TER: Tirar Entre Ratlles

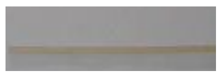
Universitat de Barcelona
Facultat de Matemàtiques i Informàtica

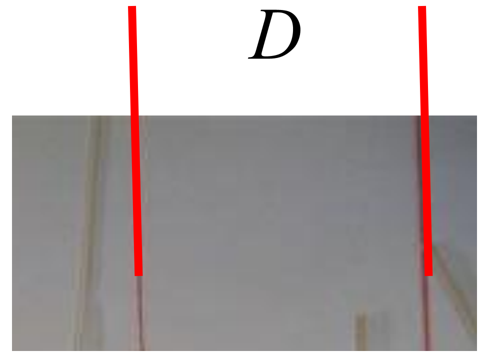
Aquesta proposta està inspirada en el que explica Santaló en el capítol VI del seu llibre "*La matemàtica: una filosofia i una tècnica*"

Partim de l'agulla de Buffon!

I si la longitud del pal (L) és més petita però no necessàriament igual a la distància entre rectes (D)?

L



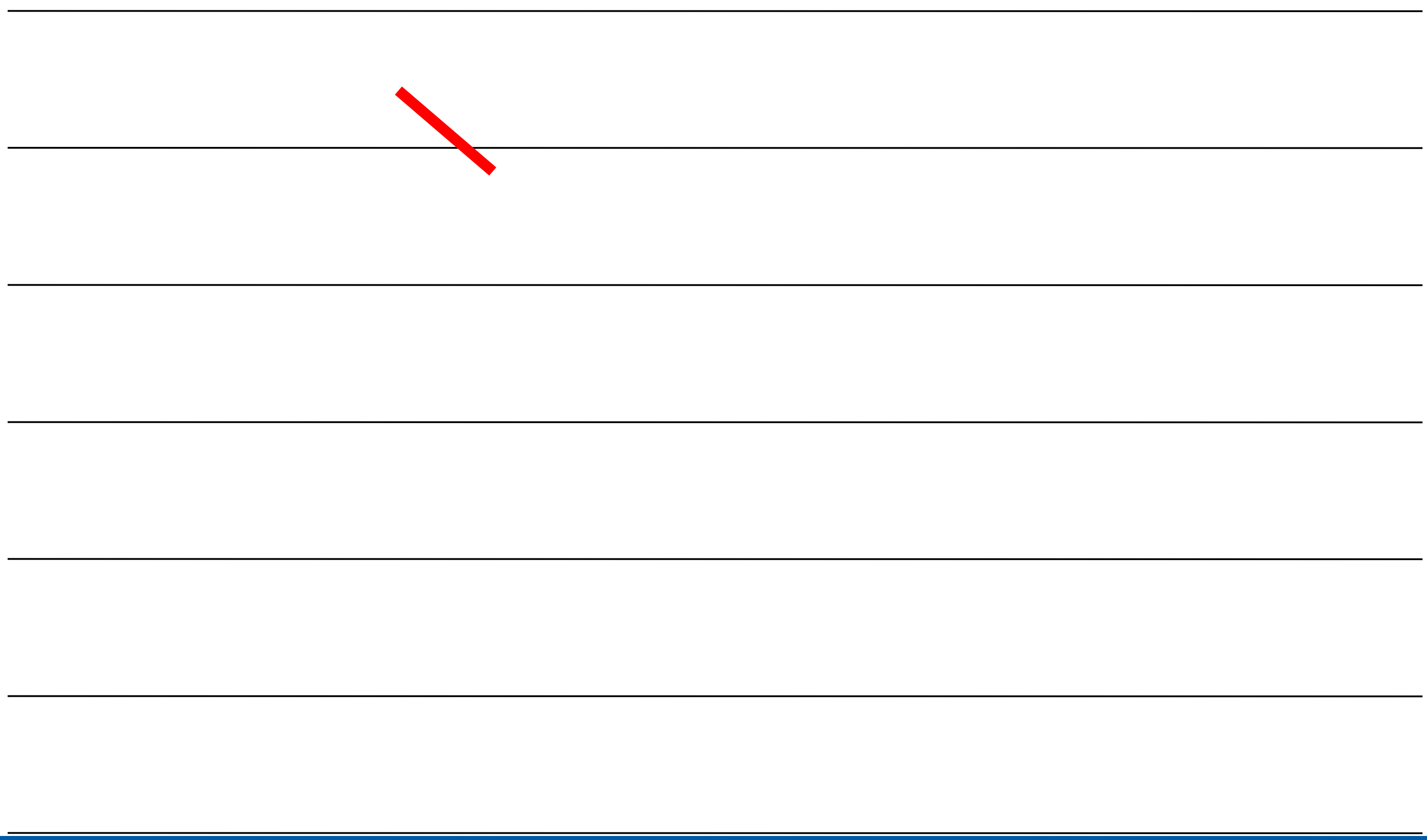


Llavors la probabilitat que el pal toqui una recta serà:

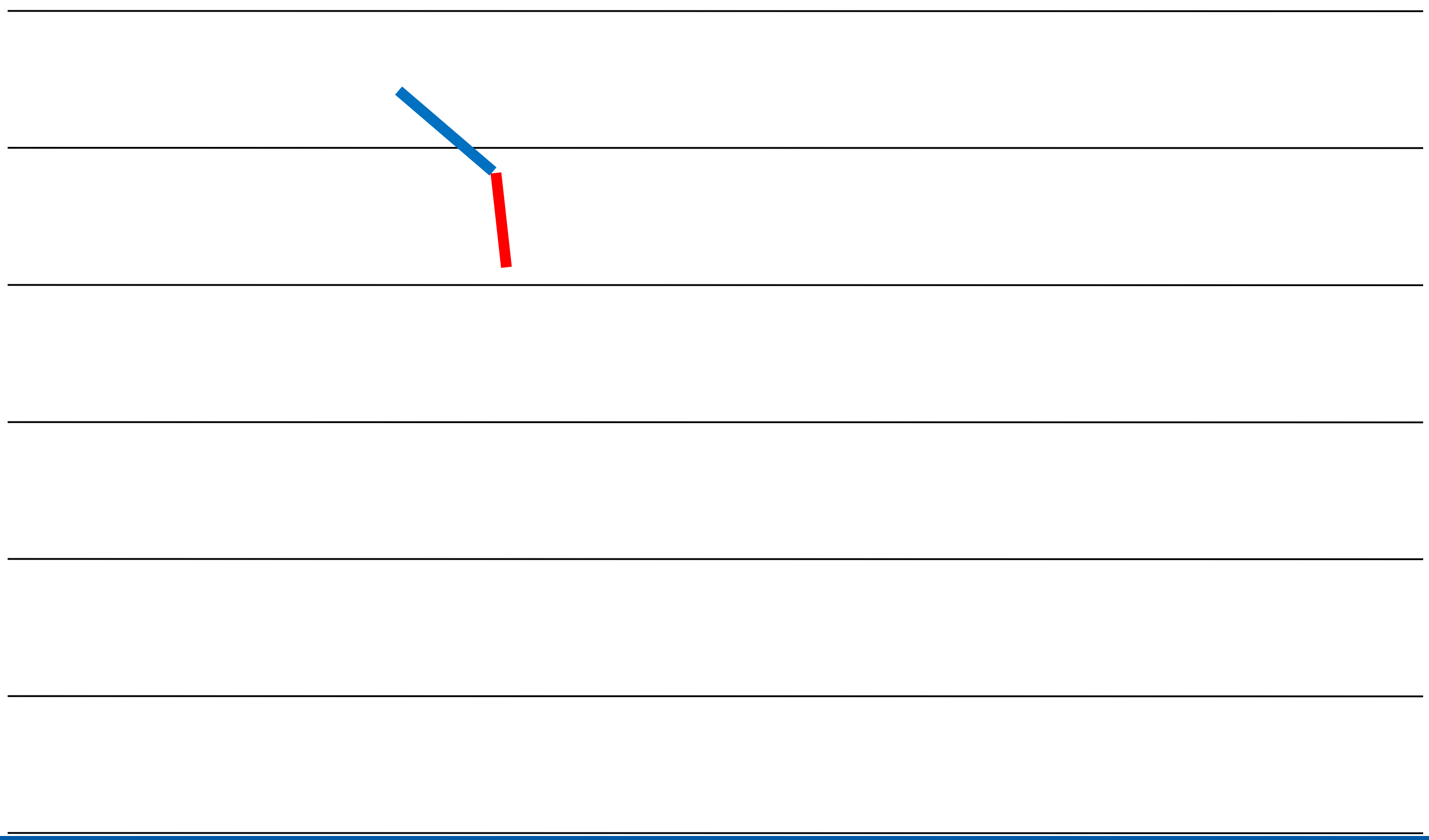
$$\frac{2L}{\pi D}$$

Ara imaginem-nos que tirem una agulla “poligonal”, com formada per agulles petites...

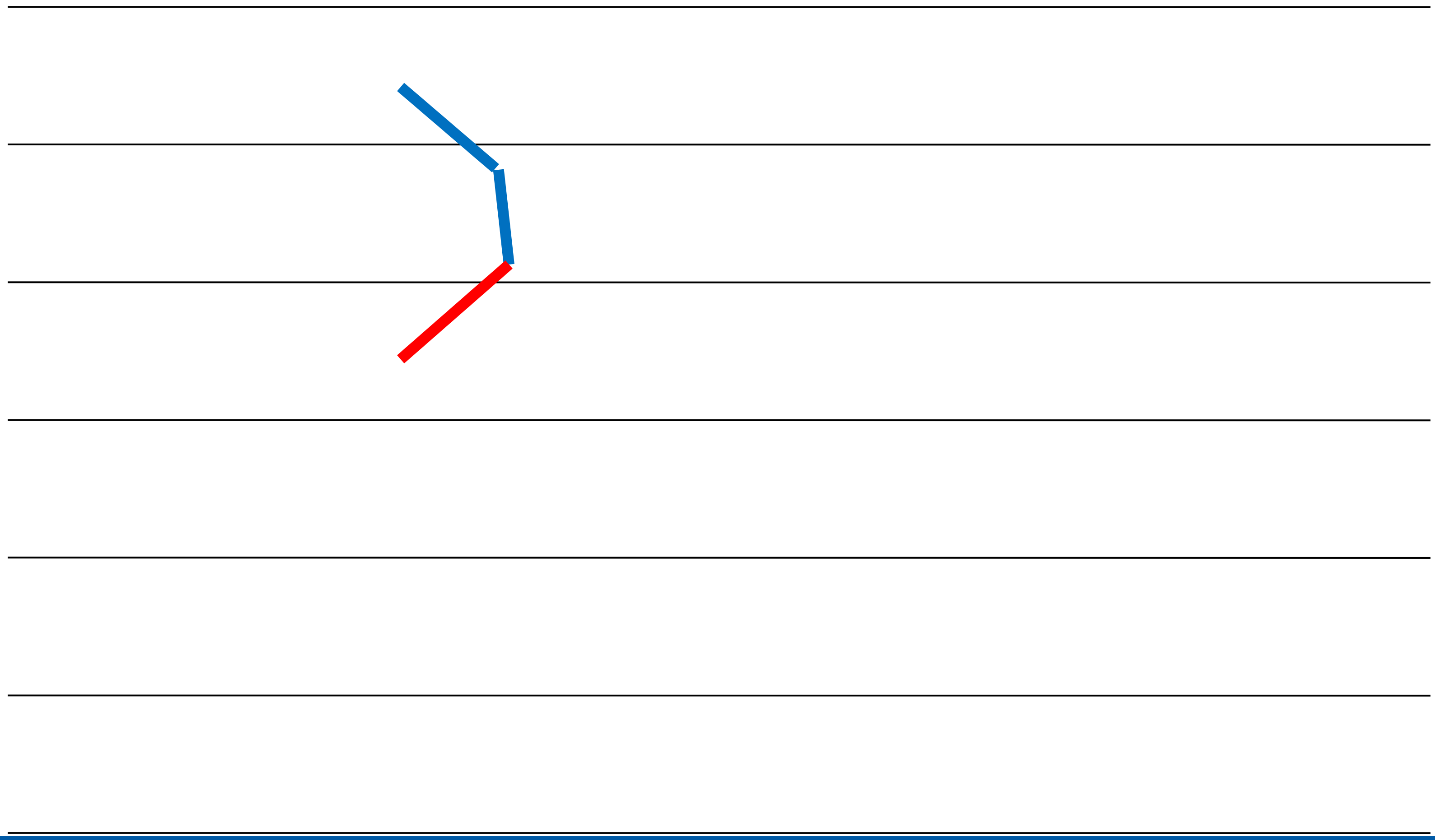
L'esperança matemàtica que un palet de longitud l_1 toqui una ratlla és de: $\dfrac{2l_1}{\pi D}$



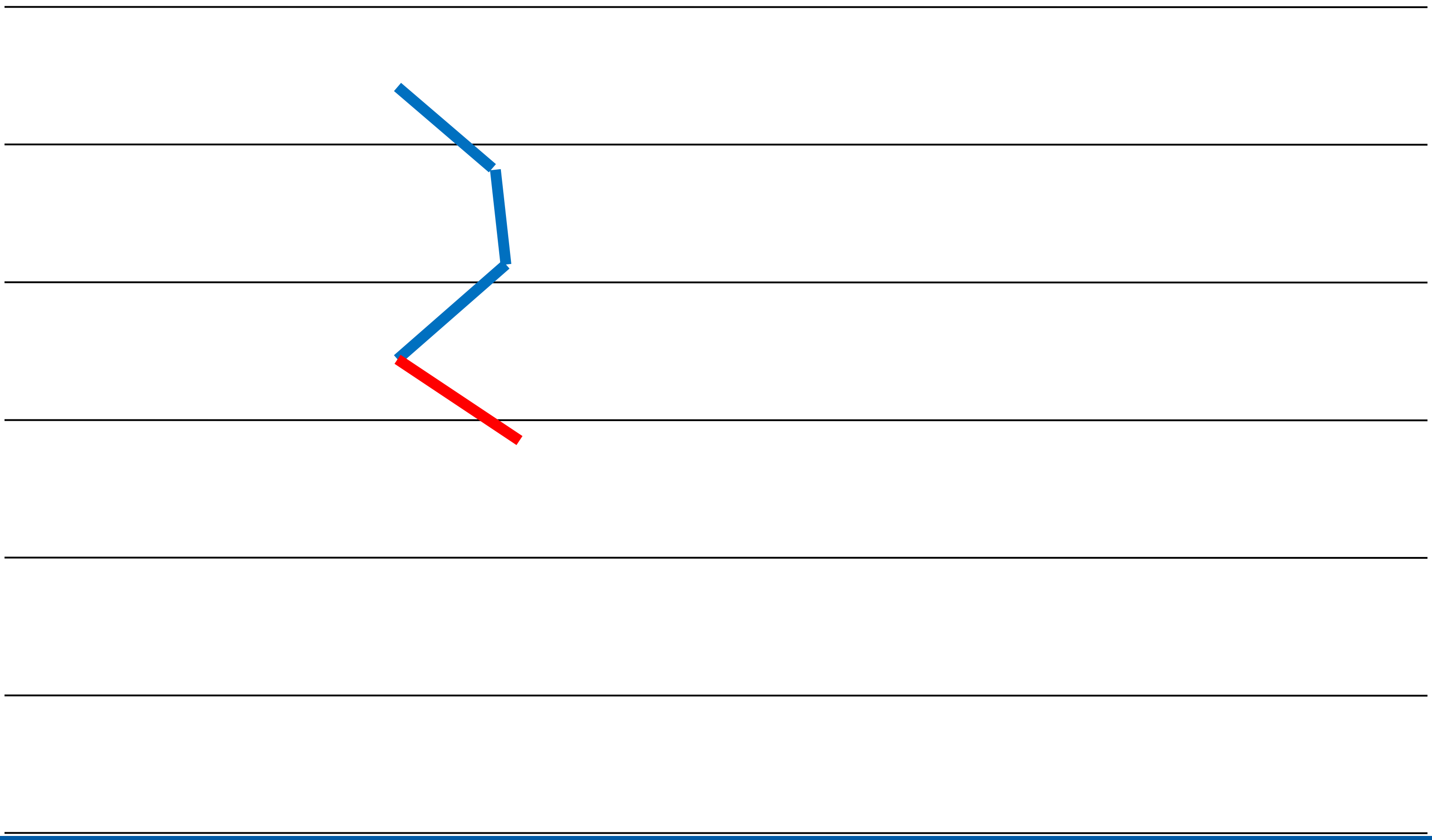
L'esperança matemàtica que un palet de longitud l_2 toqui una ratlla és de: $\dfrac{2l_2}{\pi D}$



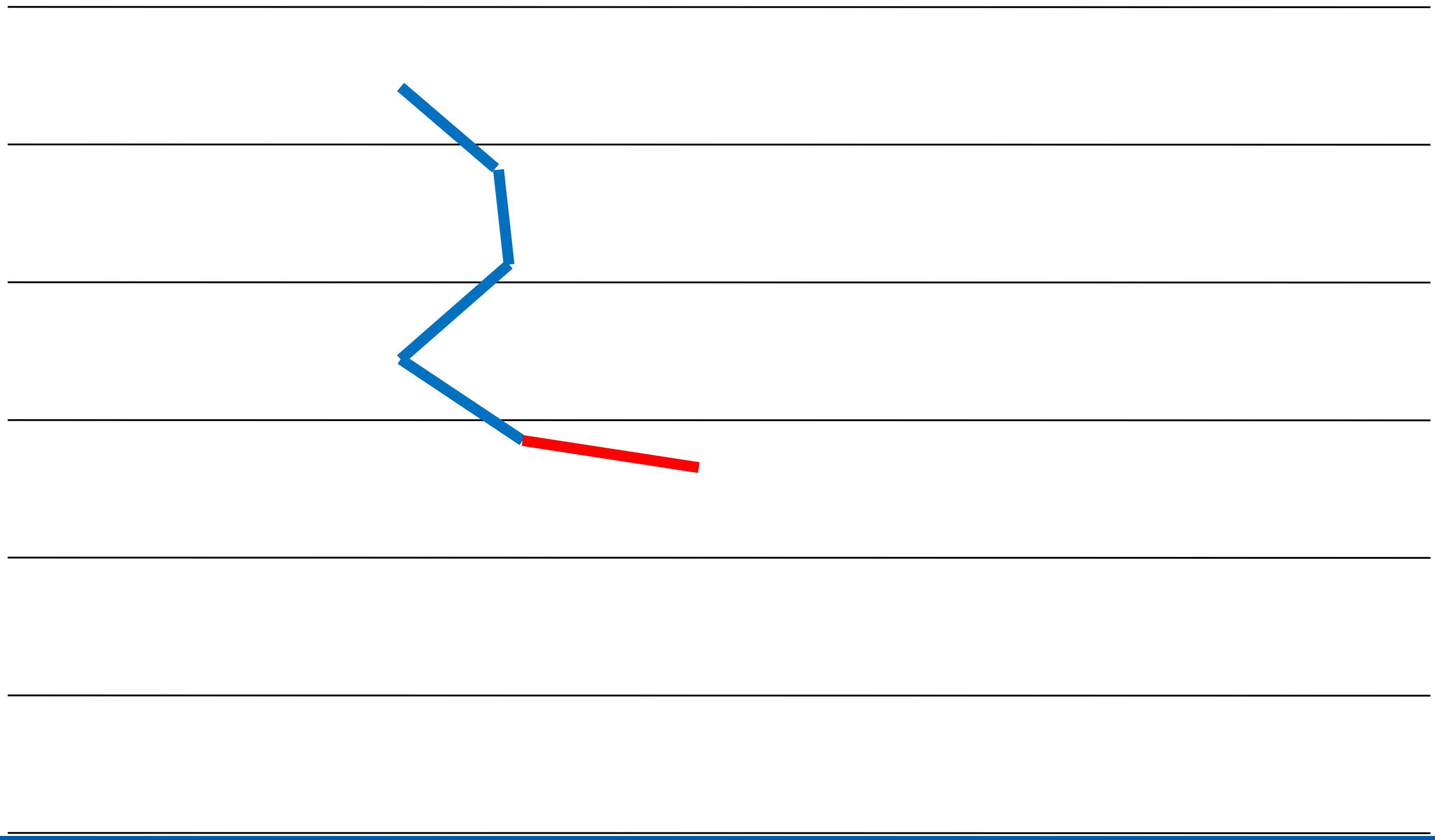
L’esperança matemàtica que un palet de longitud l_3 toqui una ratlla és de: $\dfrac{2l_3}{\pi D}$



