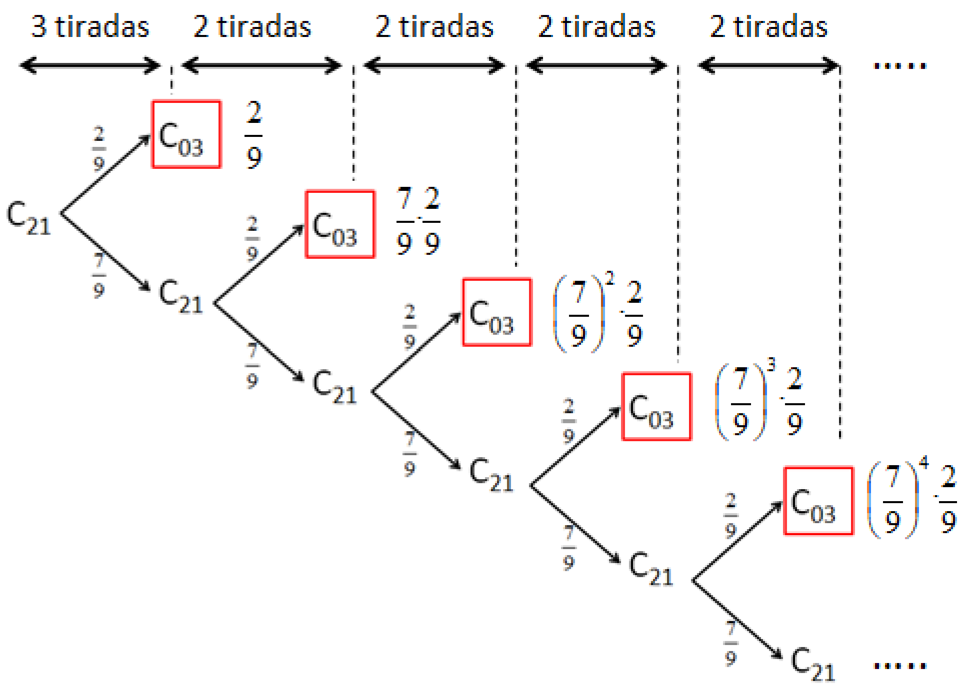
Hagamos un diagrama en árbol para representar los tres primeros movimientos,indicando en cada rama las probabilidades del correspondiente movimiento:



El recuadro en rojo representa la probabilidad de acabar el proceso en 3 movimientos. Uniendo el segundo y el tercer movimiento tendríamos el siguiente esquema (que representaría 2 movimientos):



Esta pieza se puede “encadenar” de manera recurrente como se observa en el siguiente esquema:



Los cuadrados rojos indican el final del proceso y, a su lado se indica la probabilidad de llegar a cada uno de ellos. Obsérvese que el proceso acabará en 3 movimientos, o en 5, o en 7, o en 9…, siempre en un número impar de movimientos. Así pues la esperanza matemática del número de movimientos que se requieren para acabar el proceso vendrá dada por la expresión:

$$EM = \frac{2}{9}\cdot 3 + \frac{7}{9}\cdot\frac{2}{9}\cdot 5 + \left(\frac{7}{9}\right)^2\cdot\frac{2}{9}\cdot 7 + \left(\frac{7}{9}\right)^3\cdot\frac{2}{9}\cdot 9 + \left(\frac{7}{9}\right)^4\cdot\frac{2}{9}\cdot 11 + \ldots$$

La suma de esta serie es un poco delicada. Necesitaremos dos resultados sobre sumas de series:

- La fórmula de la suma de una serie geométrica de razón menor que 1, en valor absoluto:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad si \quad |x| < 1$$

- La fórmula que se deduce derivando término a término la anterior (puede demostrarse que la serie derivada converge hacia la derivada de la función suma anterior):

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad si \quad |x| < 1$$

Entonces tendremos:

$$EM=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{9}\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^{n}\cdot(2n+3)=\frac{2}{9}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(2n+3)\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^{n}=$$

$$=\frac{2}{9}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^{n}+\frac{2}{9}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(2n+2)\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^{n}=$$

$$=\frac{2}{9}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^{n}+\frac{4}{9}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^{n}=$$

$$=\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{1-\frac{7}{9}}+\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{7}{9}\right)^{2}}=1+9=10$$

Concluyendo así la demostración de que la esperanza matemática es 10.

