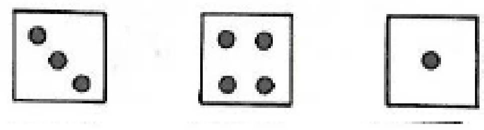
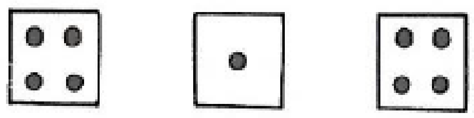
3 dados, 2 dados

Los alumnos tiran tres dados y en cada tirada retiran el dado que lleva la puntuación más alta y hacemos la suma de los otros dos.



Ejemplo 1: Retiramos el dado que marca 4 y la suma nos da 4.



Ejemplo 2: Retiramos uno de los dados que marca 4 y la suma nos da 5.

¿Tenemos resultados análogos o no a los que tendremos calculando la suma de los puntos obtenidos al lanzar solamente dos dados?

Experimentación:

Conjeturas y formas de abordaje en el aula:

Generamos preguntas:

Extraído de : Manual de La Caja de Varga

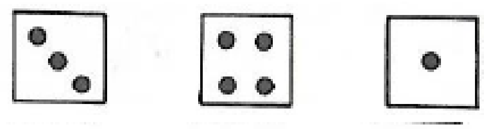
Recuento de casos

Valor de la suma	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
TOTAL		

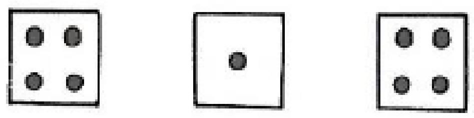
Segunda parte del taller: profundización (25 minutos)

Resituación del problema.

Recordemos el enunciado
Los alumnos tiran tres dados y en cada tirada retiran el dado que lleva la puntuación más alta y hacemos la suma de los otros dos.



Ejemplo 1: Retiramos el dado que marca 4 y la suma nos da 4.



Ejemplo 2: Retiramos uno de los dados que marca 4 y la suma nos da 5.

¿Tenemos resultados análogos o no a los que tendremos calculando la suma de los puntos obtenidos al lanzar solamente dos dados?

¿Cómo ha ido la experimentación realizada en la primera parte?

¿Qué conjeturas hemos hecho?

¿Qué preguntas se nos han planteado y han quedado "aparcadas"?

¿Qué suma serà la más probable que salga?
¿Será el 7 el valor que aparezca con más frecuencia?
¿Qué sucederá si eliminamos el valor menor en lugar del mayor? Y si eliminamos el valor central y nos quedamos con los valores extremos?

El abordaje del problema desde un punto de vista matemático puede hacerse pensando en que hemos lanzado dos dados y cómo influye el resultado de la suma en función del valor obtenido en el tercer lanzamiento y de los dos valores obtenidos anteriormente. En los apartados siguientes nos será útil este planteamiento.

En un primer intento, podríamos hacer un recuento a la brava. En la primera fila indicaremos el valor de la suma (S = n) y, en las siguientes filas indicaremos el valor de los dos primeros dados (36 casos posibles). En cada celda, escribimos el número de casos favorables en función del valor del tercer dado. Por ejemplo, si en los dos primeros lanzamientos obtenemos un 2 y un 4, ¿cuántos casos se pueden dar? Si sale un 1, obtenemos el valor de la suma será 3, si sale un 2, obtenemos el valor de la suma será 4, si sale un 3, obtenemos el valor de la suma será 5 y, en cualquier otro caso, el valor de la suma será 6. Podemos observar este recuento en la fila ombreada de color azul.

	S=2	S=3	S=4	S=5	S=6	S=7	S=8	S=9	S=10	S=11	S=12
1-1	6										
1-2	1	5									
1-3	1	1	4								
1-4	1	1	1	3							
1-5	1	1	1	1	2						
1-6	1	1	1	1	1	1					
2-1	1	5									
2-2		1	5								
2-3		1	1	4							
2-4		1	1	1	3						
2-5		1	1	1	1	2					
2-6		1	1	1	1	1	1				
3-1	1	1	4								
3-2		1	1	4							
3-3			1	1	4						
3-4			1	1	1	3					
3-5			1	1	1	1	2				
3-6			1	1	1	1	1	1			
4-1	1	1	1	3							
4-2		1	1	1	3						
4-3			1	1	1	3					
4-4				1	1	1	3				