L'esperança matemàtica que un palet de longitud l_4 toqui una ratlla és de: $\dfrac{2l_4}{\pi D}$



L'esperança matemàtica que un palet de longitud l_5 toqui una ratlla és de: $\dfrac{2l_5}{\pi D}$



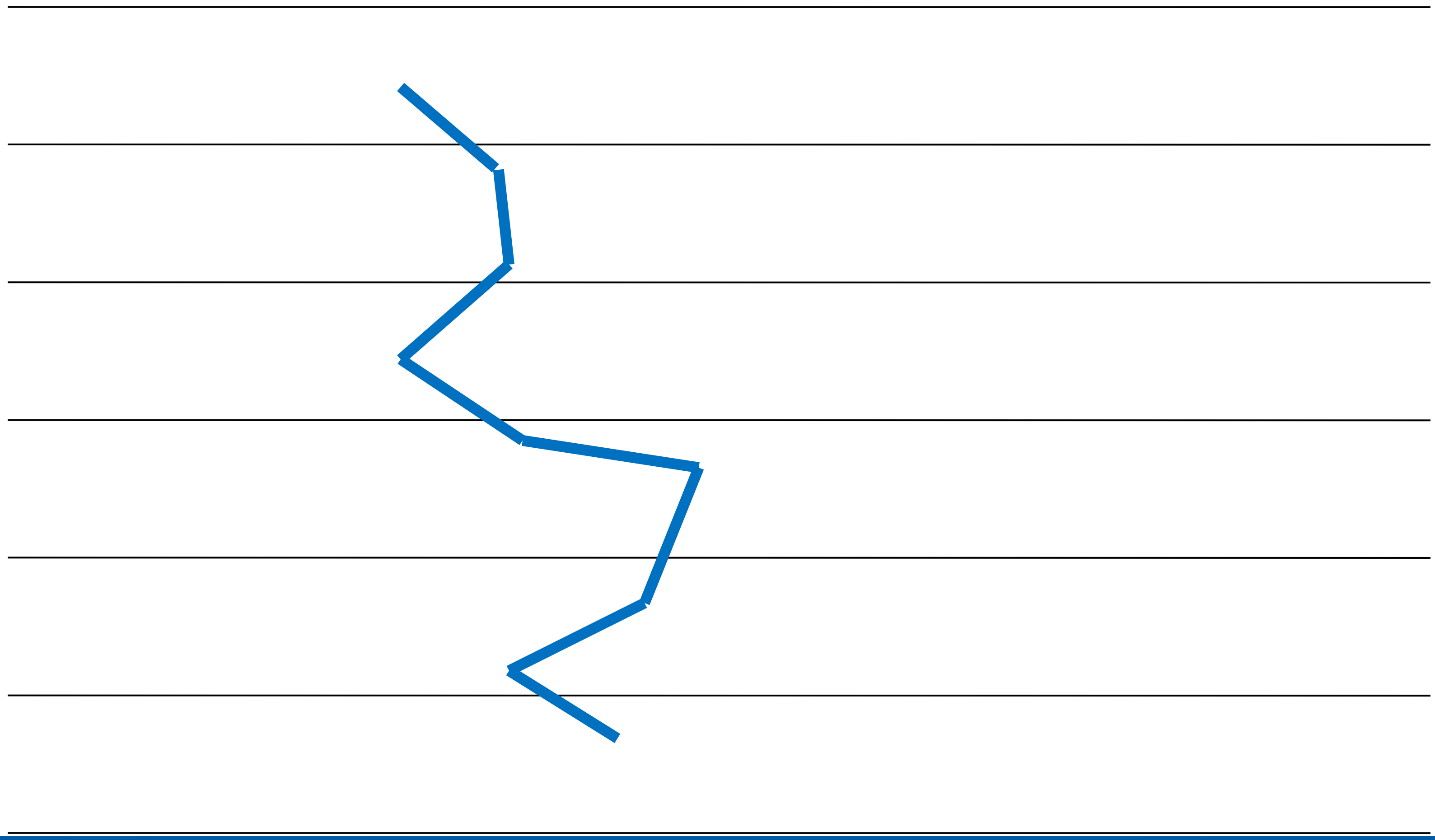
L'esperança matemàtica que un palet de longitud l_6 toqui una ratlla és de: $\dfrac{2l_6}{\pi D}$

L'esperança matemàtica que un palet de longitud l_7 toqui una ratlla és de: $\dfrac{2l_7}{\pi D}$

L'esperança matemàtica que un palet de longitud l_8 toqui una ratlla és de: $\dfrac{2l_8}{\pi D}$

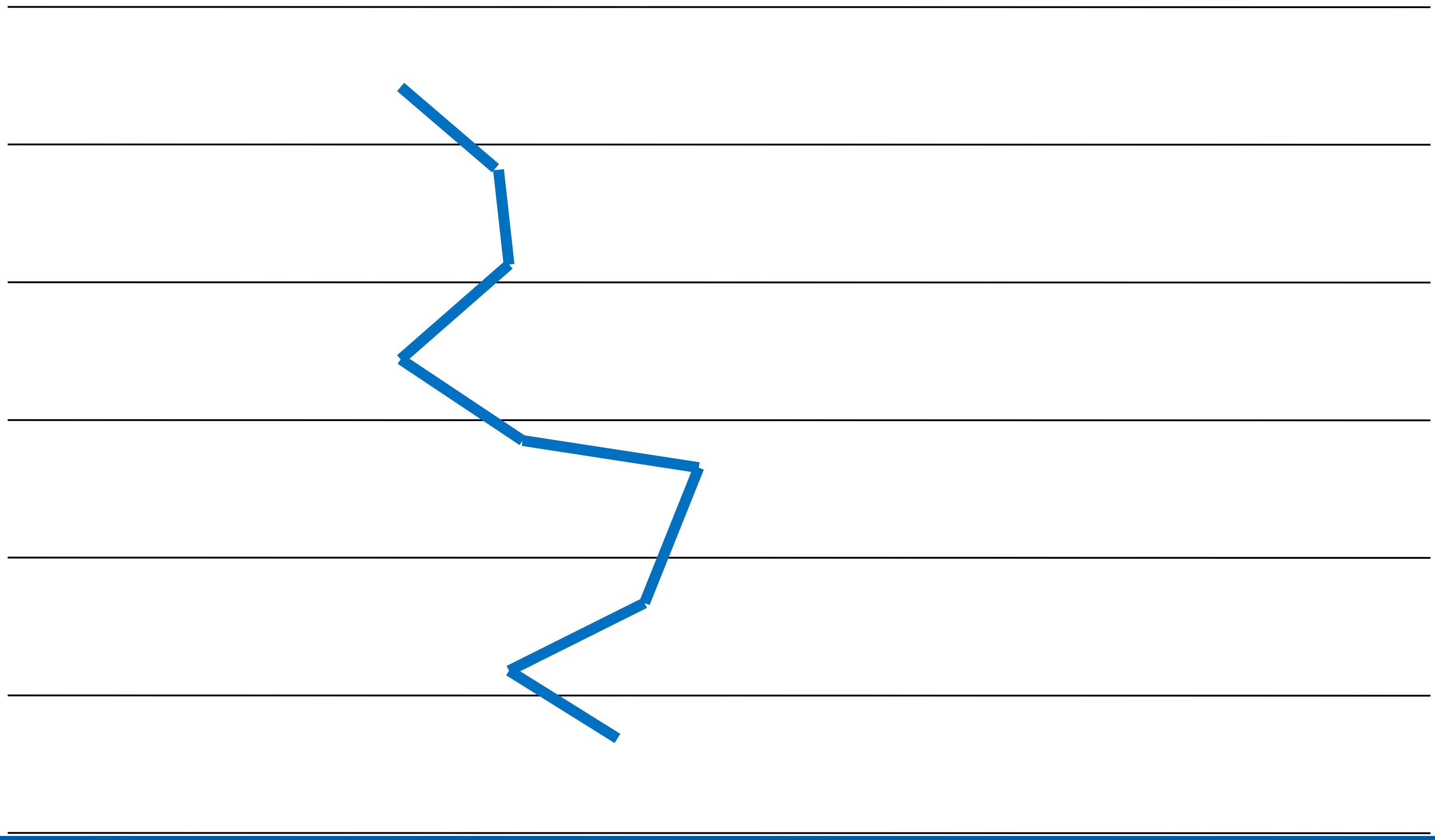
En quants punts podem esperar que la poligonal talli el tramat de rectes?

$$\frac{2l_1}{\pi D}+\frac{2l_2}{\pi D}+\frac{2l_3}{\pi D}+\frac{2l_4}{\pi D}+\frac{2l_5}{\pi D}+\frac{2l_6}{\pi D}+\frac{2l_7}{\pi D}+\frac{2l_8}{\pi D}$$

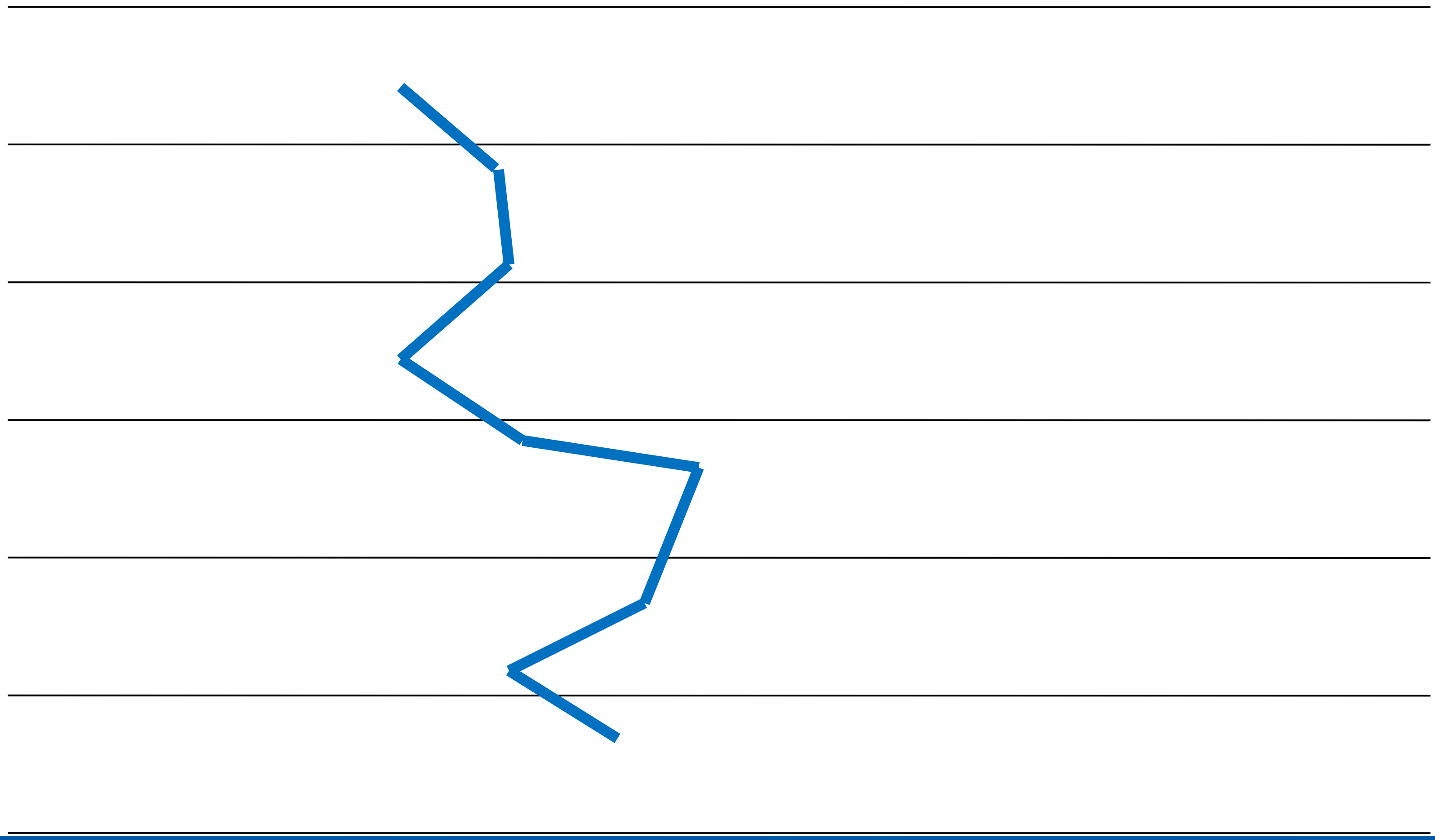


En quants punts podem esperar que la poligonal talli el tramat de rectes?

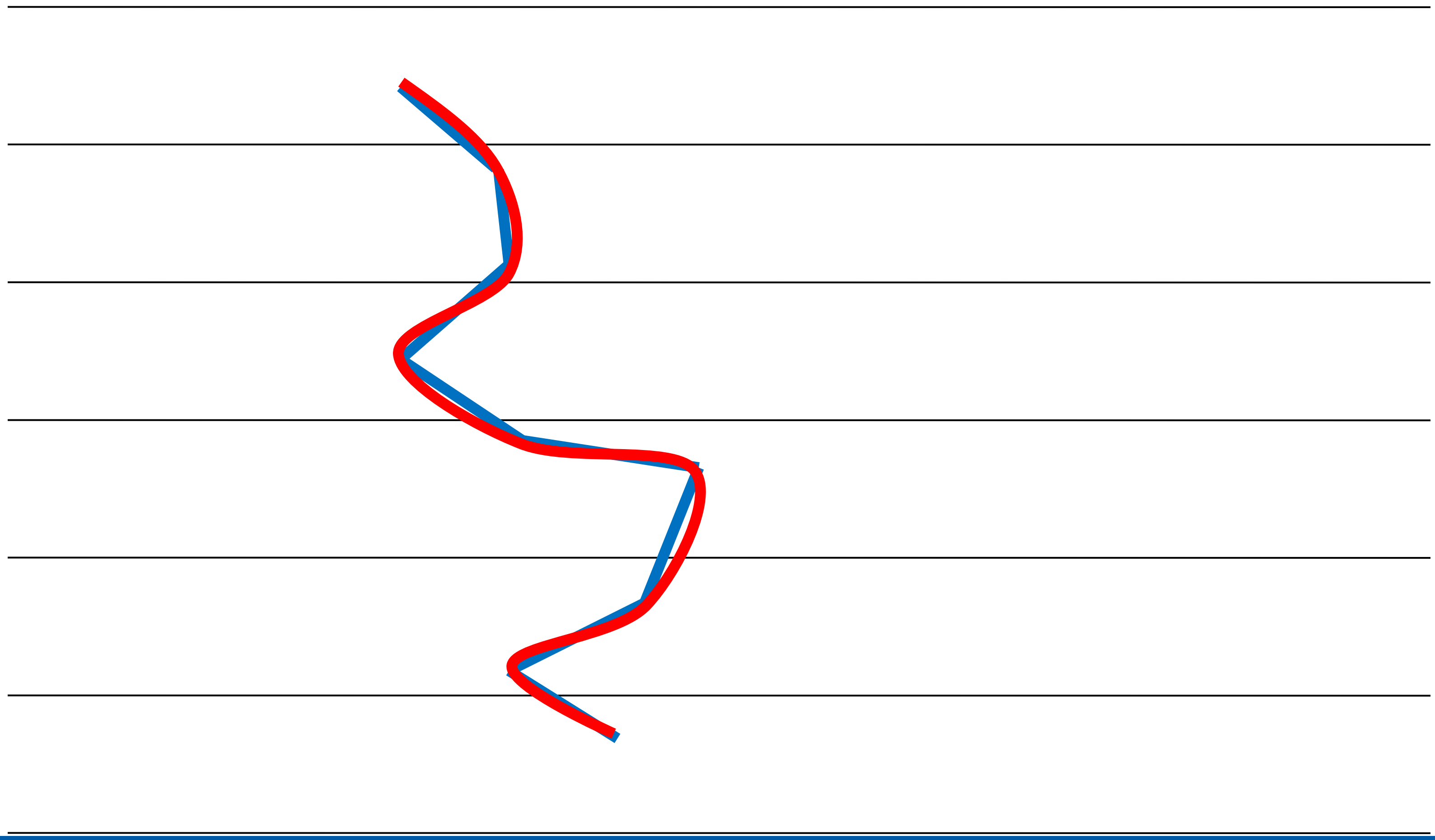
$$\frac{2(l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 + l_6 + l_7 + l_8)}{\pi D}$$



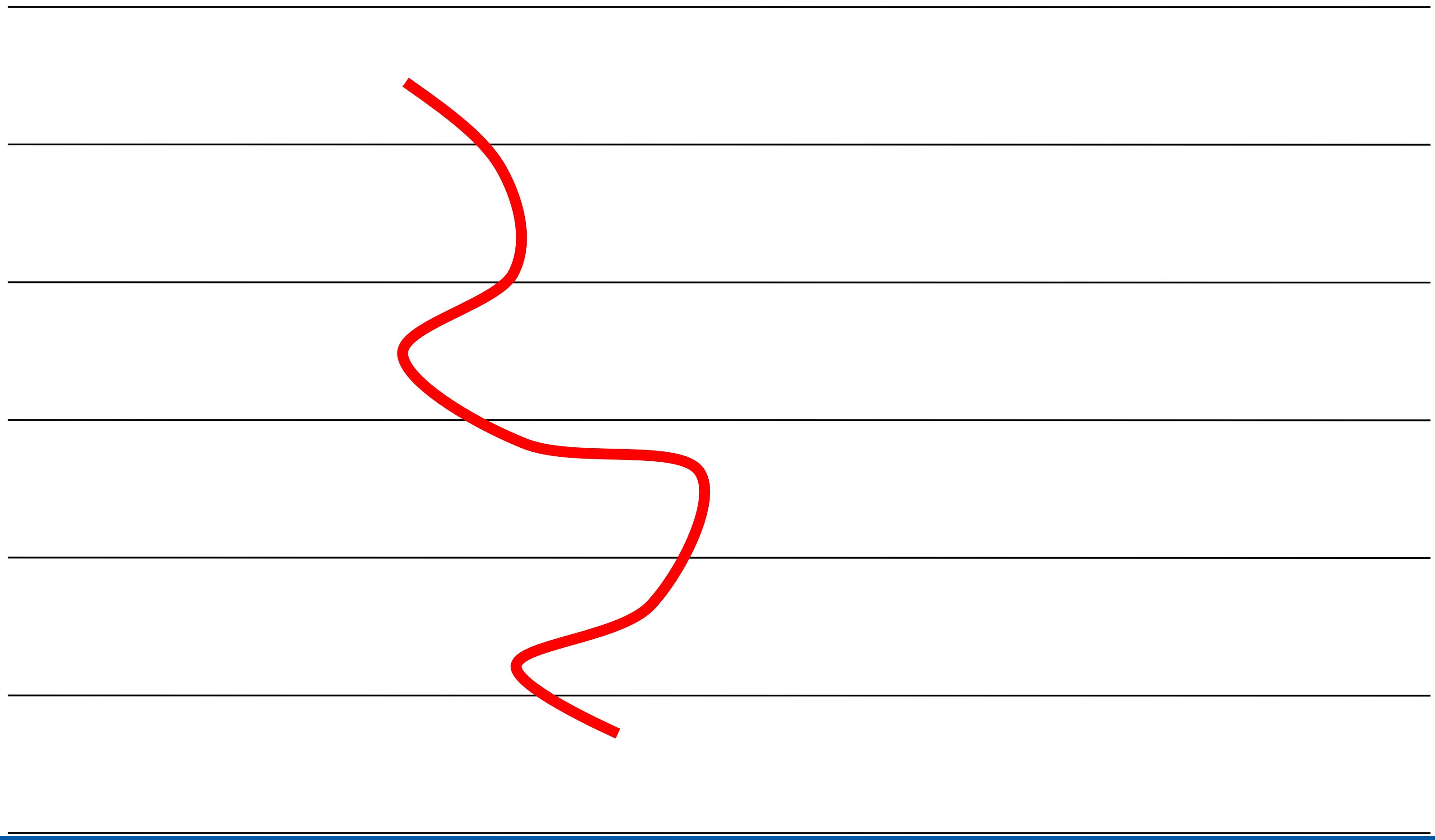
Si la longitud total de la poligonal és L , podem esperar que talli el tramat en $\dfrac{2L}{\pi D}$ punts.