Aspectos didácticos (cómo lo llevamos a clase)

Es un buen problema para trabajar en grupos de 2 o 3 alumnos.

La primera etapa del trabajo tiene que ser exploratoria: a través de la experimentación los alumnos van entrando en el contexto, van planteándose preguntas y descubriendo ciertas regularidades, por ejemplo, el hecho de que el proceso de “expulsión” de las avispas siempre se produce después de un número impar de tiradas, superior o igual a 3.

Será importante que establezcan un buen sistema de recuento y que se repartan el trabajo. Por ejemplo, un alumno puede tirar el dado, otro puede mover las avispas y el tercero puede contar las tiradas.

Cuando las tres avispas se encuentran en la habitación de la derecha se entiende que ha acabado el proceso de “expulsión” (bastará con cerrar la puerta entre las habitaciones y abrir la ventana de la habitación de la derecha). Entonces el equipo deberá tomar nota de cuantas tiradas han sido necesarias para llegar al final y volverá a empezar un nuevo proceso. Cuando haya realizado una cierta cantidad de veces este proceso tendremos dos opciones:

- Que cada equipo haga la media del número de tiradas necesarias que ha anotado en cada caso.
- Que se haga la media conjuntamente, agrupando todas las observaciones de los diversos equipos.

La media se acercará a 10 tiradas, como se ha deducido en el apartado de “Aspectos matemáticos”. Aquí se plantean preguntas que pueden llevar a ricas conversaciones matemáticas de aula:

- ¿Es posible que la media se acerque a un número par de tiradas cuando sólo se acaba el proceso después de un número impar de tiradas?
- ¿Qué experimentación ha requerido el menor número de tiradas?
- ¿Qué experimentación ha requerido el mayor número de tiradas?
- ¿Sería posible que se diera un caso en que las tres avispas nunca coincidieran en la habitación de la derecha? ¿Sería probable? ¿Cuál sería su probabilidad?...

Una vez hecho este camino será interesante proponer alguna exploración con herramientas digitales: en algunos casos bastará con mostrar aplicaciones ya construidas, en otros casos será bueno invitar a los alumnos a hacer sus propios programas.

Nos parece muy interesante plantear otros problemas, en contextos absolutamente distintos, pero que correspondan al mismo modelo probabilístico. Es una manera muy potente de poner de manifiesto el valor abstracto del modelo matemático que puede aplicarse a realidades concretas distintas:

- El contexto de las avispas ya explorado con detalle.
- El contexto del escarabajo moviéndose por un cubo.
- El contexto del ratón y el gato.
- El contexto del role-play

El mensaje de fondo es muy profundo y los contextos son muy comprensibles.

El role-play es especialmente motivador. Conviene hacer observar un matiz que no es menor: el movimiento de las personas en el role-play no equivale al movimiento de las avispas estrictamente sino a los cambios entre los estados C_{30}, C_{21},C_{12} y C_{03}. Cada alumno en el role-play representa el movimiento de las tres avispas entre las habitaciones y cuando llega al final significa que las avispas están juntas en la habitación de la derecha dispuestas a salir por la ventana. Esta observación intenta hacer un paralelismo entre dos contextos muy distintos que corresponden al mismo modelo. Bonita idea para trasladar a los alumnos.

La deducción matemática de la esperanza matemática del número de tiradas hay que reconocer que es un poco delicada, especialmente por la técnica requerida para la suma de la serie. Este aspecto puede dejarse para cursos avanzados o ampliaciones.

Lo realmente interesante es la exploración experimental (directa, con herramientas computacionales, con modelos alternativos…) que se ha planteado, la aproximación a 10 tiradas que se ha obtenido y sobre todo lo que se ha aprendido en el camino.

Se trata de un problema que permite un abordaje fácil, un desarrollo por distintos caminos que puede hacer observar ideas estocásticas potentes y una posible extensión final que requiere contenidos avanzados. Es un buen ejemplo de problema de suelo bajo, techo alto y paredes anchas.