4-5				1	1	1	1	2			
4-6				1	1	1	1	1	1		
5-1	1	1	1	1	2						
5-2		1	1	1	1	2					
5-3			1	1	1	1	2				
5-4				1	1	1	1	2			
5-5					1	1	1	1	2		
5-6					1	1	1	1	1	1	
6-1	1	1	1	1	1	1					
6-2		1	1	1	1	1	1				
6-3			1	1	1	1	1	1			
6-4				1	1	1	1	1	1		
6-5					1	1	1	1	1	1	
6-6						1	1	1	1	1	1
TOTAL	**16**	**27**	**34**	**36**	**34**	**27**	**19**	**12**	**7**	**3**	**1**

En la lectura, se observan algunos patrones y regularidades que nos pueden invitar a hacer nuevas investigaciones (se verán en apartados posteriores) o realizar los recuentos de los casos favorables de una forma distinta. Algunos alumnos, viendo estas regularidades se ahorran algunas filas de la matriz anterior utilizando la simetría de casos (hay los mismos casos favorables en la situación 1-3 que en la 3-1, por ejemplo):

	S=2	**S=3**	**S=4**	**S=5**	**S=6**	**S=7**	**S=8**	**S=9**	**S=10**	**S=11**	**S=12**
1-1	6										
1-2	2	10									
1-3	2	2	8								
1-4	2	2	2	6							
1-5	2	2	2	2	4						
1-6	2	2	2	2	2	2					
2-2		1	5								
2-3		2	2	8							

2-4		2	2	2	6						
2-5		2	2	2	2	4					
2-6		2	2	2	2	2	2				
3-3			2	2	8						
3-4			2	2	2	6					
3-5			2	2	2	2	4				
3-6			2	2	2	2	2	2			
4-4				1	1	1	3				
4-5				2	2	2	2	4			
4-6				2	2	2	2	2	2		
5-5					1	1	1	1	2		
5-6					2	2	2	2	2	2	
6-6						1	1	1	1	1	1
TOTAL	**16**	**27**	**34**	**36**	**34**	**27**	**19**	**12**	**7**	**3**	**1**

¿Qué similitudes o diferencias se observan entre la distribución de la suma de dos dados o en la suma de los dos dados de menor puntuación si lanzamos tres dados? Antes, veamos la tabla de doble entrada donde se pueden observar los casos favorables para cada valor de la suma de dos dados:

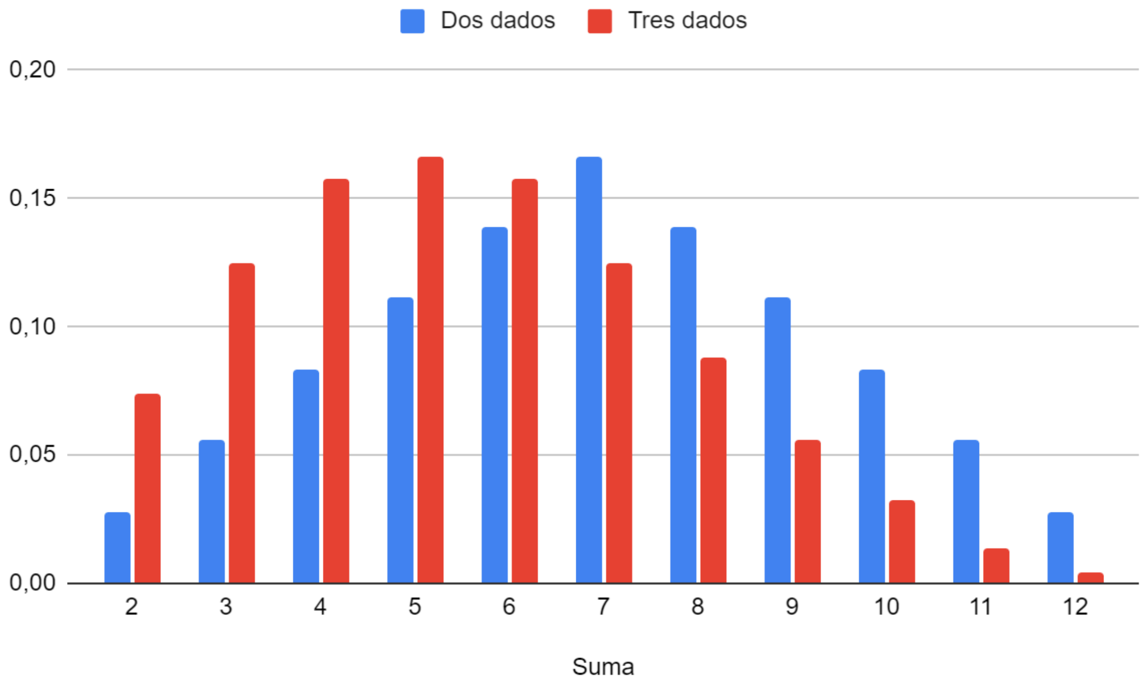
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11

6	7	8	9	10	11	12

Observemos las diferencias en las dos situaciones descritas anteriormente:

	Lanzando dos dados	Lanzando tres dados
P(S=2)	$\frac{1}{36} \approx 0,0278$	$\frac{16}{216} \approx 0,0741$
P(S=3)	$\frac{2}{36} \approx 0,0556$	$\frac{27}{216} \approx 0,1250$
P(S=4)	$\frac{3}{36} \approx 0,0833$	$\frac{34}{216} \approx 0,1574$
P(S=5)	$\frac{4}{36} \approx 0,1111$	$\frac{36}{216} \approx 0,1667$
P(S=6)	$\frac{5}{36} \approx 0,1389$	$\frac{34}{216} \approx 0,1574$
P(S=7)	$\frac{6}{36} \approx 0,1667$	$\frac{27}{216} \approx 0,1250$
P(S=8)	$\frac{5}{36} \approx 0,1389$	$\frac{19}{216} \approx 0,0880$
P(S=9)	$\frac{4}{36} \approx 0,1111$	$\frac{12}{216} \approx 0,0556$
P(S=10)	$\frac{3}{36} \approx 0,0833$	$\frac{7}{216} \approx 0,0324$
P(S=11)	$\frac{2}{36} \approx 0,0556$	$\frac{3}{216} \approx 0,0139$
P(S=12)	$\frac{1}{36} \approx 0,0278$	$\frac{1}{216} \approx 0,0046$

Nótese que en el primero de los casos, se da una simetría alrededor del caso S=7 (valor con mayor probabilidad). En el segundo caso, parece darse una simetría alrededor del caso S=5, pero que se rompe en casos algo más alejados. Acabamos de resolver la primera de nuestras preguntas: la distribución se ve alterada con el cambio de reglas y el valor de la suma más probable, en la segunda alternativa disminuye hasta el caso S=5. Veámoslo en una representación gráfica:



Otro dato significativo que se puede observar de forma muy clara en el gráfico anterior es que el valor mayor de las probabilidades en ambos casos es el mismo; en el caso de dos dados P(S=7) = 6/36 y en el caso de tres dados, P(S=5) = 36/216.

Una vez resuelta nuestra primera pregunta, podemos estudiar qué sucede si, en lugar de eliminar el dado de mayor puntuación, pasamos a eliminar el de menor puntuación. ¿Se dará una distribución simétrica a la estudiada en el caso anterior?

	S=2	**S=3**	**S=4**	**S=5**	**S=6**	**S=7**	**S=8**	**S=9**	**S=10**	**S=11**	**S=12**
1-1	1	1	1	1	1	1					
1-2		2	2	2	2	2	2				
1-3			2	2	2	2	2	2			
1-4				2	2	2	2	2	2		
1-5					2	2	2	2	2	2	
1-6						2	2	2	2	2	2
2-2			2	1	1	1	1				
2-3				4	2	2	2	2			
2-4					4	2	2	2	2		

2-5						4	2	2	2	2	
2-6							4	2	2	2	2
3-3					3	1	1	1			
3-4						6	2	2	2		
3-5							6	2	2	2	
3-6								6	2	2	2
4-4							4	1	1		
4-5								8	2	2	
4-6									8	2	2
5-5									5	1	
5-6										10	2
6-6											6
TOTAL	**1**	**3**	**7**	**12**	**19**	**27**	**34**	**36**	**34**	**27**	**16**

	Lanzando tres dados (eliminando el mayor)	**Lanzando tres dados (eliminando el menor)**
P(S=2)	$\frac{16}{216} \approx 0,0741$	$\frac{1}{216} \approx 0,0046$
P(S=3)	$\frac{27}{216} \approx 0,1250$	$\frac{3}{216} \approx 0,0139$
P(S=4)	$\frac{34}{216} \approx 0,1574$	$\frac{7}{216} \approx 0,0324$
P(S=5)	$\frac{36}{216} \approx 0,1667$	$\frac{12}{216} \approx 0,0556$
P(S=6)	$\frac{34}{216} \approx 0,1574$	$\frac{19}{216} \approx 0,0880$
P(S=7)	$\frac{27}{216} \approx 0,1250$	$\frac{27}{216} \approx 0,1250$
P(S=8)	$\frac{19}{216} \approx 0,0880$	$\frac{34}{216} \approx 0,1574$