Si fem el mateix amb infinites agulles tan petites com vulguem tindrem una corba de longitud L i el nombre de talls esperat serà $\dfrac{2L}{\pi D}$

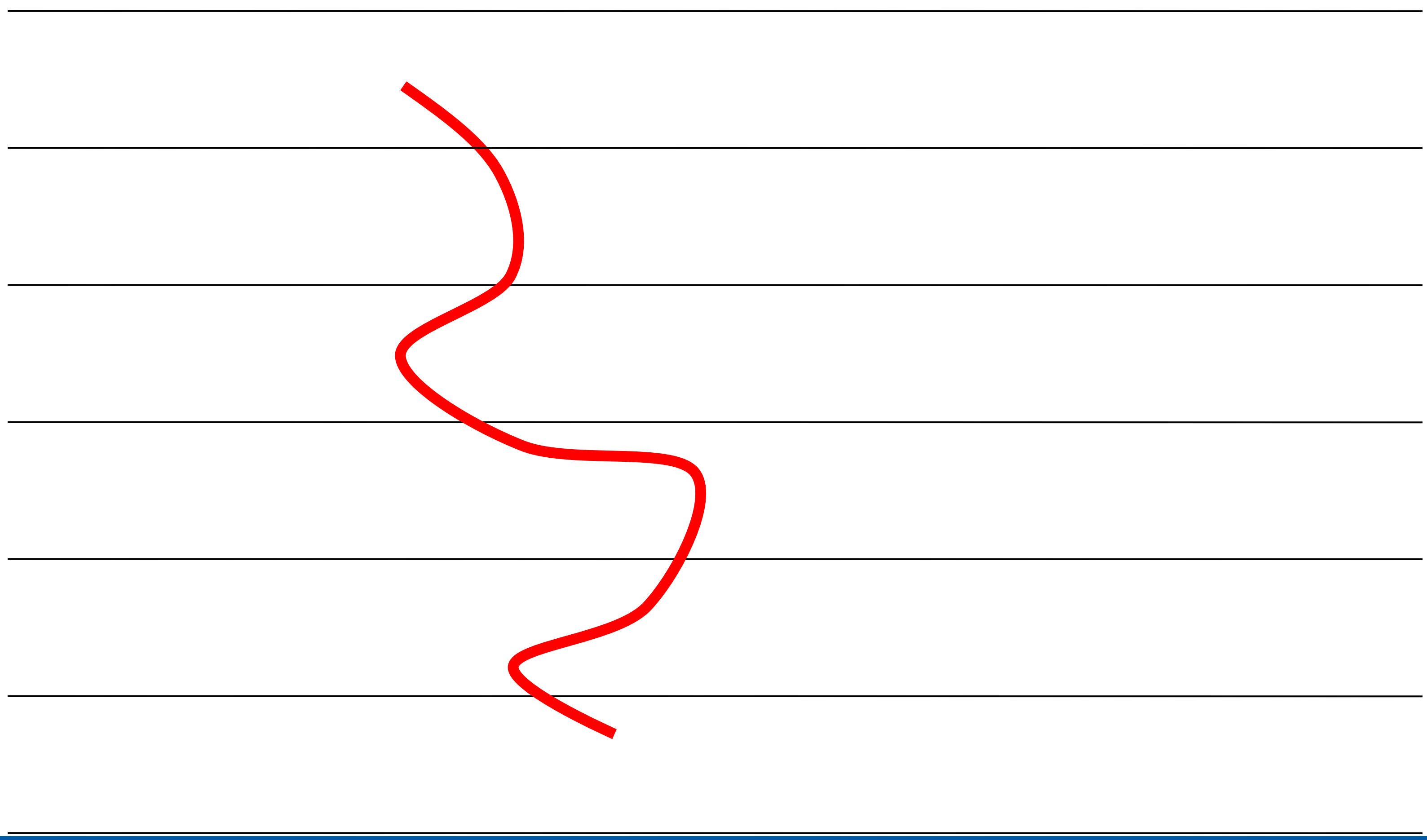


Si fem el mateix amb infinites agulles tan petites com vulguem tindrem una corba de longitud L i el nombre de talls esperat serà $\dfrac{2L}{\pi D}$



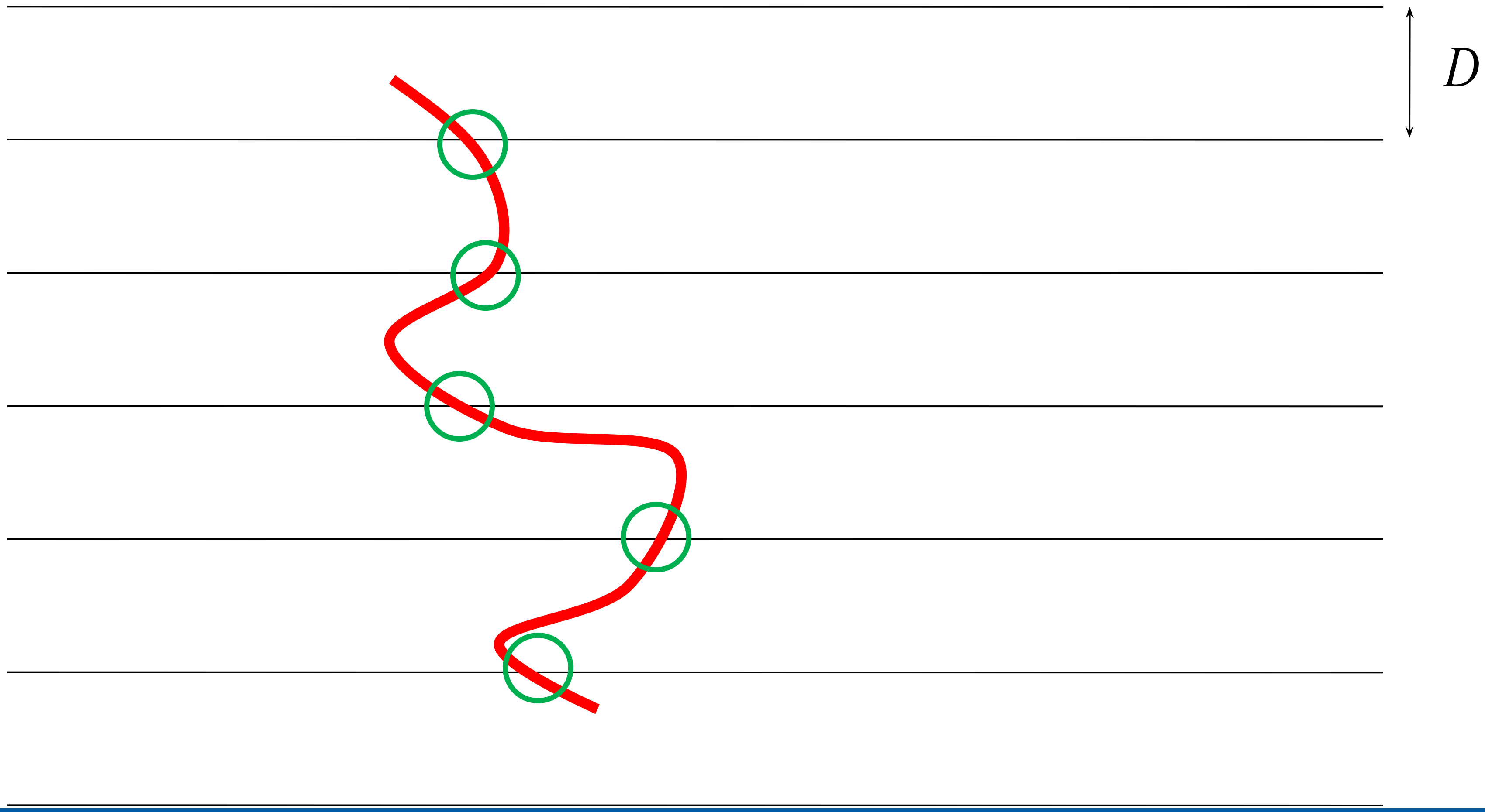
Així

$$Talls \approx \frac{2L}{\pi D}$$



Comptant el nombre aproximat de talls podrem estimar la longitud d'una corba:

$$L \approx \frac{\pi \cdot D \cdot Talls}{2}$$



Pierre-Simon Laplace

(Beaumont-en-Auge 1749 - París, 1827)

“Així, es podria fer servir el càlcul de probabilitats per rectificar corbes (...)”

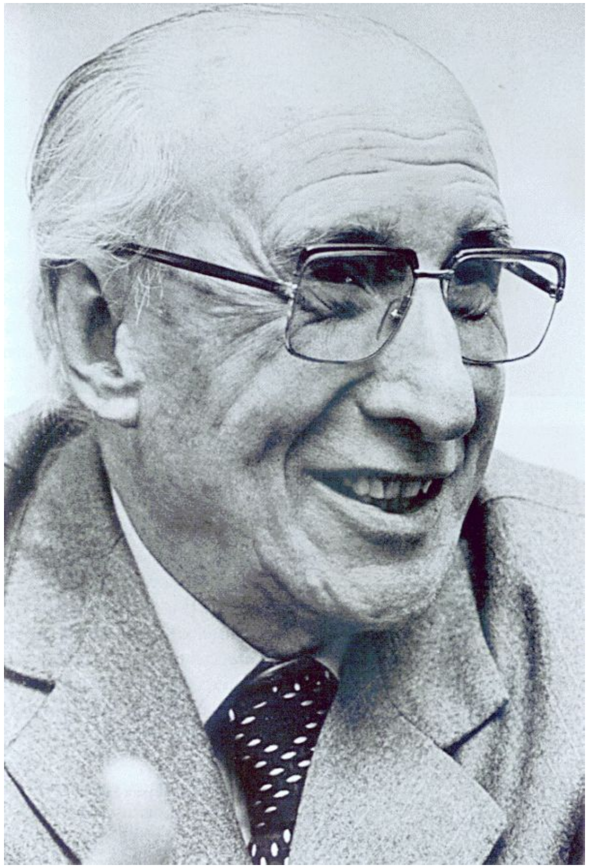
Mesurar la longitud de corbes

Pierre-Simon Laplace

(Beaumont-en-Auge 1749 - París, 1827)

“Així, es podria fer servir el càlcul de probabilitats per rectificar corbes (...) però sens dubte els geòmetres no empraran mai aquest mitjà”

Théorie Analytique des Probabilités, 1812

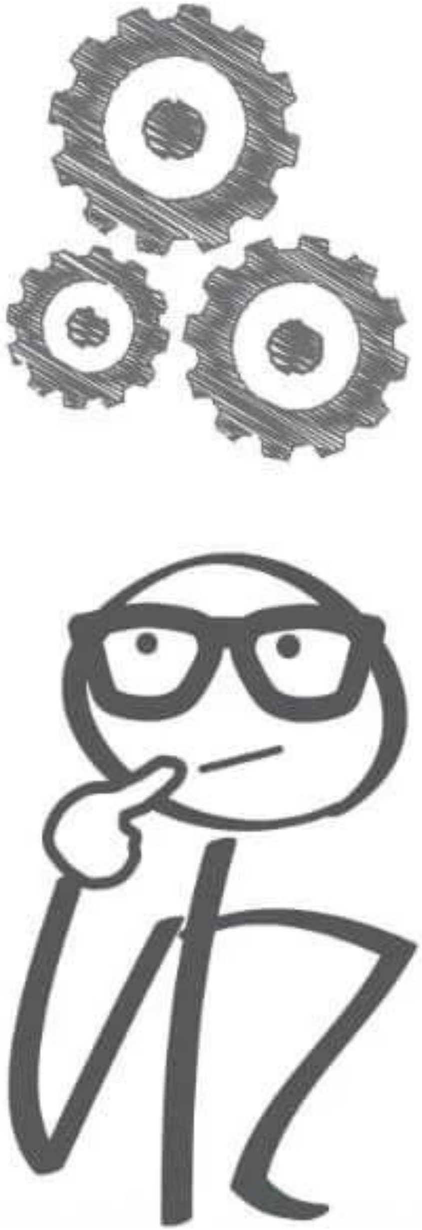


Lluís A. Santaló

“Malgrat tot Laplace s’equivocava. Aquestes fórmules s’han emprat sovint, un segle després de la seva afirmació per mesurar longituds de corbes (...)”

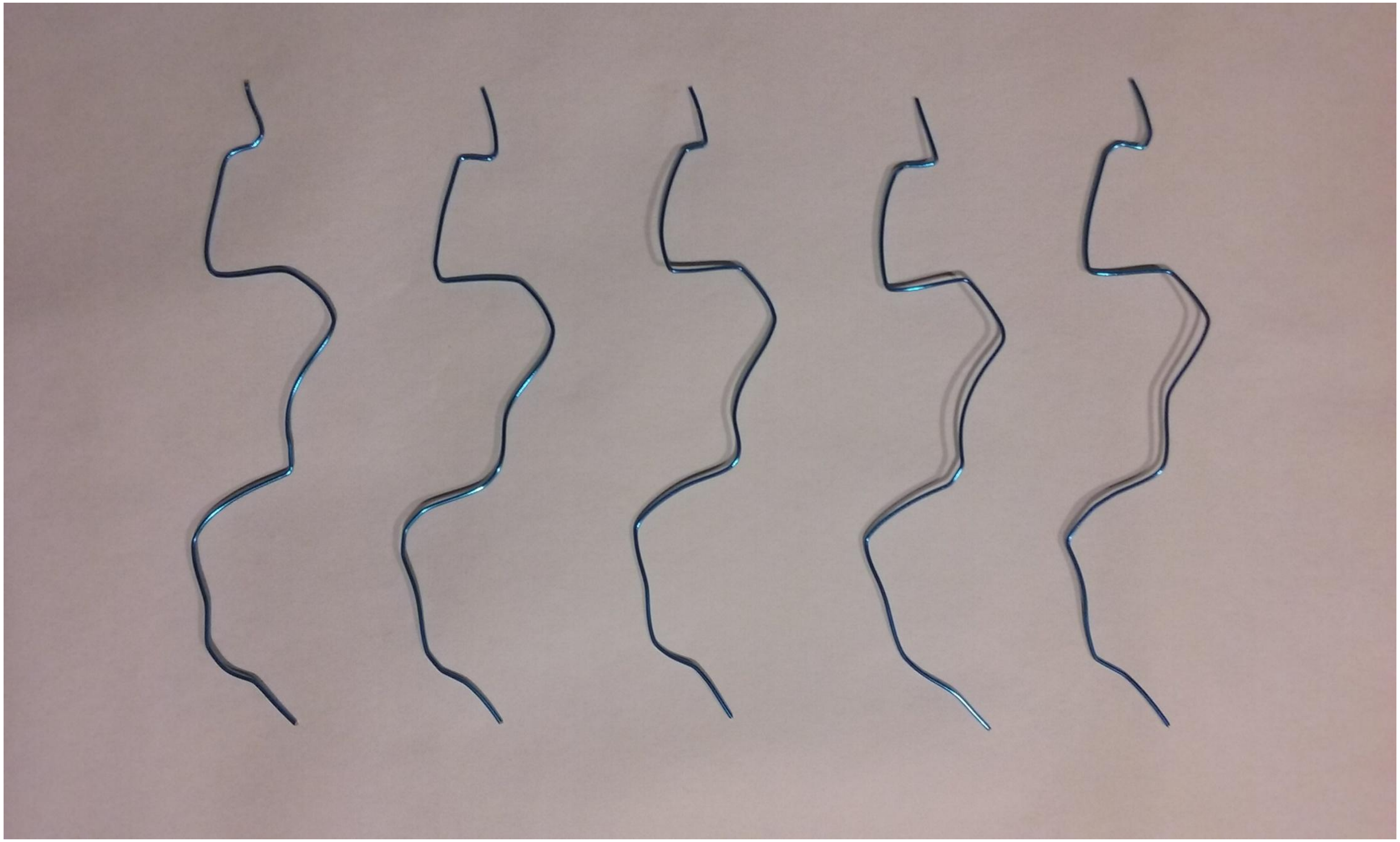
La matemàtica: una filosofia i una tècnica, 1993

Què podríem mesurar?



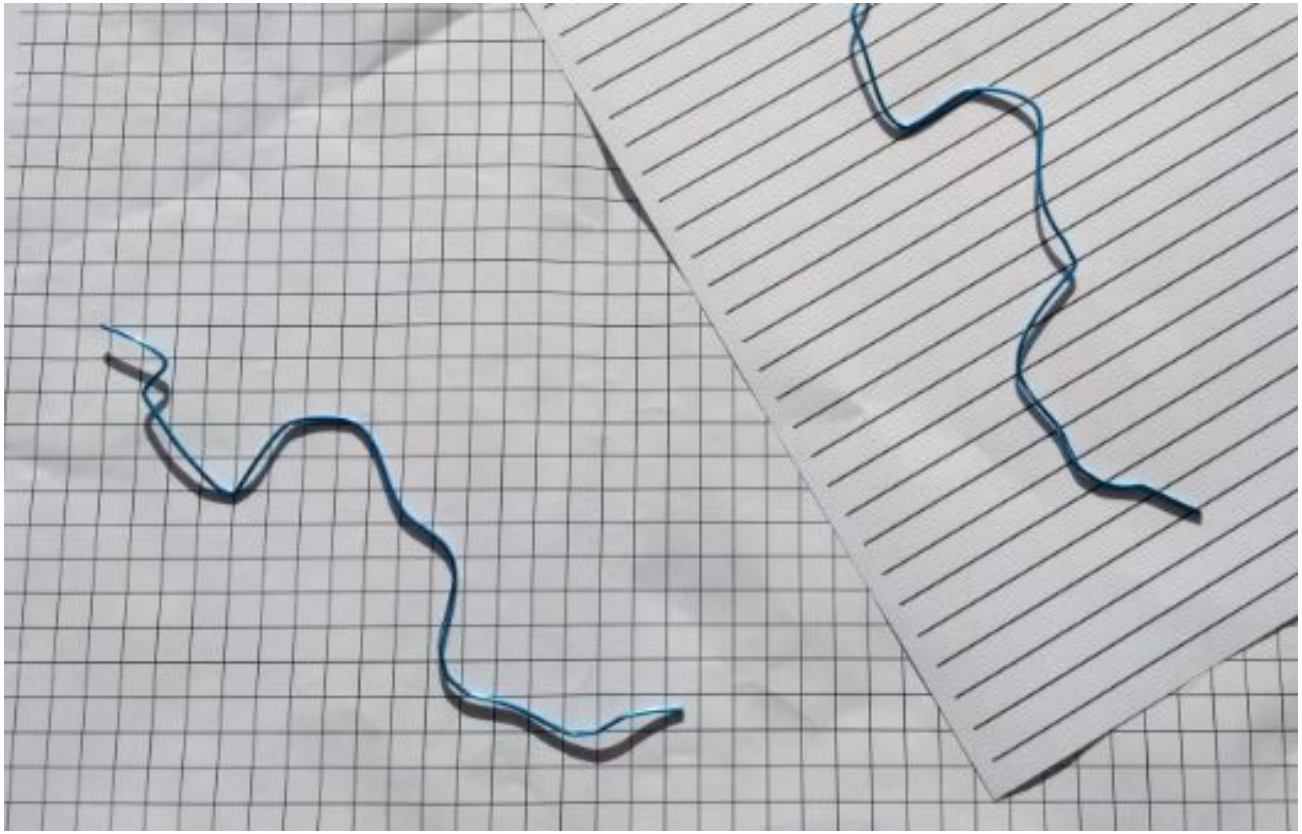
Tenim trossos iguals de filferro doblegat

Mesurem-los?

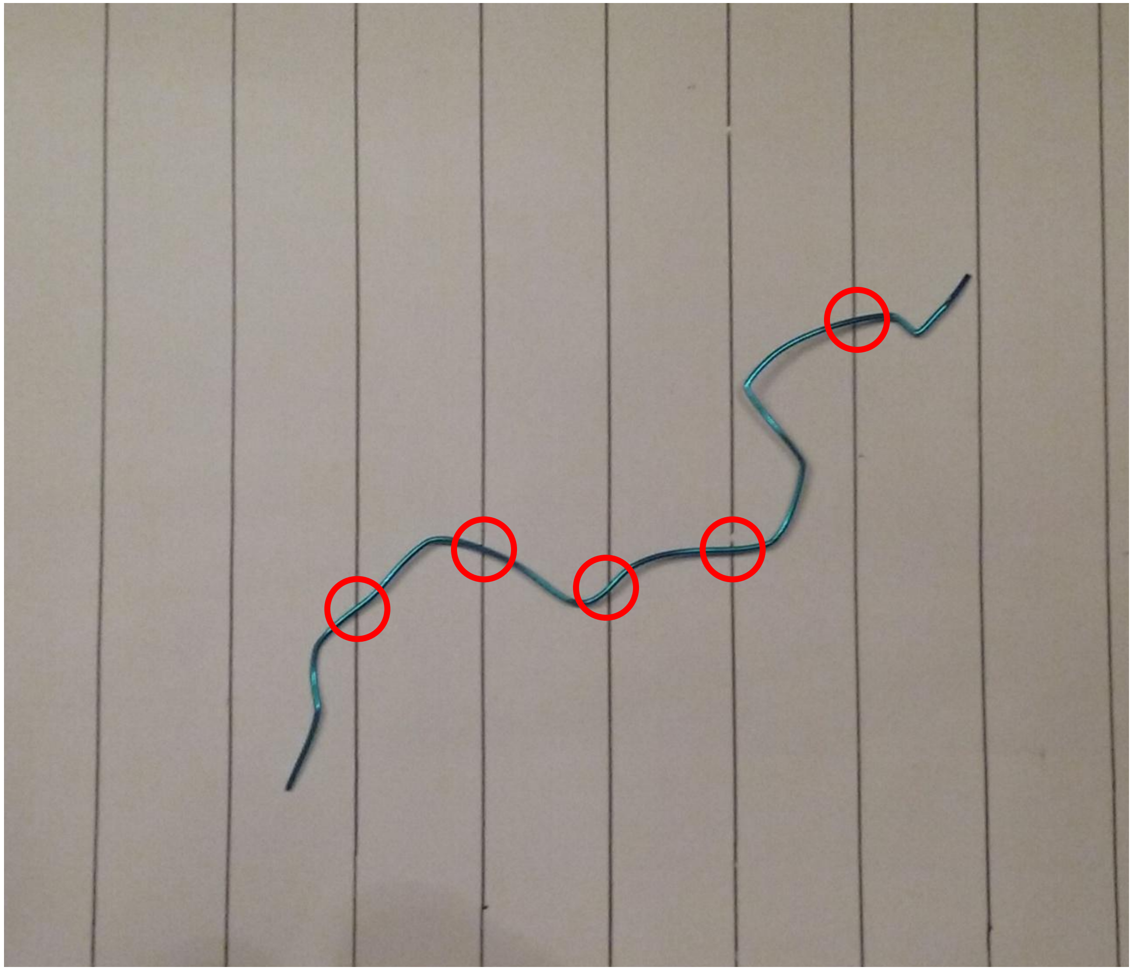


Es tracta de tirar el filferro sobre un tramat de línies paral·leles i comptar en quants punts talla les línies.

Ho farem sobre un tramat on la distància entre línies és d'1 cm

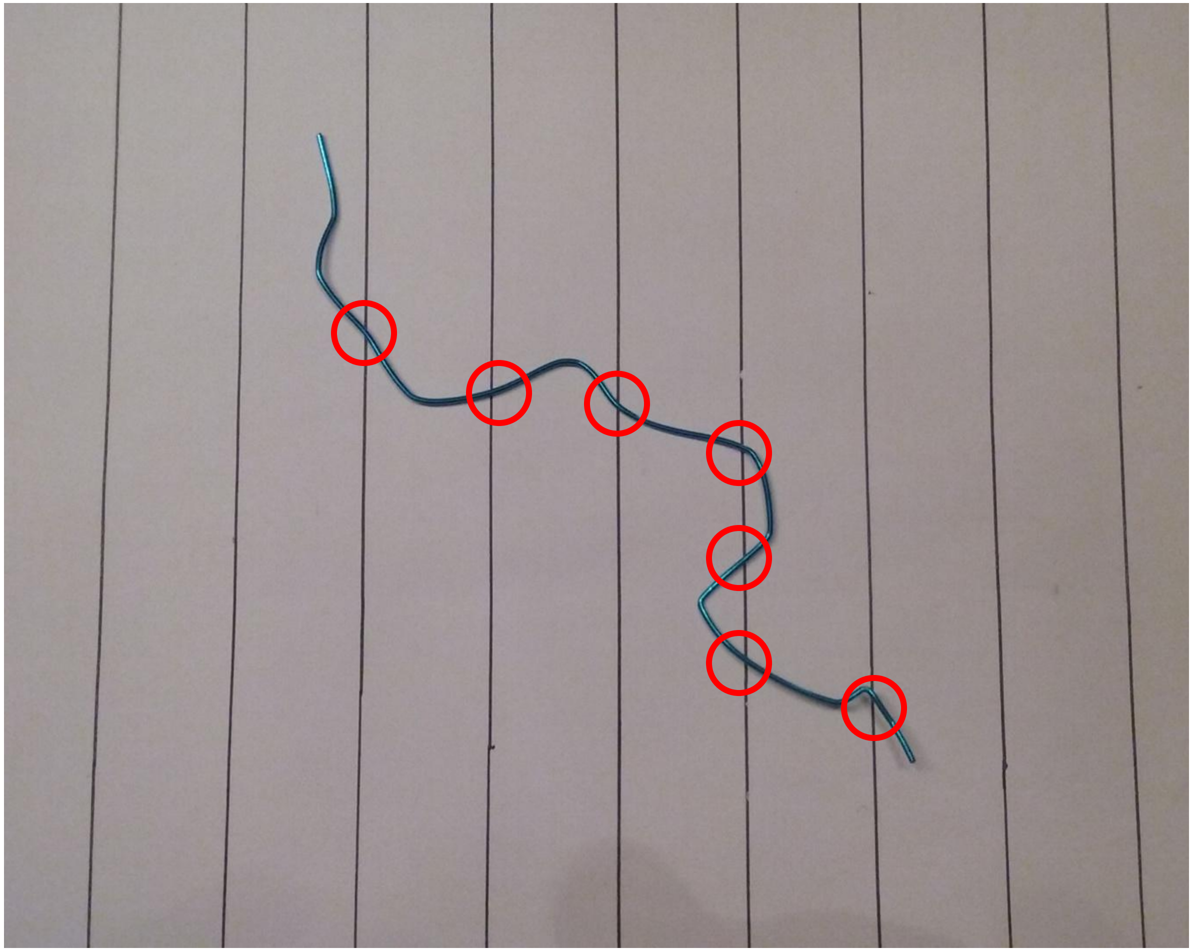


Hem de comptar en quants punts talla



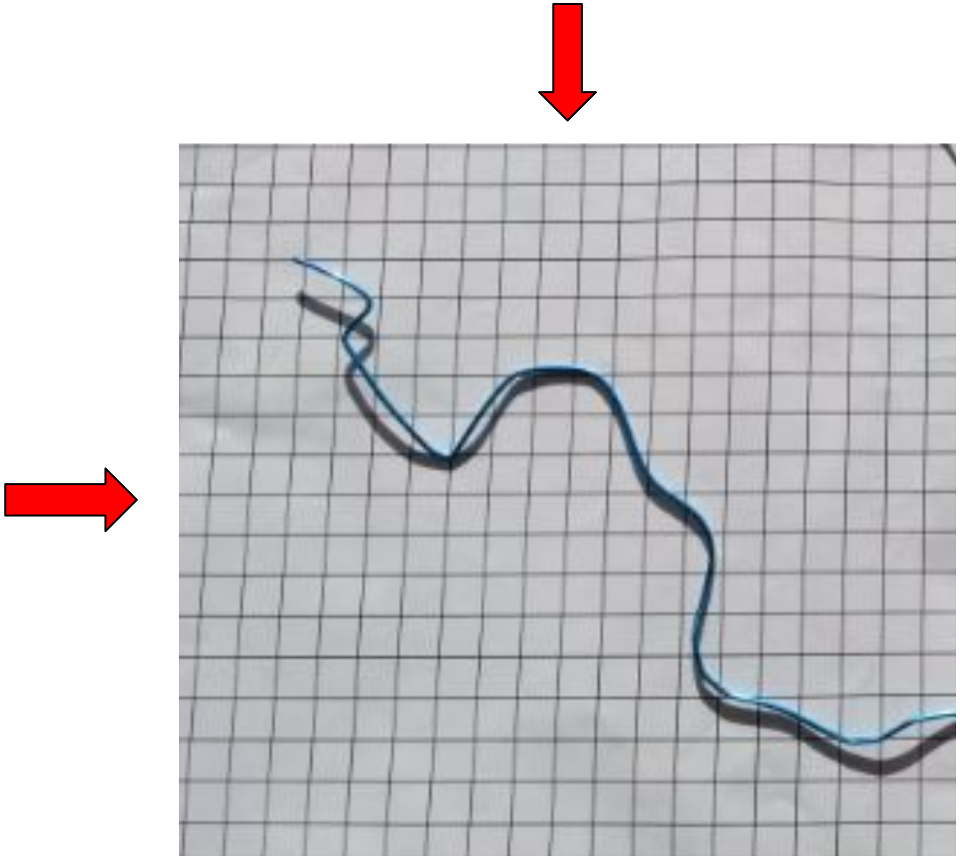
5
punts

Comptant els punts de tall...



7
punts

Si ho tirem sobre una quadrícula de 1 cm x 1 cm. Cada “tirada física” ens donarà dues dades: el nombre de talls en la família de rectes verticals i el nombre de talls en la família de rectes horitzontals. Compta com a dues tirades!



Som-hi!

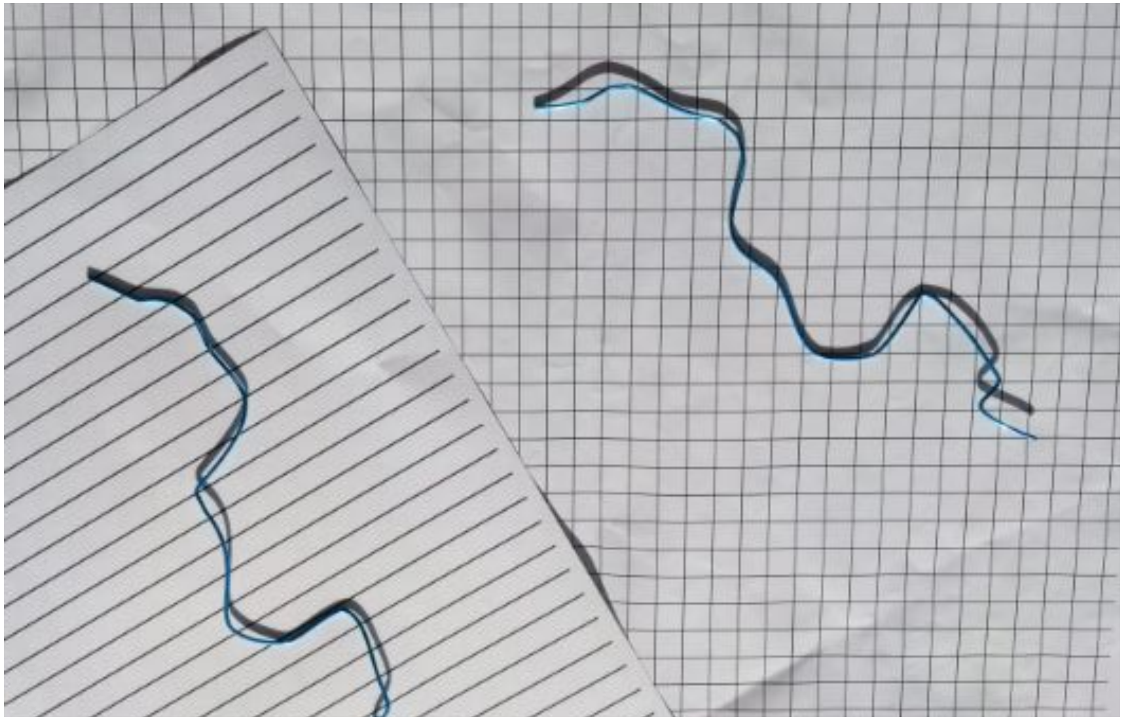
Els diferents grups podeu anar tirant i apuntar els nombres de talls en el full de dades.

En acabar, posarem en comú el nombre de tirades fetes per cada grup i el nombre de talls total observat.

Així podrem fer la mitjana del nombre de talls per tirada.

Amb aquesta mitjana de talls aplicarem la fórmula que ens donarà una estimació de la longitud del filferro (recordem que D = 1 cm):

$$L \approx \frac{\pi \cdot D \cdot Talls}{2}$$



	A	B	C	D	E
1		Tirades	Talls		
2	Equip 1	12	163		Mitjana de talls per tirada:
3	Equip 2				13,58
4	Equip 3				
5	Equip 4				
6	Equip 5				Longitud estimada per al filferro:
7	Equip 6				21,33
8	Equip 7				
9	Equip 8				
10	Equip 9				
11	Equip 10				
12	Suma:	12	163		
13					
14					

UNIVERSITAT DE BARCELONA

Grup Cúbic

3a Jornada de Didàctica

Tirar Entre Rectes (TER) trossos de filferro

Feu tirades i comptem quants talls es fan en cada tirada.

Recordeu que, si emprem la quadrícula, cal comptar els talls en cada direcció per separat.

Tirada	Talls	Tirada	Talls	Tirada	Talls	Tirada	Talls
1		1		1		1	
2		2		2		2	
3		3		3		3	
4		4		4		4	
5		5		5		5	
6		6		6		6	
SUMA		SUMA		SUMA		SUMA	

Nombre total de tirades fetes:

Suma de tots els punts de tall:

Després ho posarem en comú, farem la mitjana del nombre de talls per tirada i aplicarem la fórmula per calcular la longitud del filferro.

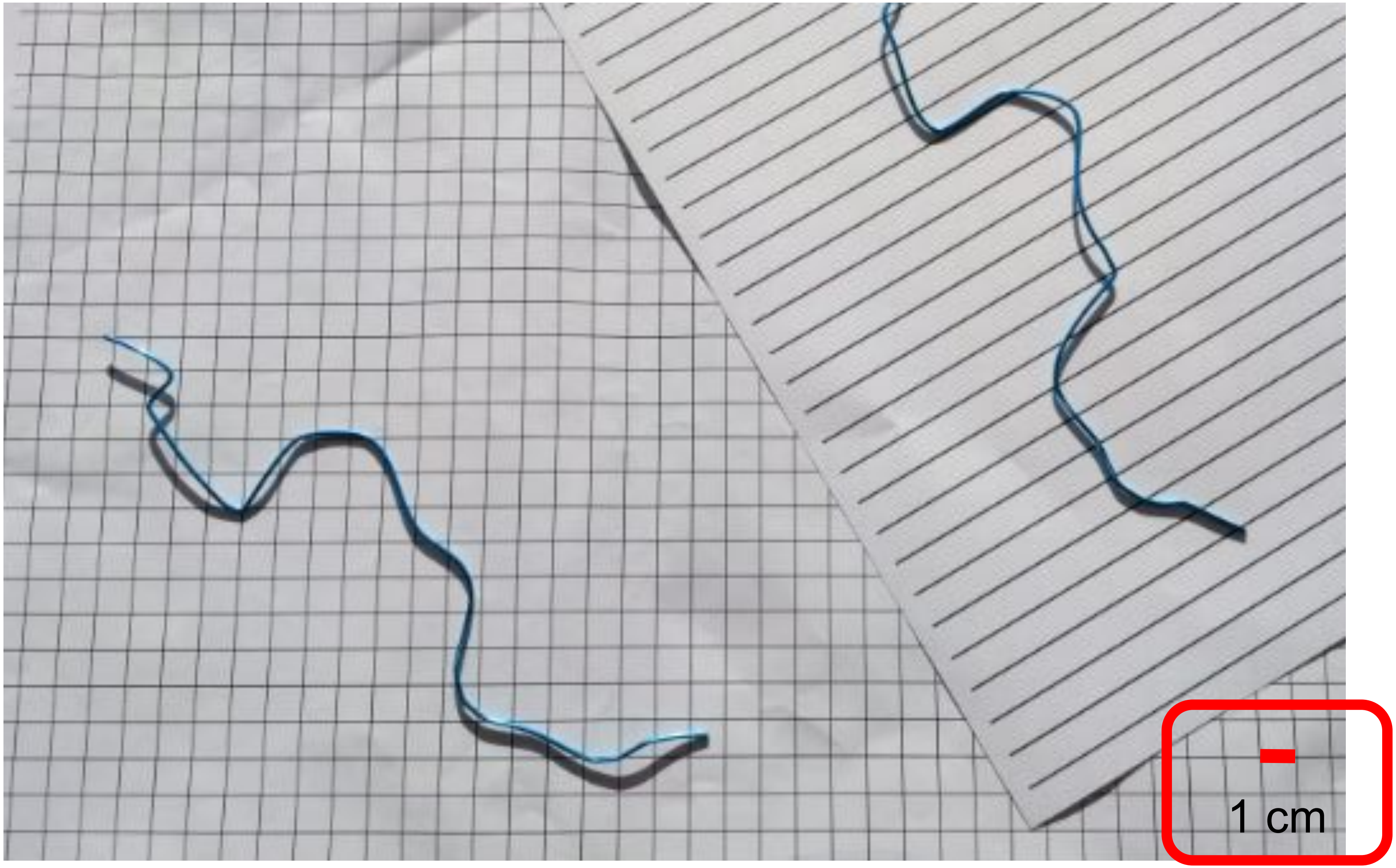
$$L \approx \frac{\pi \cdot D \cdot Talls}{2}$$

6 minuts

Quina longitud hem obtingut?