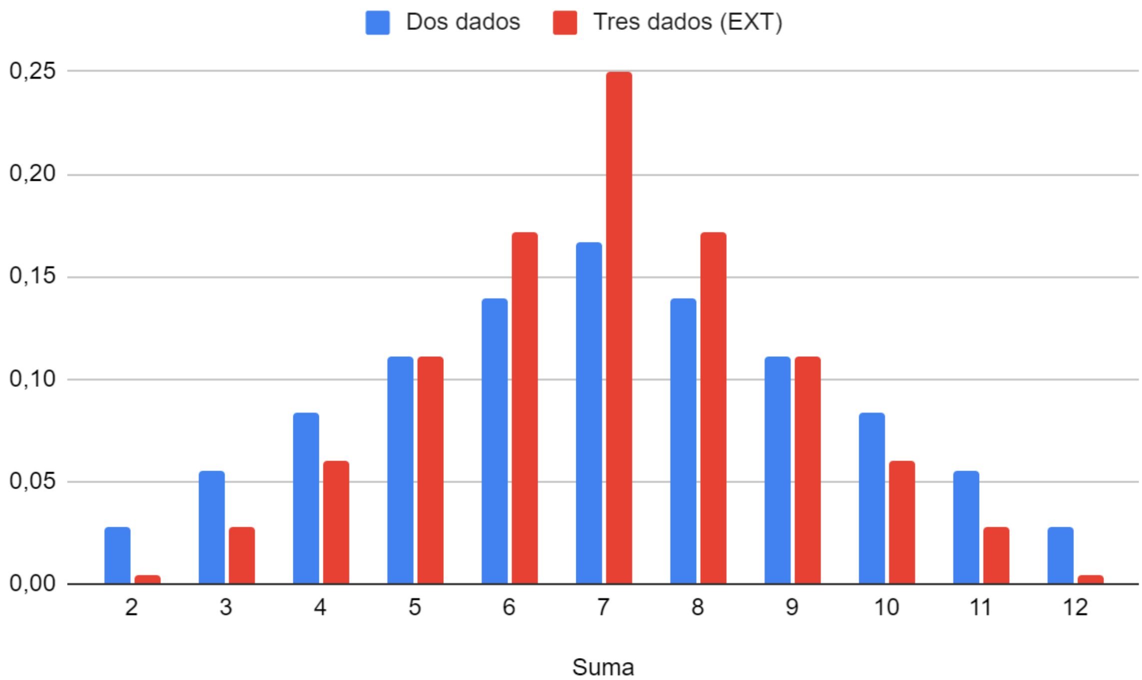
P(S=9)	$\frac{12}{216} \approx 0,0556$	$\frac{36}{216} \approx 0,1667$
P(S=10)	$\frac{7}{216} \approx 0,0324$	$\frac{34}{216} \approx 0,1574$
P(S=11)	$\frac{3}{216} \approx 0,0139$	$\frac{27}{216} \approx 0,1250$
P(S=12)	$\frac{1}{216} \approx 0,0046$	$\frac{16}{216} \approx 0,0741$

Aquí, nuestra intuición ha apuntado en la buena dirección. Se da una simetría en los dos casos estudiados con eje en el valor P(S=7). Veamos dicha simetría en el siguiente gráfico:

Para finalizar esta primera fase del estudio, ¿qué relación existirá entre la distribución de dos dados y la distribución que se obtiene tirando tres dados y eliminando el valor central? Todo apunta que se mantendrá la simetría central en torno al valor de la suma = 7. Estudiemos los casos favorables para cada situación.

	S=2	S=3	S=4	S=5	S=6	S=7	S=8	S=9	S=10	S=11	S=12
1-1	1	1	1	1	1	1					
1-2		4	2	2	2	2					
1-3			6	2	2	2					
1-4				8	2	2					
1-5					10	2					
1-6						12					
2-2		1	1	1	1	1	1				
2-3			2	4	2	2	2				
2-4				2	6	2	2				
2-5					2	8	2				
2-6						2	10				
3-3			1	1	1	1	1	1			
3-4				2	2	4	2	2			
3-5					2	2	6	2			
3-6						2	2	8			
4-4				1	1	1	1	1	1		
4-5					2	2	2	4	2		
4-6						2	2	2	6		
5-5					1	1	1	1	1	1	
5-6						2	2	2	2	4	
6-6						1	1	1	1	1	1
TOTAL	**1**	**6**	**13**	**24**	**37**	**54**	**37**	**24**	**13**	**6**	**1**

Otra vez, nuestra intuición ha funcionado. El hecho de extraer el valor central, nos mantiene la simetría del caso de los dos dados. Sin embargo, sus distribuciones són notablemente distintas: los valores extremos son muy poco probables mientras que el valor central aumenta su probabilidad. Veamos esta observación en el siguiente gráfico:



Ampliación del problema.