?

Experiència 1:   D = 1 cm

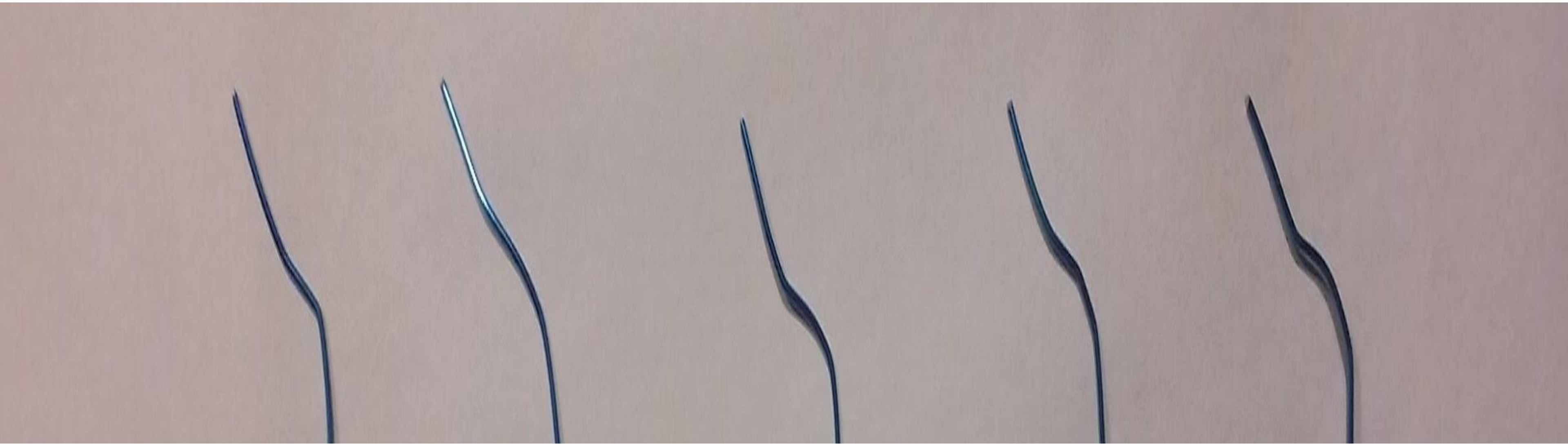


Després de 50 tirades vàrem fer la mitjana dels punts de tall obtinguts...

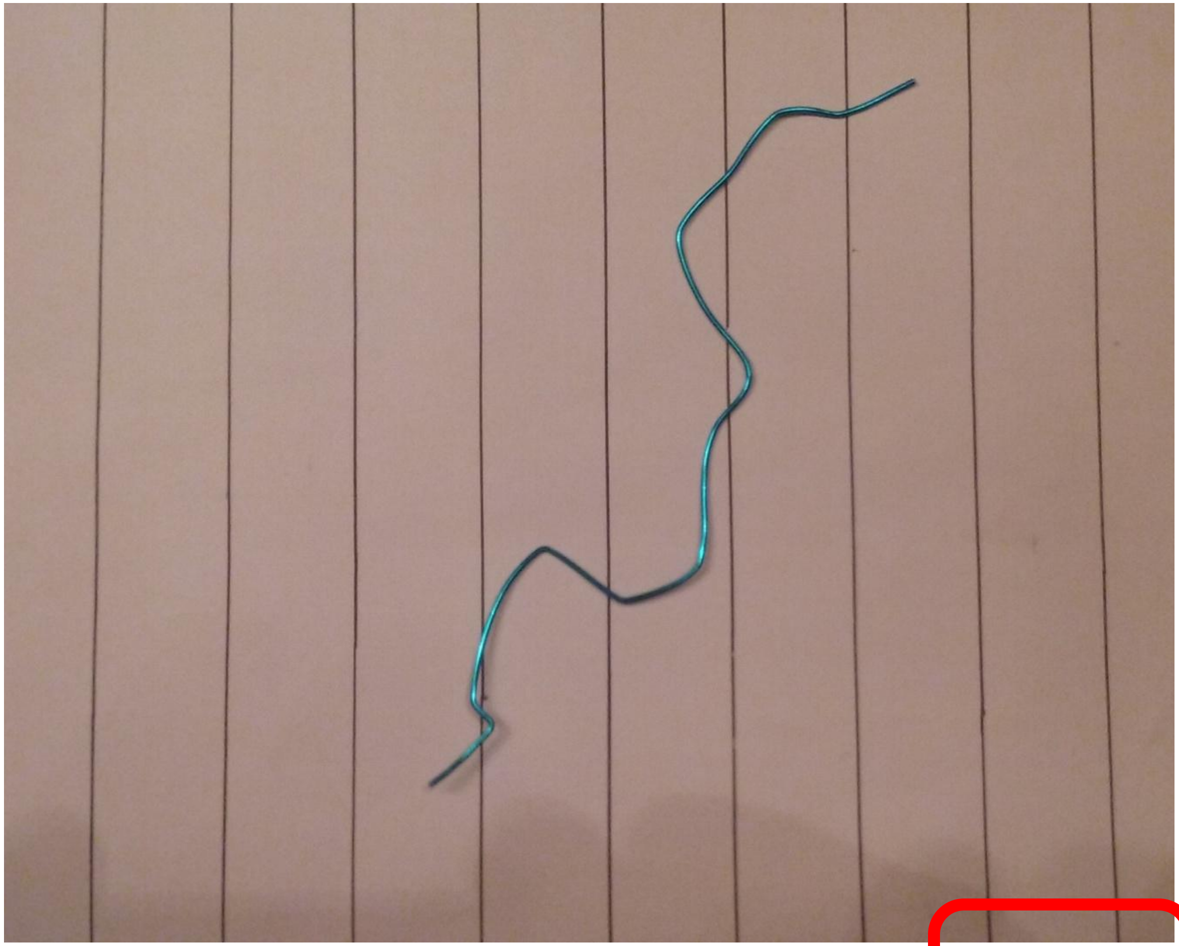
18,14

I vàrem aplicar la fórmula:

$$L \approx \frac{\pi \cdot D \cdot Talls}{2} = \frac{3{,}14 \cdot 1 \cdot 18{,}14}{2} = 28{,}48\, cm$$



Experiència 2: D = 3 cm



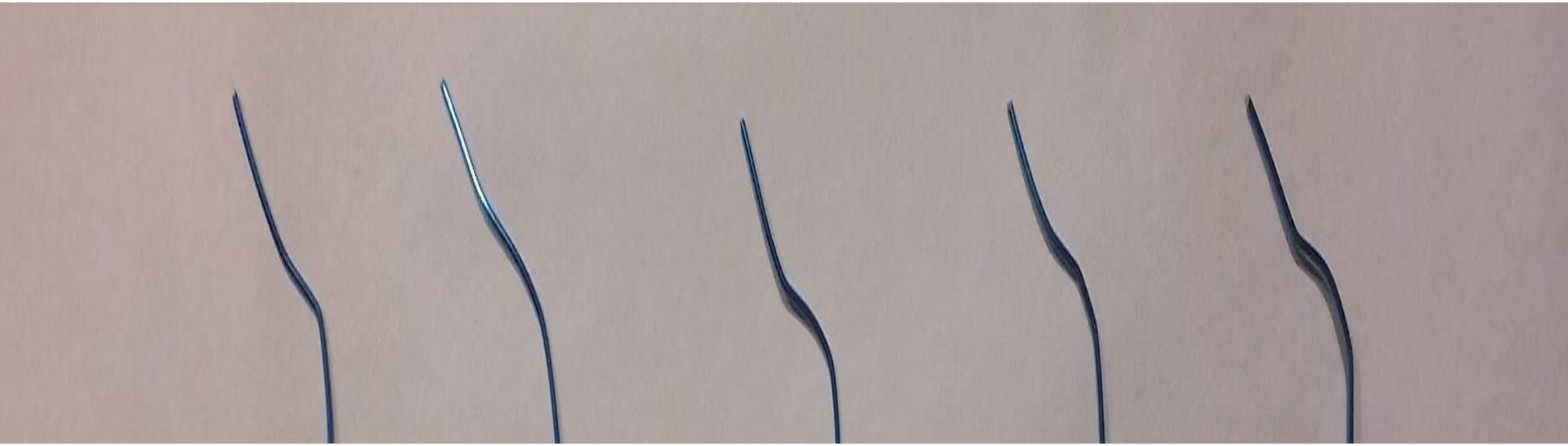
3 cm

Després de 50 tirades vàrem fer la mitjana dels punts de tall obtinguts...

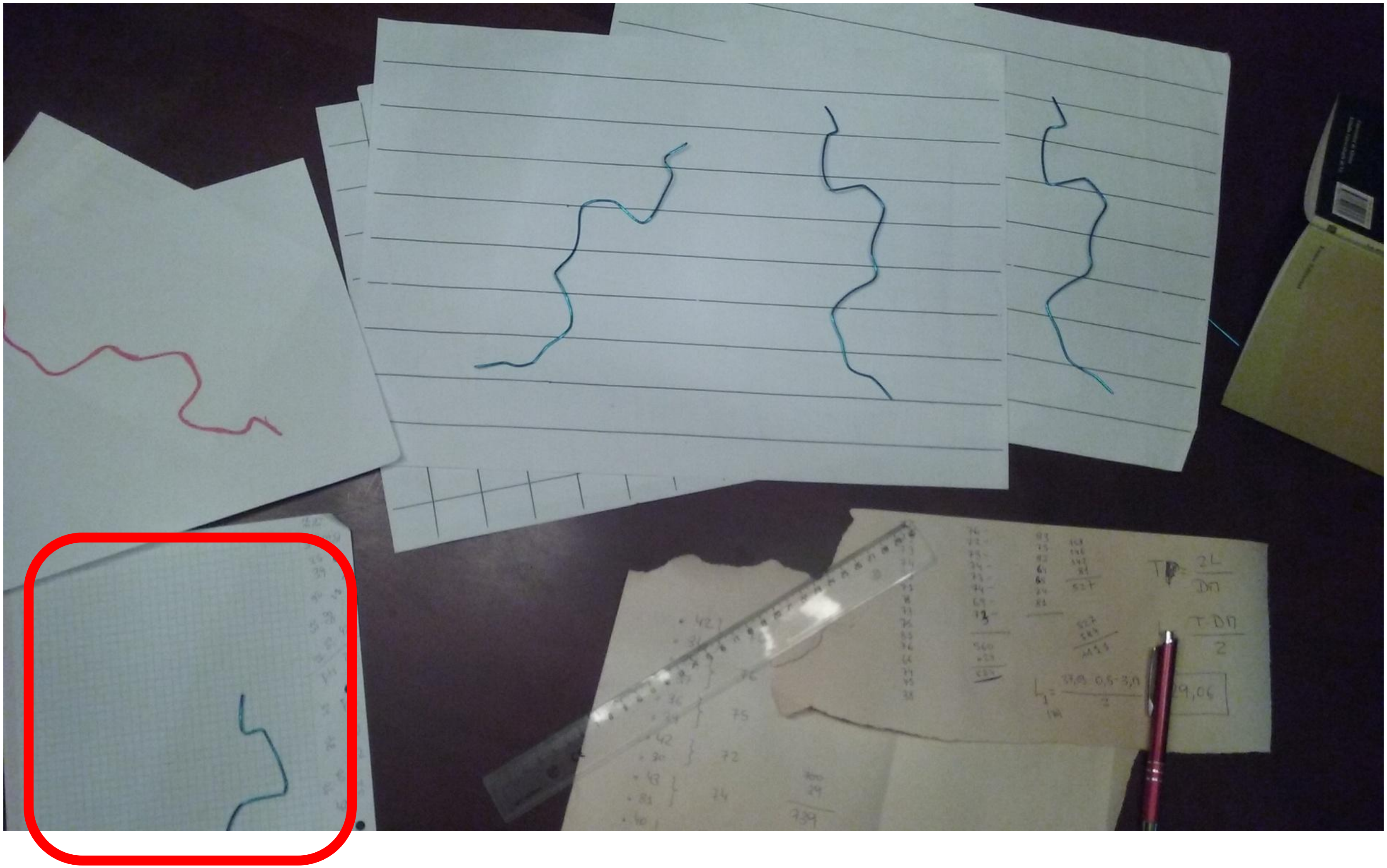
5,78

I vàrem aplicar la fórmula:

$$L \approx \frac{\pi \cdot D \cdot Talls}{2} = \frac{3{,}14 \cdot 3 \cdot 5{,}78}{2} = 27{,}22\ cm$$



Experiència 3: D = 0,5 cm

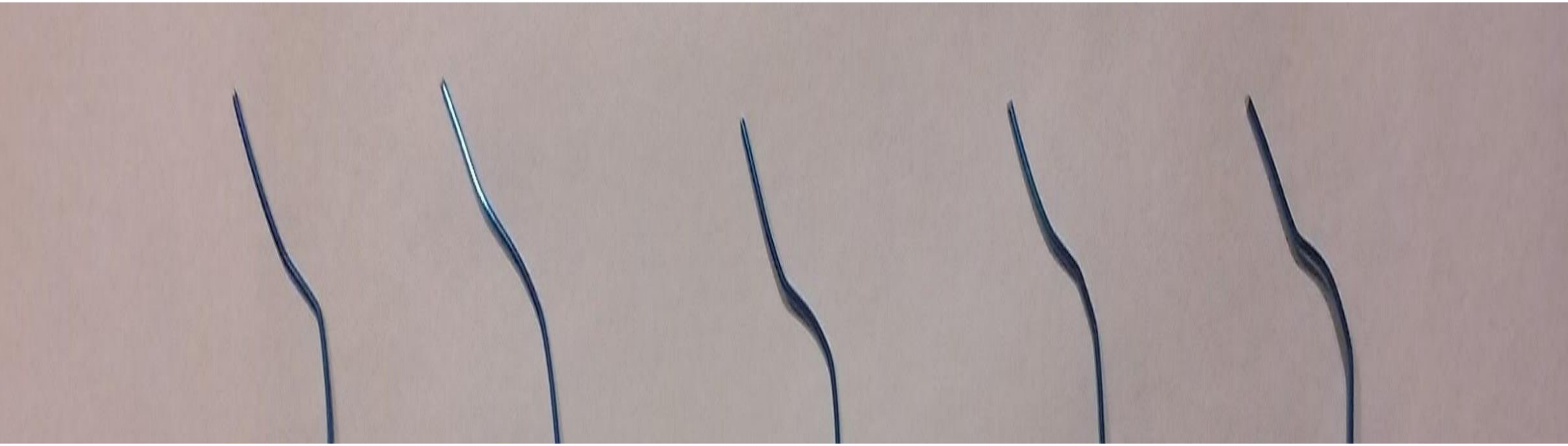


Després de 50 tirades vàrem fer la mitjana dels punts de tall obtinguts...

37

I vàrem aplicar de nou la fórmula:

$$L \approx \frac{\pi \cdot D \cdot Talls}{2} = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}5 \cdot 37}{2} = 29{,}05\ cm$$

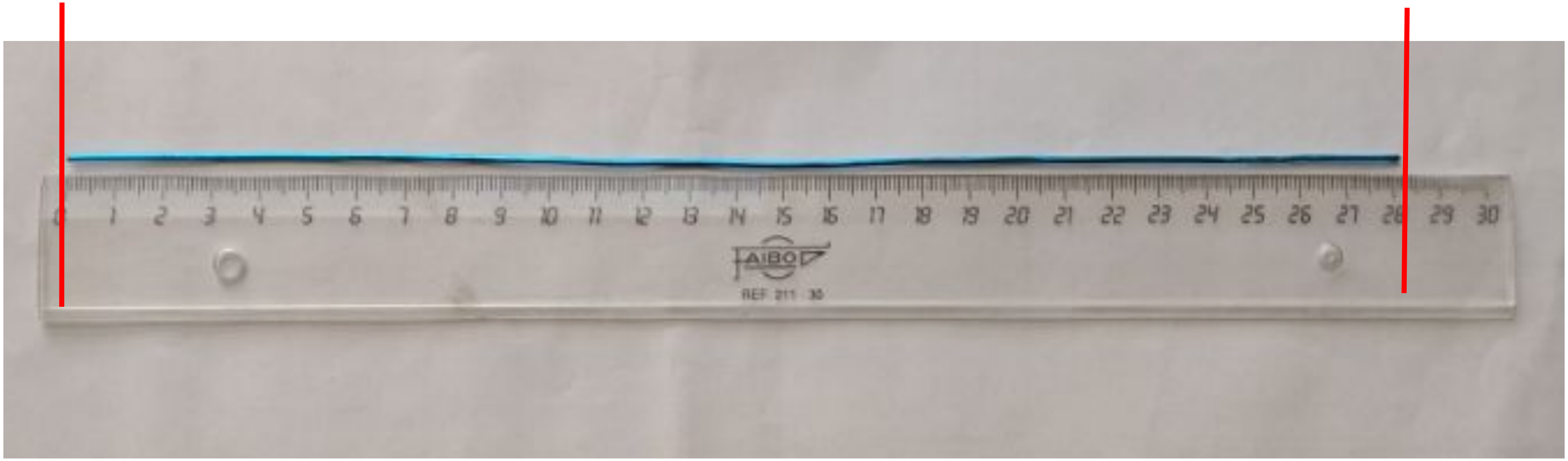


Els valors obtinguts són:

28,48 cm
27,22 cm
29,05 cm

La seva mitjana és: 28,25 cm

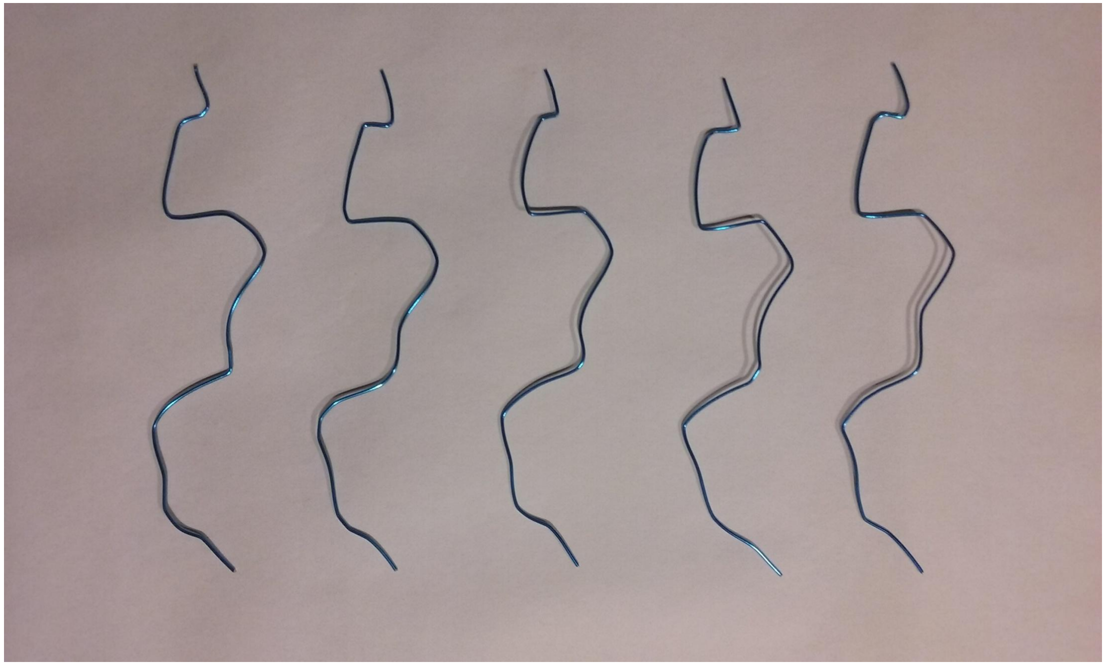
Vàrem recordar aquell mot d'en Laplace: "rectificar" una corba...
Vàrem posar recte el filferro...