Una vez resueltas las preguntas iniciales, quizás nos apetezca ir un poco más allá… Podemos atacar distintas posibilidades:

a) ¿Qué sucede si cambiamos el número de caras de los dados que estamos estudiando? ¿Y si tenemos dados de dos caras?¿Y si fueran tres caras? ...
b) ¿Qué sucede si aumentamos el número de dados que lanzamos? ¿Qué sucedería si lanzamos cuatro dados?¿Y cinco?
c) ¿Qué modelo nos dará si lanzamos cuatro dados y nos quedamos con los dos dados centrales?

En las próximas páginas, consideraremos únicamente el caso que, después de lanzar n dados, nos quedamos con la suma de los dos mayores. En el caso c (dados centrales) será estudiado a posteriori.

➢ **Pasemos a la acción y ataquemos los dos grupos de preguntas a la vez en un intento de encontrar un patrón que modelice el lanzamiento de n dados, todos ellos de k caras. ¿Será posible encontrar un patrón?**

- Estudio con dados de 2 caras

Supongamos que lanzamos n dados con dos caras (puntuadas con un 1 y un 2). Eliminamos los n-2 dados con menor puntuación y estudiamos la distribución del valor de la suma de los dos mayores. Dicho valor, en todos los casos, estará comprendido entre 2 y 4. Veamos el recuento de casos favorables para los n dados:

	n = 2	n = 3	n = 4	n = 5	n = 6	n = 7	n = 8	n = 9	n = 10
S = 2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
S = 3	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S = 4	1	4	11	26	57	120	247	502	1013
Total	**4**	**8**	**16**	**32**	**64**	**128**	**256**	**512**	**1024**

No es difícil de observar que los términos generales de cada sucesión vienen dados por las siguientes expresiones:

$$\{S2\}_n = 1$$
$$\{S3\}_n = n$$
$$\{S4\}_n = 2^n - n - 1$$

De hecho, si lo pensamos un poco, estas tres fórmulas son de lo más coherente:

- Cuando S = 2, todos los dados deben salir con una puntuación de 1.
- Cuando S = 3, todos los dados deben salir con una puntuación de 1 excepto uno con una puntuación de 2. ¿Cuántos casos hay? n.
- Y, para el caso S = 4, simplemente tenemos que sumar y restar del total de casos.

Por tanto, si queremos estudiar la distribución de la suma de los dos dados de mayor cantidad si lanzamos, pongamos por ejemplo 20 dados, viene dada por las siguientes expresiones:

$$P(S=2) = \frac{1}{2^{20}} \approx 9.53 \cdot 10^{-7}$$

$$P(S=3) = \frac{20}{2^{20}} \approx 1,91 \cdot 10^{-5}$$

$$P(S=4) = \frac{2^{20} - 20 - 1}{2^{20}} \approx 1$$

- Estudio con dados de 3 caras

Supongamos que lanzamos n dados con tres caras (puntuadas con un 1, un 2 y un 3). El valor de la suma, en todos los casos, estará comprendido entre 2 y 6. Aquí, el recuento de casos favorables se complica un poco. Introduciremos una notación que se extenderá durante todo este bloque. Notaremos [13] si la puntuación de los dos dados es un 1 y un 3 (independientemente del orden). Empecemos a estudiar cuántos casos posibles tenemos cuando lanzamos dos dados:

	1	**2**	**3**
1	[11]	[12]	[13]
2	[12]	[22]	[23]
3	[13]	[23]	[33]

Ahora, al lanzar un tercer dado, veamos con qué dados nos quedaríamos en función de los dos dados iniciales y de la puntuación del tercer dado. En la fila superior, tenemos descritos los casos posibles con dos dados. En la primera columna, tenemos los tres casos posibles en lanzar el tercer dado. En la intersección de fila y columna, recogeremos los dos dados que nos quedamos:

	[11]	**[12]**	**[13]**	**[22]**	**[23]**	**[33]**
1	[11]	[12]	[13]	[22]	[23]	[33]
2	[12]	[22]	[23]	[22]	[23]	[33]
3	[13]	[23]	[33]	[23]	[33]	[33]

Esta segunda tabla es muy importante ya que nos da una relación de recurrencia para cada caso. Estudiemos la sucesión de casos favorables para cada situación en función de los n dados de tres caras lanzados.

A partir de este momento, se utilizará una notación un poco extraña (pero que esperemos que nos resulte cómoda). Por ejemplo, denotaremos $\{23\}_n$ a la cantidad de casos favorables que se dan después de lanzar n dados, quedarnos con los dos mayores y que estos sean un 2 y un 3.[1]

[1] Por cuestiones de comodidad, todas las sucesiones empezarán desde el término n = 2.