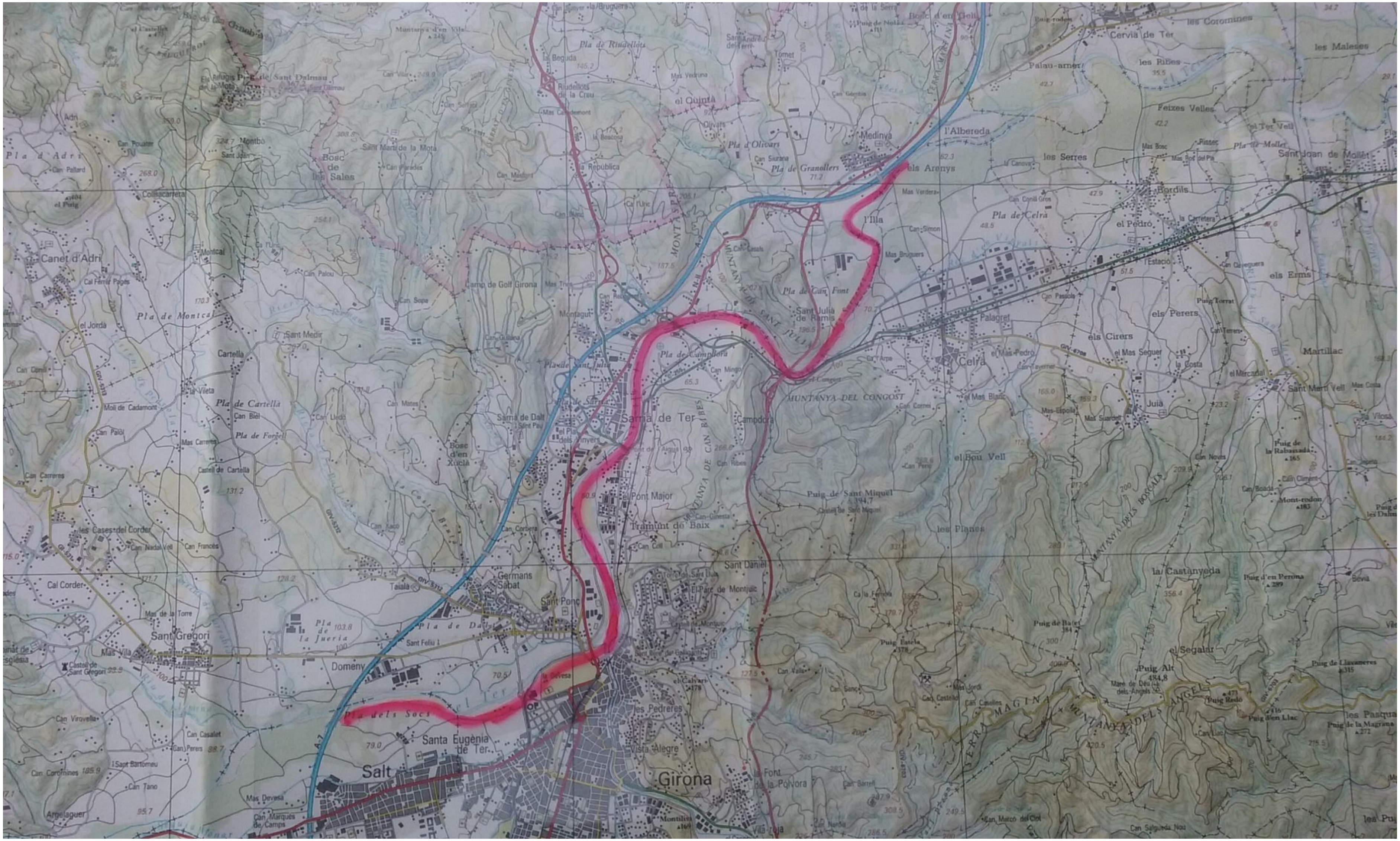
Emocionant!!!!!

Però té algun significat real el filferro que hem
Tirat **E**ntre **R**ectes?

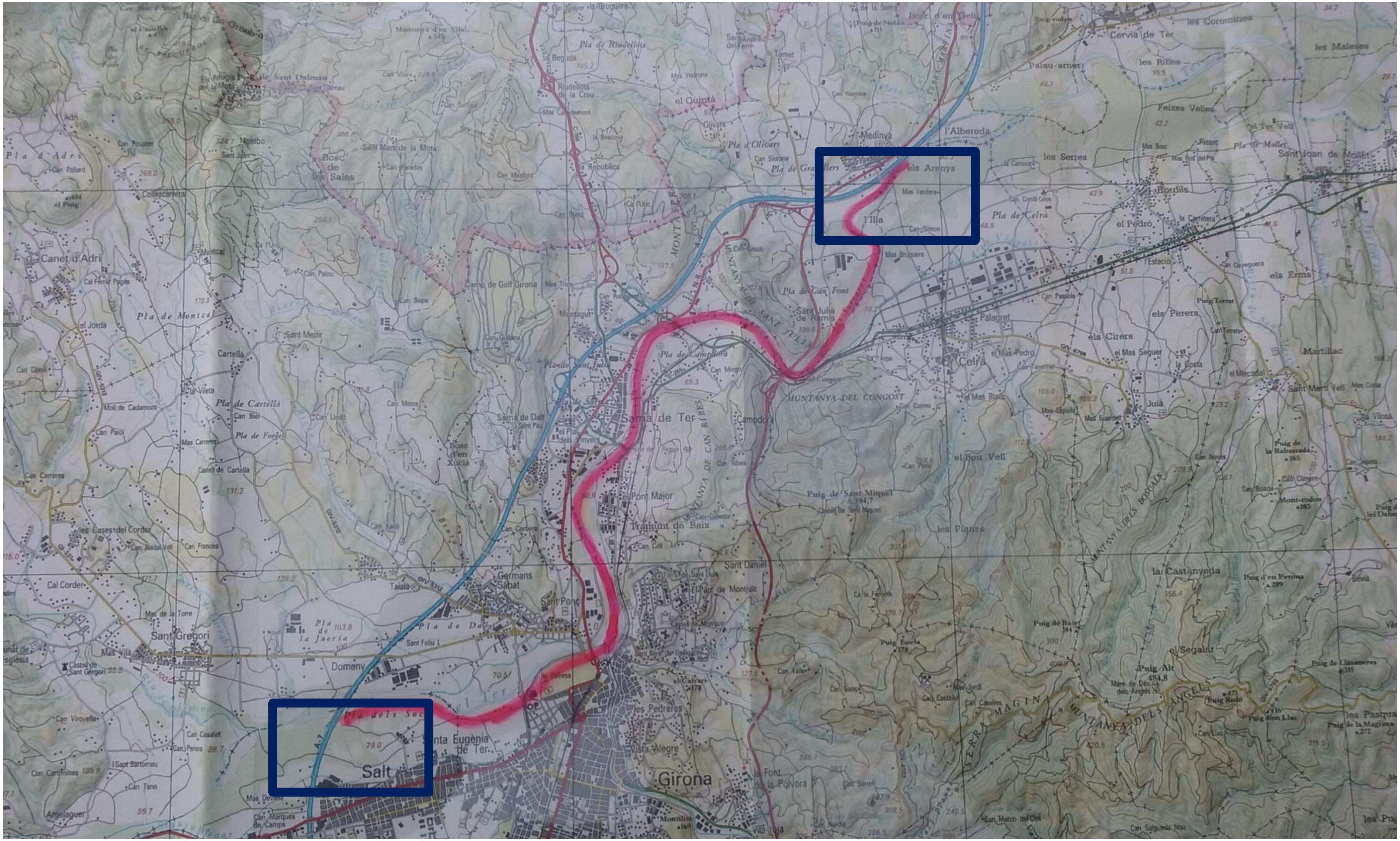
TER: el riu TER que passa prop de Girona,
la ciutat de Santaló.



El riu Ter entre dos punts coneguts...



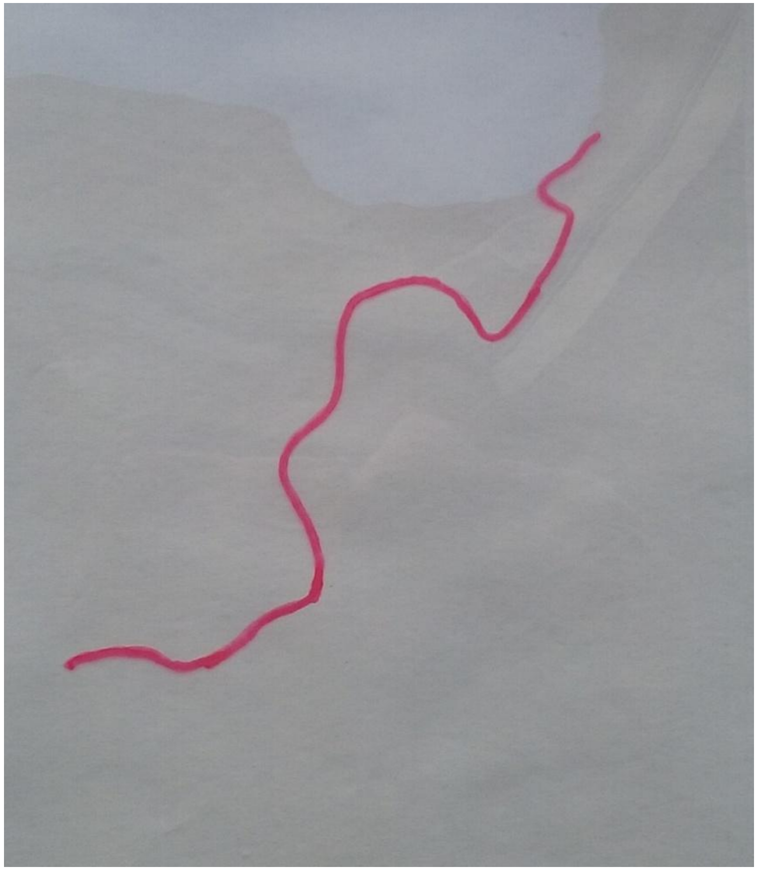
El riu Ter entre dos punts coneguts...



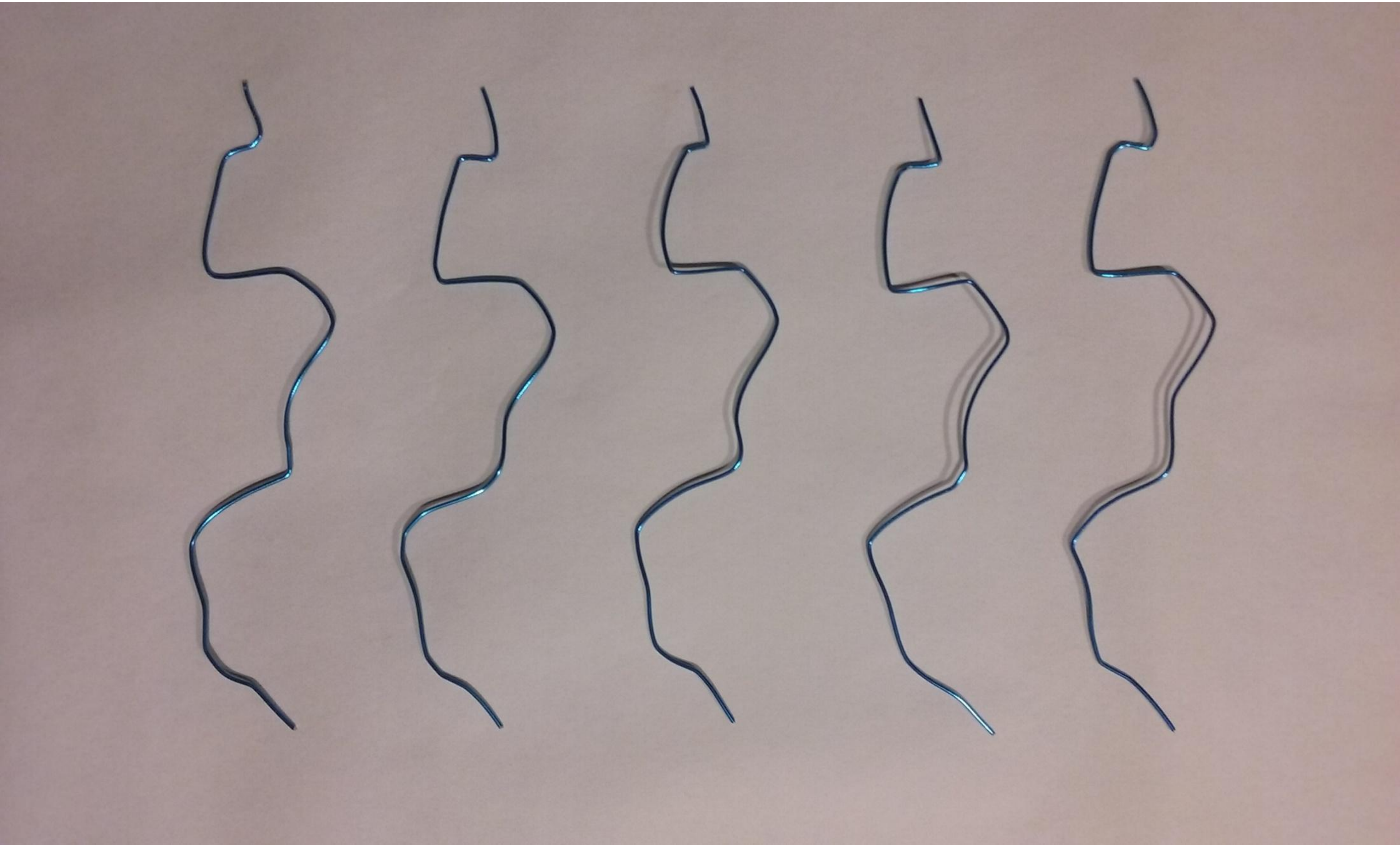
El riu Ter entre dos punts coneguts... Medinyà

El riu Ter entre dos punts coneguts... Domeny, Salt

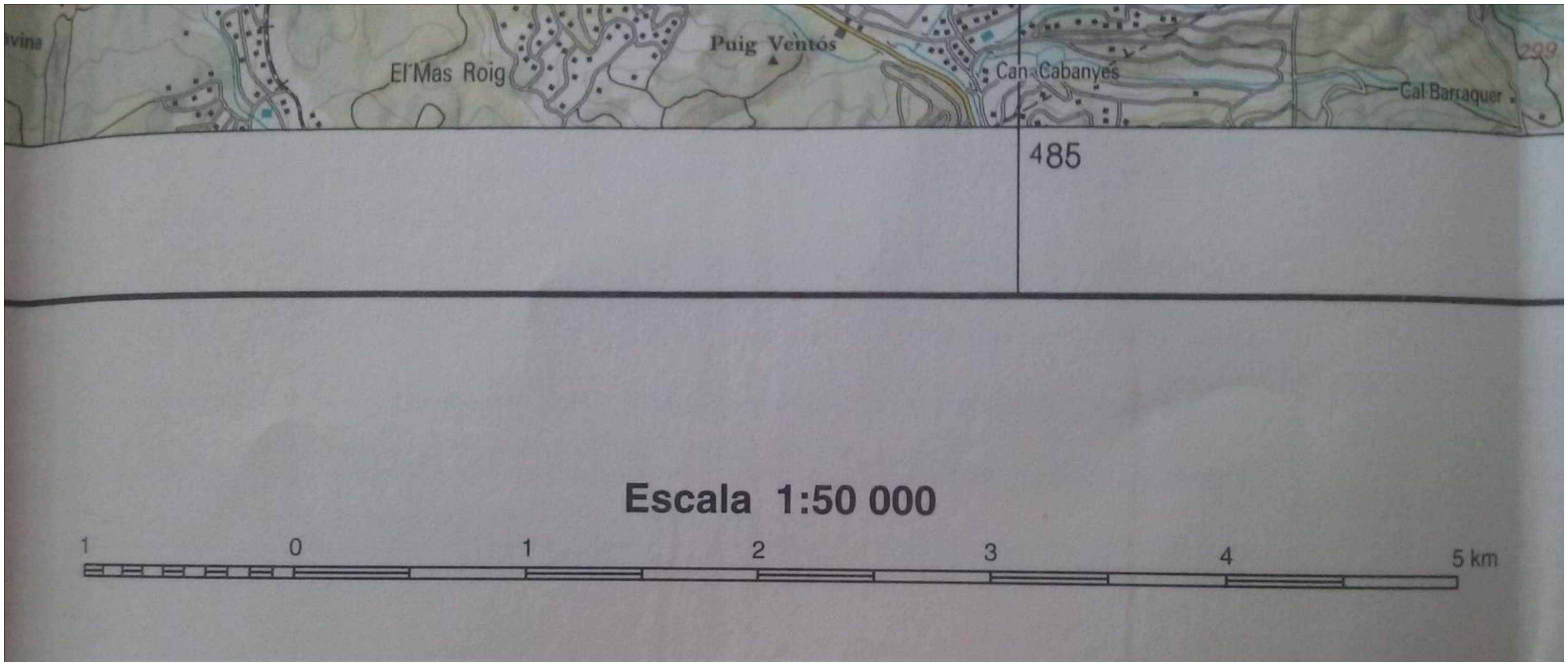
Vàrem copiar el riu Ter sobre una transparència...



I vàrem fer uns quants rius Ter amb filferro...



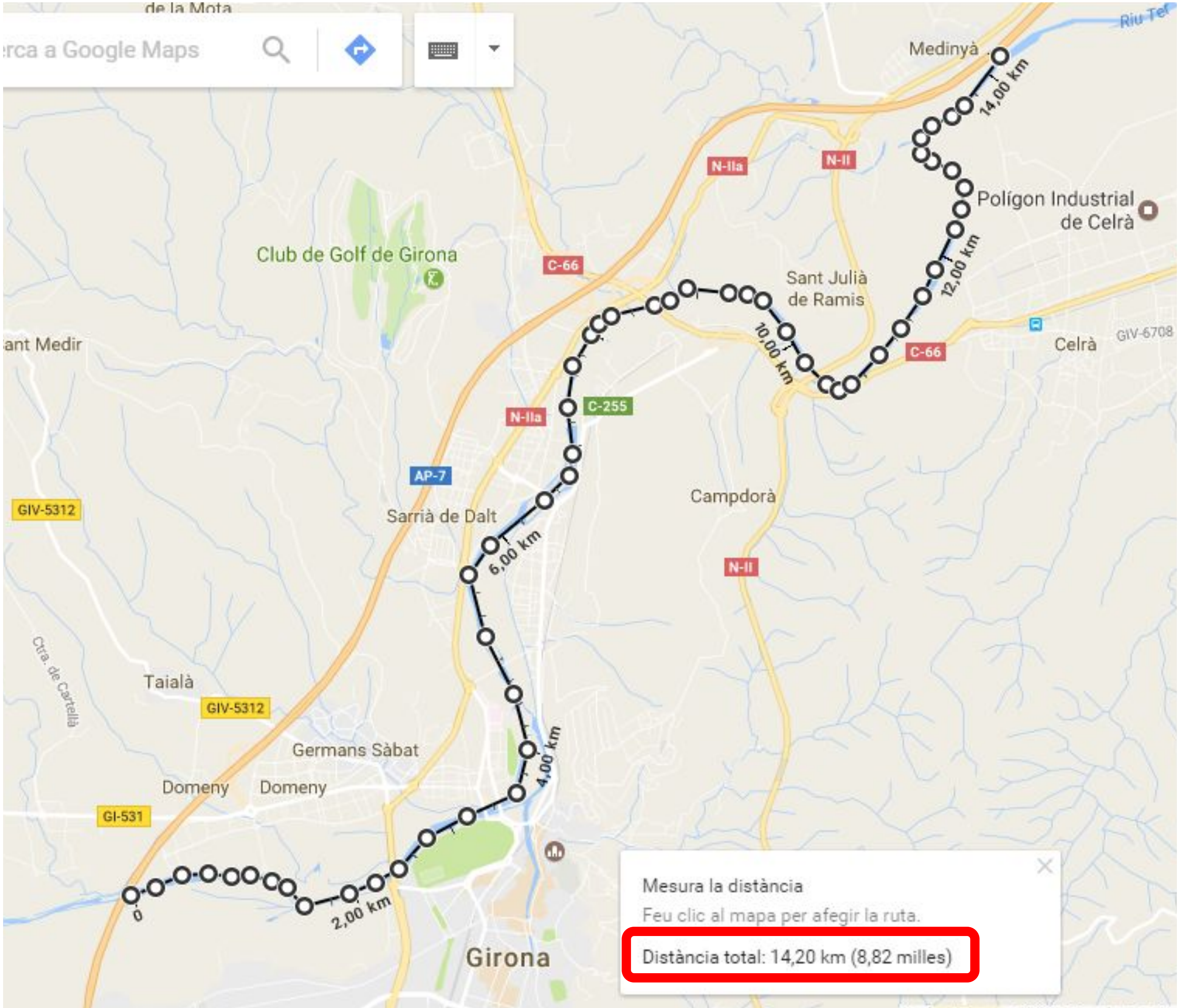
Per connectar amb la realitat apliquem l'escala del mapa!

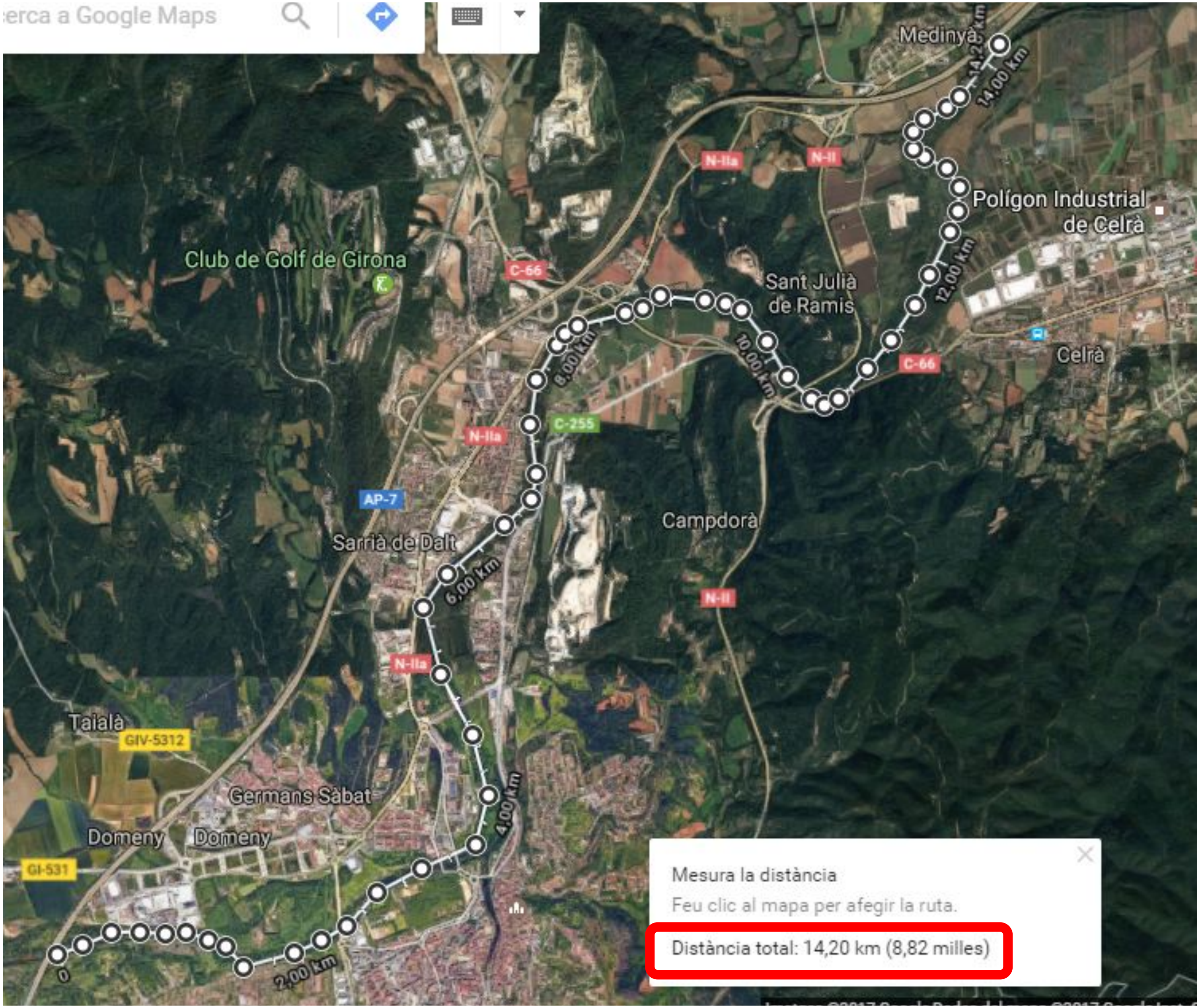


$$28{,}25 \times 50\,000 = 1412500\ cm = 14{,}13\ km$$

14,13 km de riu Ter...

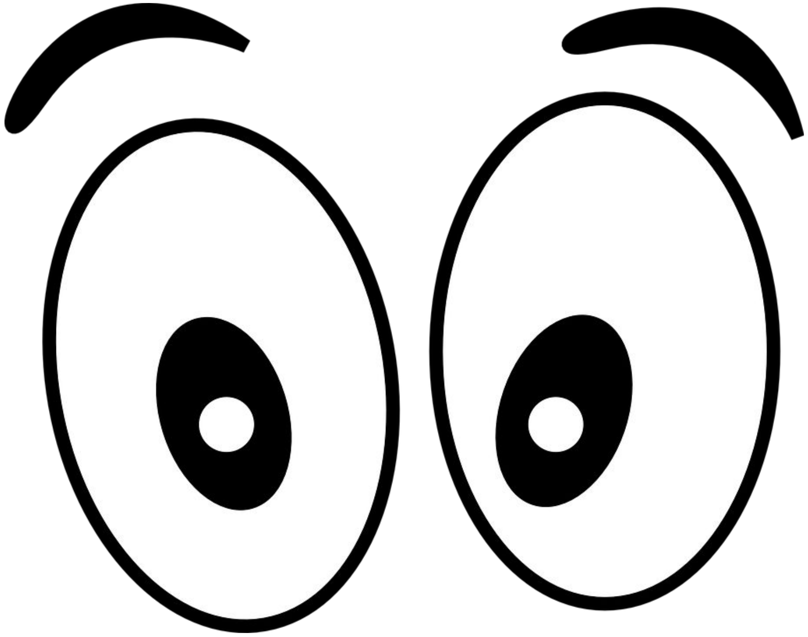
Com podríem comprovar-ho?

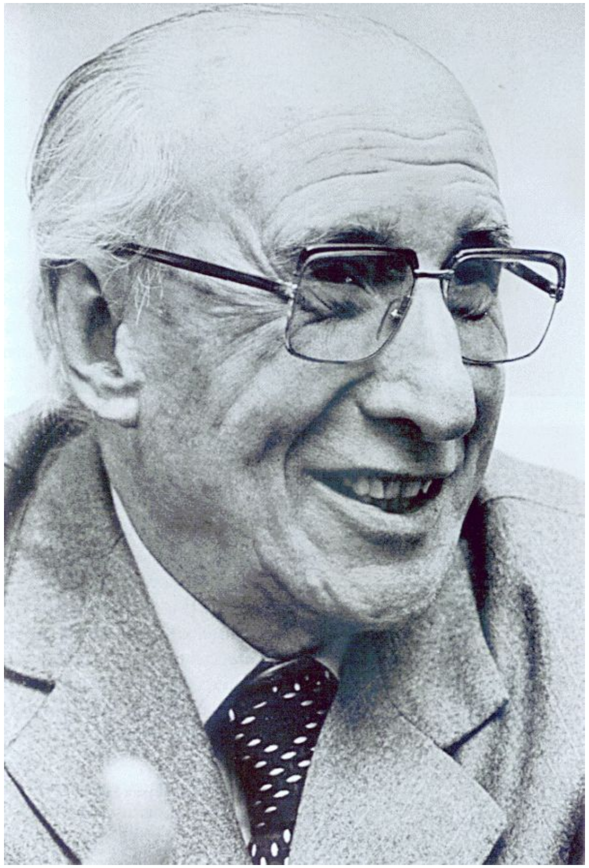

rca a Google Maps
Medinyà
Riu Ter
14,00 km
N-IIa
N-II
Polígon Industrial
de Celrà
12,00 km
Club de Golf de Girona
C-66
Sant Julià
de Ramis
10,00 km
ant Medir
C-66
Celrà
GIV-6708
N-IIa
C-255
AP-7
Campdorà
GIV-5312
Sarrià de Dalt
6,00 km
N-II
Taialà
GIV-5312
4,00 km
Germans Sàbat
Domeny
Domeny
GI-531
0
2,00 km
Girona
Mesura la distància
Feu clic al mapa per afegir la ruta.
Distància total: 14,20 km (8,82 milles)


Cerca a Google Maps
Medinyà
14,2 km
14,00 km
N-IIa
N-II
Polígon Industrial de Celrà
Club de Golf de Girona
C-66
Sant Julià de Ramis
12,00 km
Celrà
10,00 km
8,00 km
C-66
C-255
N-IIa
AP-7
Campdorà
Sarrià de Dalt
6,00 km
N-II
N-IIa
Taialà
GIV-5312
Germans Sàbat
4,00 km
Domeny
Domeny
GI-531
Mesura la distància
Feu clic al mapa per afegir la ruta.
Distància total: 14,20 km (8,82 milles)
2,00 km
0

14,13 km - 14,20 km

La diferència és inferior al 0,5%

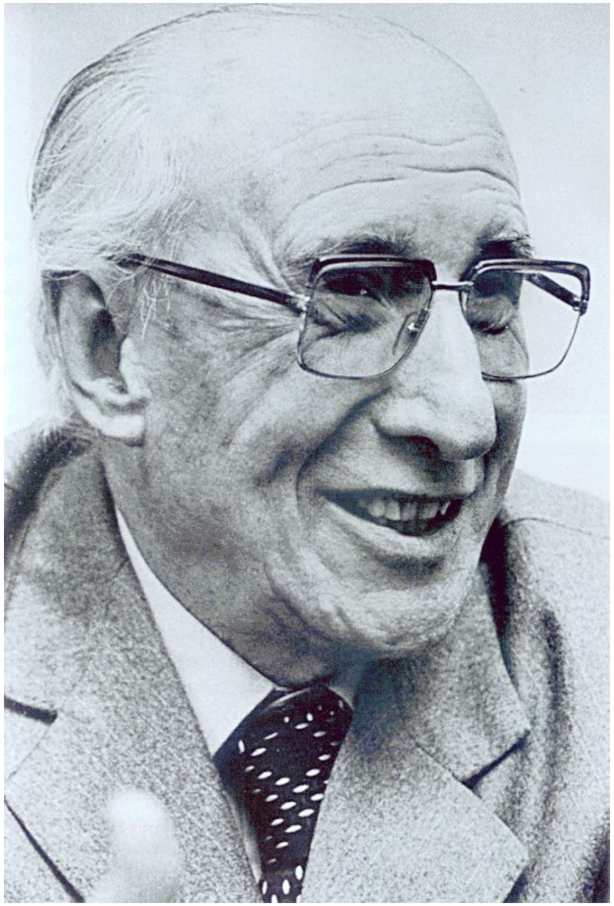




Lluís A. Santaló

“Malgrat tot Laplace s’equivocava. Aquestes fórmules s’han emprat sovint, un segle després de la seva afirmació per mesurar longituds de corbes sobre preparats microscòpics”

La matemàtica: una filosofia i una tècnica, 1993



Lluís A. Santaló

La matemàtica: una filosofia i una tècnica, 1993

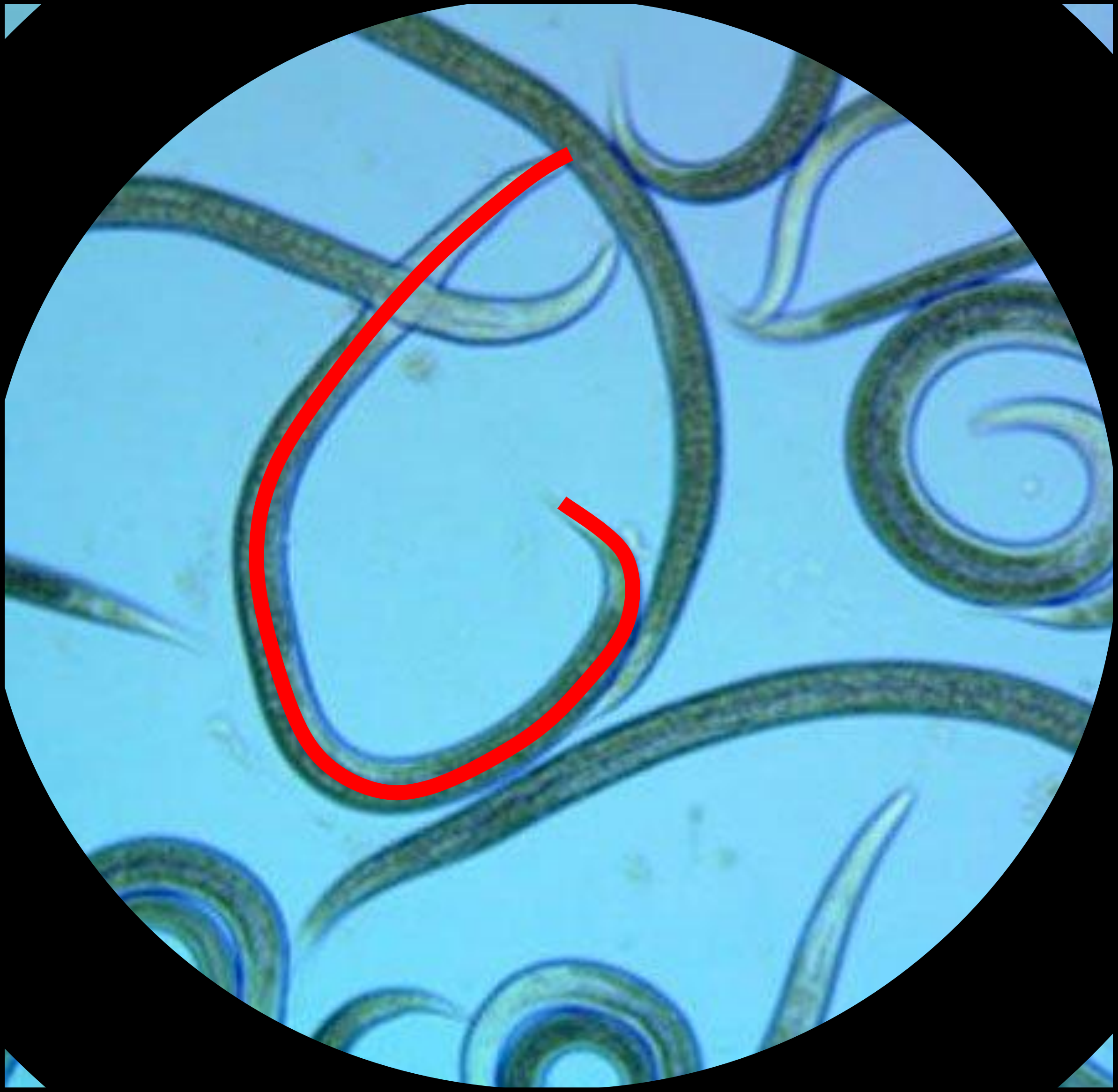
"Si sobreposem a un preparat per al microscopi una retícula rectangular (o un feix de paral·leles equidistants) i comptem el nombre de vegades que els seus costats o les seves paral·leles tallen les corbes la longitud de les quals es desitja mesurar, i girem diverses vegades la retícula i prenem mitjanes, podem calcular aquelles longituds amb prou aproximació"