Con las relaciones vistas en la última tabla mostrada y teniendo en cuenta todos los detalles descritos en el párrafo anterior, podemos definir las siguientes sucesiones recurrentes:

$$\{[11]\}_n = 1$$
$$\{[12]\}_{n+1} = \{[11]\}_n + \{[12]\}_n$$
$$\{[13]\}_{n+1} = \{[11]\}_n + \{[13]\}_n$$
$$\{[22]\}_{n+1} = \{[12]\}_n + 2 \cdot \{[22]\}_n$$
$$\{[23]\}_{n+1} = \{[12]\}_n + \{[13]\}_n + \{[22]\}_n + 2 \cdot \{[23]\}_n$$
$$\{[33]\}_{n+1} = \{[13]\}_n + \{[23]\}_n + 3 \cdot \{[33]\}_n$$

Nos gustaría encontrar la expresión explícita de las sucesiones anteriormente descritas de forma recurrente. Sin embargo, antes, veamos los primeros términos de cada sucesión para n dados:

n dados	$\{11\}_n$	$\{12\}_n$	$\{13\}_n$	$\{22\}_n$	$\{23\}_n$	$\{33\}_n$
2	1	2	2	1	2	1
3	1	3	3	4	9	7
4	1	4	4	11	28	33
5	1	5	5	26	75	131
6	1	6	6	57	186	473
7	1	7	7	120	441	1611
8	1	8	8	247	1016	5281
9	1	9	9	502	2295	16867
10	1	10	10	1013	5110	52905
11	1	11	11	2036	11253	163835

Saltándonos algunos cálculos muy pesados, podríamos llegar a ver que[2]:

$$\{[11]\}_n = 1$$
$$\{[12]\}_{n+1} = n$$
$$\{[13]\}_{n+1} = n$$
$$\{[22]\}_{n+1} = 2^n - n - 1$$

[2] En cualquier caso, se podría ver que las expresiones son equivalentes por medio de demostraciones por inducción.

$$\{[23]\}_{n+1} = n \cdot 2^{n-1} - n$$

$$\{[33]\}_{n+1} = 3^n - 2^n - n \cdot 2^{n-1}$$

Ahora, si retomamos el enunciado inicial, debemos calcular el número de casos favorables del valor de la suma de los dos dados mayores en lanzar n dados. Las expresiones explícitas para cada caso se resumen de la siguiente manera:

$$\{S2\}_n = 1$$
$$\{S3\}_n = n$$
$$\{S4\}_n = 2^n - 1$$
$$\{S5\}_n = n \cdot 2^{n-1} - n$$
$$\{S6\}_n = 3^n - 2^n - n \cdot 2^{n-1}$$

Si comparamos las sucesiones obtenidas en el caso de dados de dos caras y el caso de dados de tres caras, se pueden observar algunas regularidades:

n dados de 2 caras	n dados de 3 caras
$\{S2\}_n = 1$ $\{S3\}_n = n$ $\{S4\}_n = 2^n - n - 1$	$\{S2\}_n = 1$ $\{S3\}_n = n$ $\{S4\}_n = 2^n - 1$ $\{S5\}_n = n \cdot 2^{n-1} - n$ $\{S6\}_n = 3^n - 2^n - n \cdot 2^{n-1}$

¿Estas regularidades se extenderán para dados con más caras? En este punto deberíamos proceder de forma similar al caso de dados con 4 caras, 5 caras… Ahorraremos estos pasos y procederemos a mostrar, en formato tabla, las sucesiones obtenidas para los siguientes casos:

2 caras	3 caras	4 caras	5 caras	6 caras
$\{S2\}_n = 1$	$\{S2\}_n = 1$	$\{S2\}_n = 1$	$\{S2\}_n = 1$	$\{S2\}_n = 1$
$\{S3\}_n = n$	$\{S3\}_n = n$	$\{S3\}_n = n$	$\{S3\}_n = n$	$\{S3\}_n = n$
$\{S4\}_n = 2^n - n - 1$	$\{S4\}_n = 2^n - 1$	$\{S4\}_n = 2^n - 1$	$\{S4\}_n = 2^n - 1$	$\{S4\}_n = 2^n - 1$
	$\{S5\}_n = n \cdot 2^{n-1} - n$	$\{S5\}_n = n \cdot 2^{n-1}$	$\{S5\}_n = n \cdot 2^{n-1}$	$\{S5\}_n = n \cdot 2^{n-1}$
	$\{S6\}_n = 3^n - 2^n - n \cdot 2^{n-1}$	$\{S6\}_n = 3^n - 2^n - n$	$\{S6\}_n = 3^n - 2^n$	$\{S6\}_n = 3^n - 2^n$
		$\{S7\}_n = n \cdot (3^{n-1} - 2^{n-1})$	$\{S7\}_n = n \cdot 3^{n-1} - n$	$\{S7\}_n = n \cdot 3^{n-1}$
		$\{S8\}_n = 4^n - 3^n - n \cdot 3^{n-1}$	$\{S8\}_n = 4^n - 3^n - n \cdot 2^{n-1}$	$\{S8\}_n = 4^n - 3^n - n$
			$\{S9\}_n = n \cdot (4^{n-1} - 3^{n-1})$	$\{S9\}_n = n \cdot (4^{n-1} - 2^{n-1})$
			$\{S10\}_n = 5^n - 4^n - n \cdot 4^{n-1}$	$\{S10\}_n = 5^n - 4^n - n \cdot 3^{n-1}$
				$\{S11\}_n = n \cdot (5^{n-1} - 4^{n-1})$
				$\{S12\}_n = 6^n - 5^n - n \cdot 5^{n-1}$

Se deja para el lector seguir con la tabla para casos con más caras. Sin embargo, se pueden observar patrones muy bellos. Es realmente sorprendente ver cómo aparecen regularidades “de las regularidades”. Y todo esto, sólo estudiando la distribución de n dados con k caras.

➢ **Resolvamos la última de las preguntas formuladas: ¿Qué distribución nos dará si lanzamos cuatro dados y nos quedamos con los dos dados centrales?**

Esta situación nos conecta de forma muy tangencial a los deportes donde hay jueces y juezas que puntúan las actuaciones de los y las deportistas. En deportes como la natación sincronizada, saltos de trampolín o gimnasia artística, las puntuaciones extremas (las más altas y las más bajas) se eliminan para eliminar posibles sospechas y normalizar las puntuaciones. Con esta idea, se propone el siguiente reto:

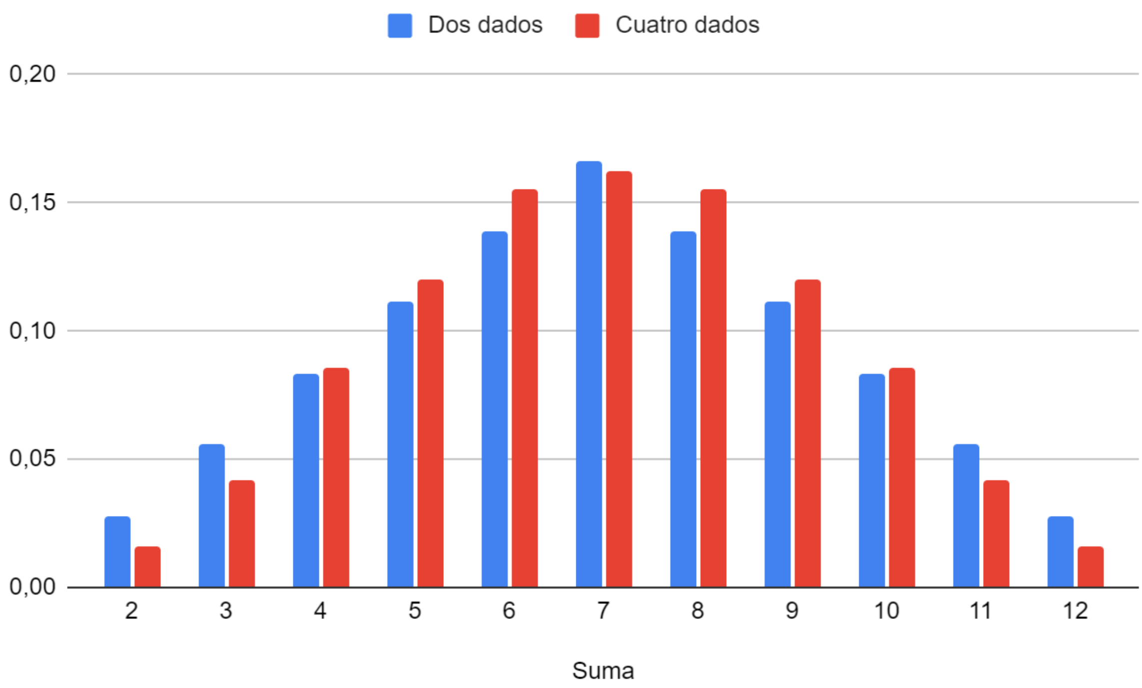
Lanzamos cuatro dados y sumamos las dos puntuaciones centrales (eliminamos la máxima y la mínima puntuación)

La dificultad mayor en esta situación se encuentra en cómo hacer un recuento exhaustivo y sistemático de los $6^4 = 1296$ casos posibles. Una propuesta de recuento es la siguiente:

Dados escogidos	**Casos cuatro dados iguales**	**Casos tres dados iguales**	**Casos dos parejas de dados iguales**	**Casos de dos dados iguales y dos distintos**	**Casos con cuatro dados distintos**	**Total**
1-1	1	5·4 = 20	-	-	-	21
S = 2						**21**
1-2	-	-	6	4·12 = 48	-	54
S = 3						**54**
1-3	-	-	6	3·12 = 36	-	42
2-2	1	5·4 = 20	-	4·12 = 48	-	69
S = 4						**111**
1-4	-	-	6	2·12 = 24	-	30
2-3	-	-	6	4·12 = 48	3·24 = 72	126
S = 5						**156**
1-5	-	-	6	12	-	18
2-4	-	-	6	3·12 = 36	2·24 = 48	90
3-3	1	5·4 = 20	-	6·12 = 72	-	93
S = 6						**201**

Dados escogidos	Casos cuatro dados iguales	Casos tres dados iguales	Casos dos parejas de dados iguales	Casos de dos dados iguales y dos distintos	Casos con cuatro dados distintos	Total
1-6	-	-	6	-	-	6
2-5	-	-	6	2·12 = 24	24	54
3-4	-	-	6	4·12 = 48	4 · 24 = 96	150
S = 7						**210**
2-6	-	-	6	12	-	18
3-5	-	-	6	3·12 = 36	2·24 = 48	90
4-4	1	5·4 = 20	-	6·12 = 72	-	93
S = 8						
3-6	-	-	6	2·12 = 24	-	30
4-5	-	-	6	4·12 = 48	3·24 = 72	126
S = 9						**156**
4-6	-	-	6	3·12 = 36	-	42
5-5	1	5·4 = 20	-	4·12 = 48	-	69
S = 10						**111**
5-6	-	-	6	4·12 = 48	-	54
S = 11						**54**
6-6	1	5·4 = 20	-	-	-	21
S = 12						**21**

Como era de esperar, se mantiene la simetría respecto al resultado central S = 7. En este caso, podríamos realizar una comparativa entre el caso inicial (la suma de dos dados) y el caso actual:



En este caso, no hemos sido capaces de encontrar un patrón para los casos 2n dados y sumar los dos dados centrales. Suponemos que este patrón debe ser más difícil de encontrar ya que los valores centrales dependen tanto de los valores anteriores como de los posteriores. Pero, en matemáticas, nunca se puede decir “¡de esta agua no beberé!”

Amigo lector, estamos seguros que mientras avanzabas por las distintas variantes que hemos ido atacando, se te habrán ocurrido nuevas variantes… ¡Coge papel y lápiz! Empieza una nueva aventura.

Mundo de las simulaciones

Para este problema y sus ramificaciones, el mundo de la programación puede llegar a tomar un papel preponderante. Por un lado, tenemos el mundo de la simulación para experimentar de forma mucho más rápida que la realizada de forma manual. Sin embargo, este paso no debe provocar la supresión de la experimentación con dados. Por otro lado, también podemos realizar un recuento de casos posibles de forma sistemática para situaciones donde hacerlo en papel y lápiz sea muy engorroso.

A continuación, recogemos algunos programas hechos en lenguaje Python. Sin embargo, creemos que el mejor programa está por hacer; éste será el que puedan realizar nuestros alumnos para poder estudiar aquellos modelos que quieran estudiar.

- Simulaciones

  Simulador que estudia la suma de los dados menores.
  https://trinket.io/python/cd725f1da9

  Simulador que estudia la suma de los dados mayores.
  https://trinket.io/python/469fd6b25f

  Simulador que estudia la suma de los dados con mayor y menor puntuación.
  https://trinket.io/python/9767215200

  Simulador que estudia la suma de los dados centrales.
  https://trinket.io/python/09786c4245

- Recuento de casos favorables

  Recuento de casos favorables para n dados y k caras sumando los dos dados menores.
  https://trinket.io/python/4fa2faed95

  Recuento sistemático de casos favorables des de 3 hasta n dados y k caras sumando los dos dados menores.
  https://trinket.io/python/0626b2d50c

  Recuento sistemático de casos favorables des de 3 hasta n dados y k caras sumando los dos dados mayores.
  https://trinket.io/python/ea7e93219a

  Recuento sistemático de casos favorables des de 3 hasta n dados y k caras sumando el dado mayor y menor
  https://trinket.io/python/57f0a56b26

Conclusiones

En esta propuesta se trata un contexto aparentemente bien simple: lanzar distintos dados con un número igual de caras y quedarse con la suma de dos de ellos. En función del número de caras, de la cantidad de dados y del criterio de elección (menores, mayores, extremos…) obtenemos distintos modelos probabilísticos.

Obsérvese que partiendo de un contexto aparentemente simple, se puede llegar a la formulación de modelos muy complejos. Así pués, es un fenomenal ejemplo de un problema de umbral bajo, techo alto y paredes tan anchas que no hemos llegado a encontrarlas.