Vibrio cholerae   http://prokariotae.tripod.com/fotos.htm

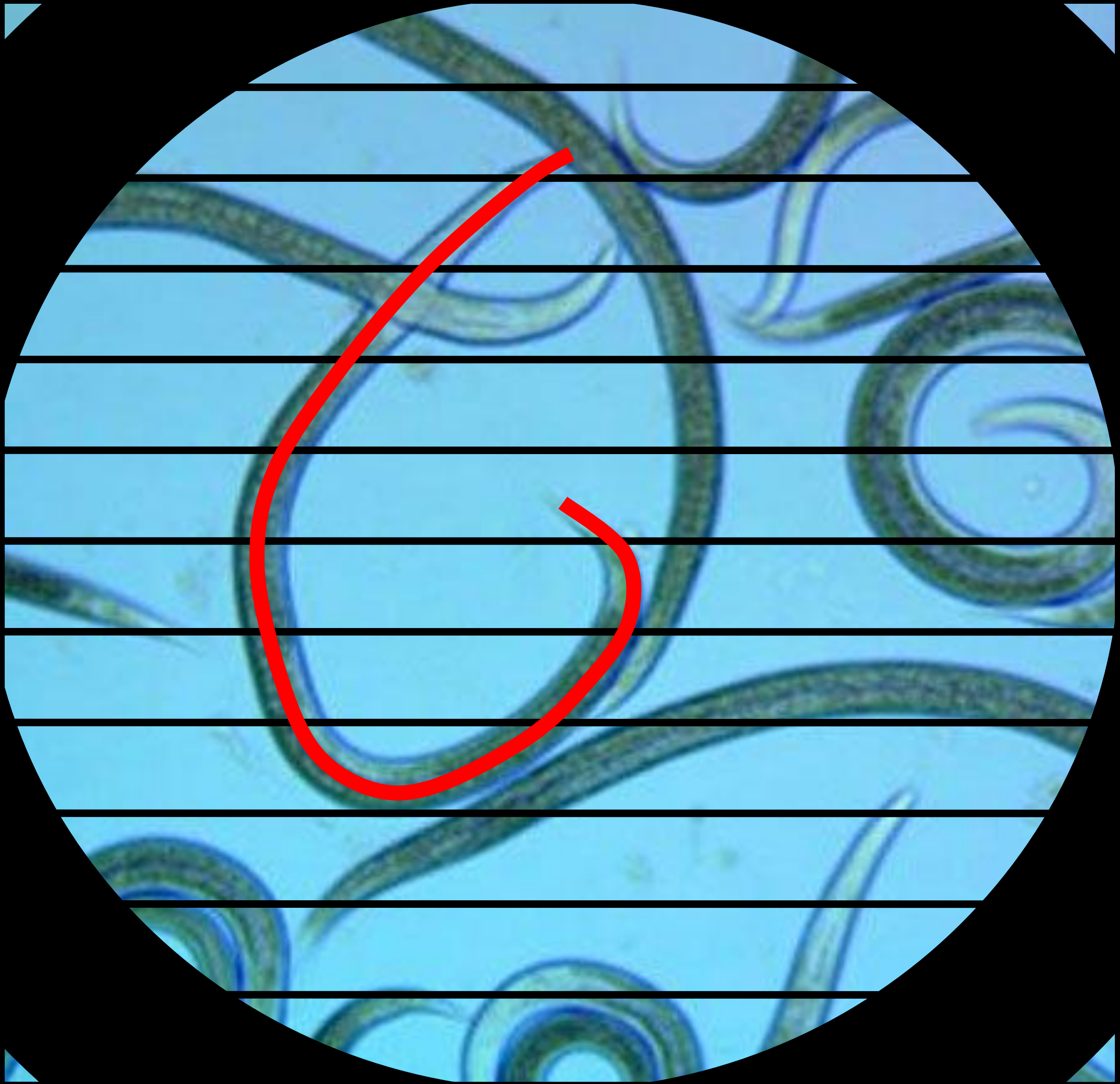
Vibrio cholera

Nematodes / Università degli Studi di Milano

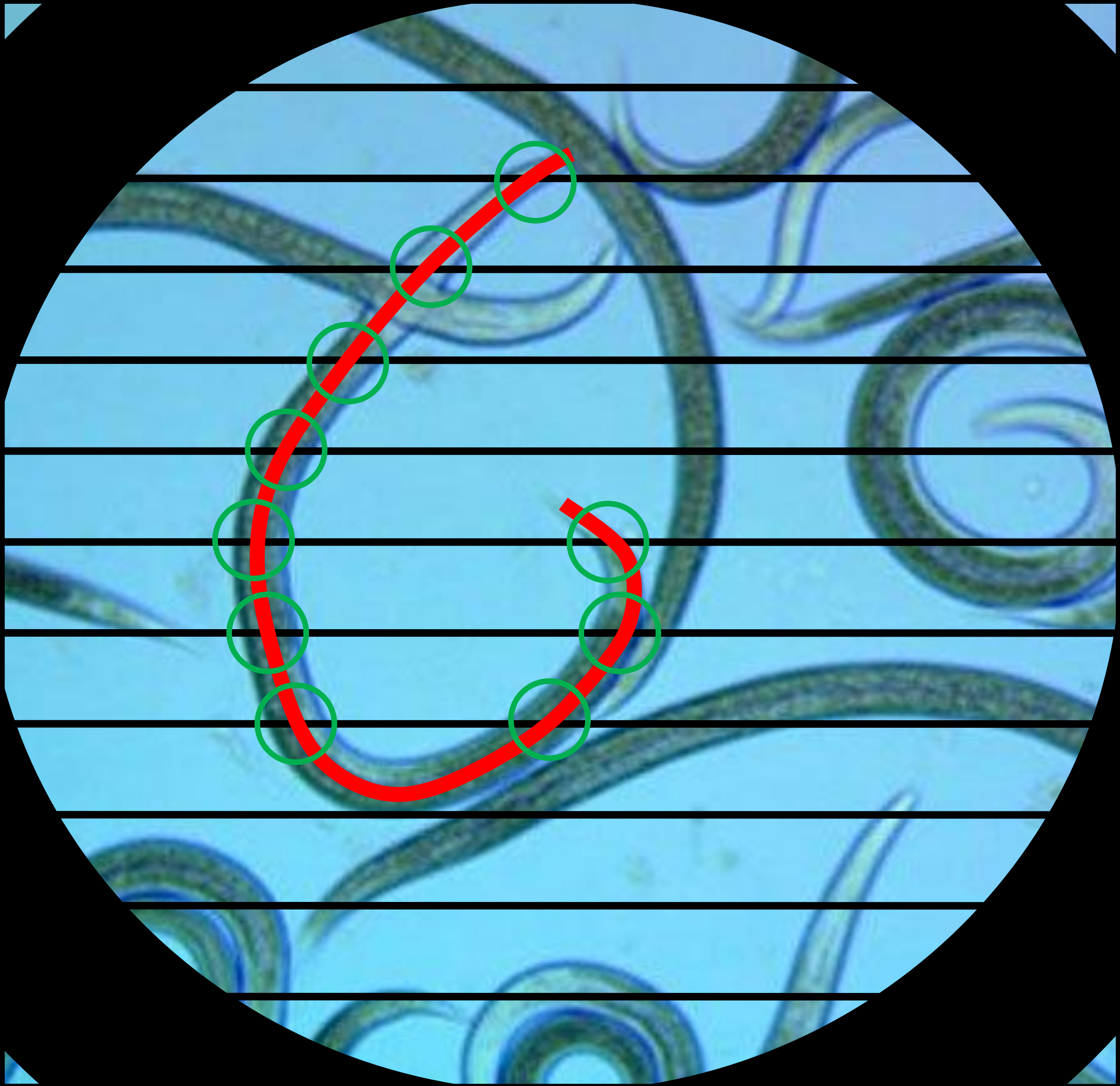
Nematodes / Planet Natural



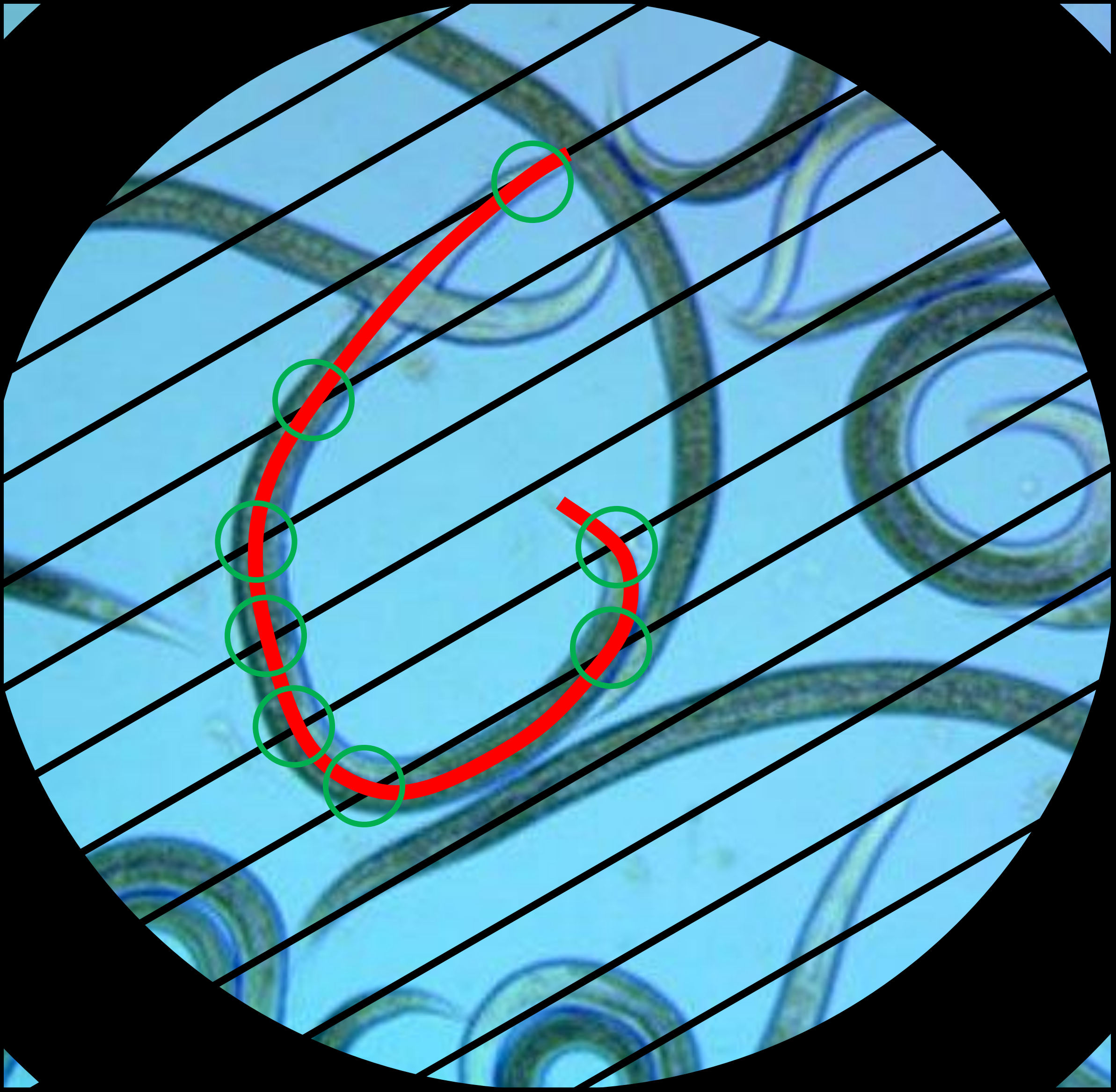
Nematodes / Planet Natural



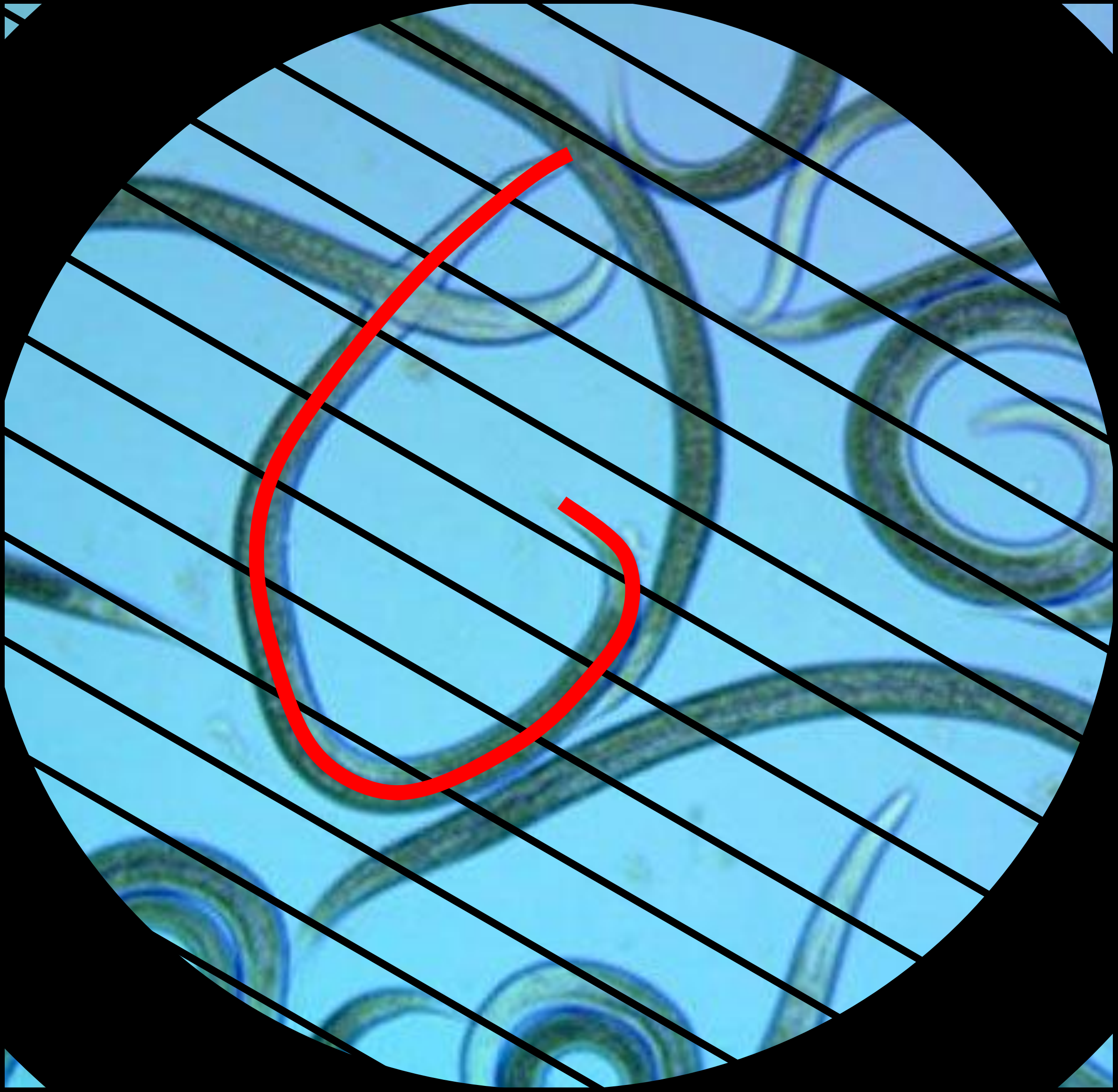
Nematodes / Planet Natural



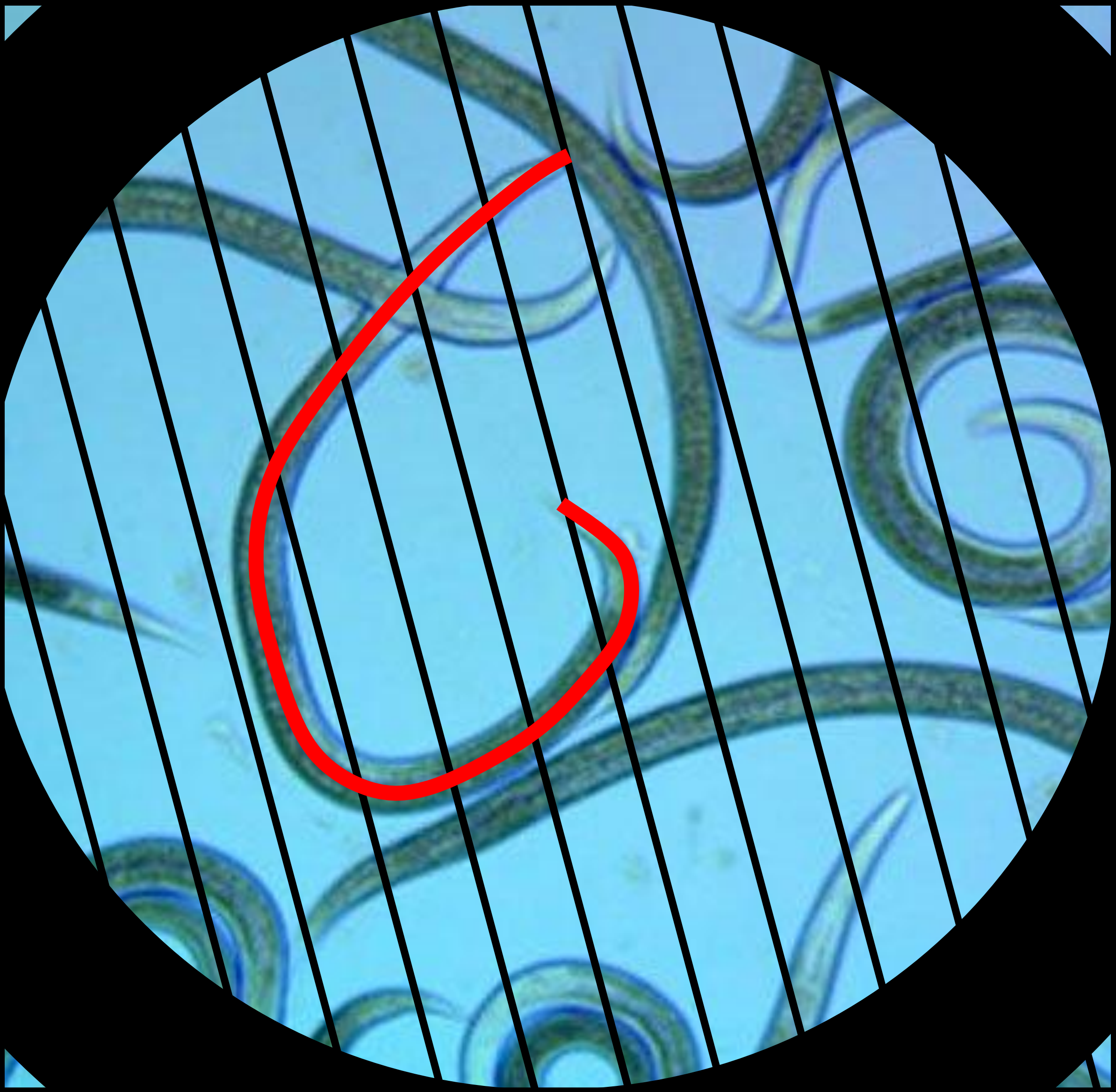
Nematodes / Planet Natural



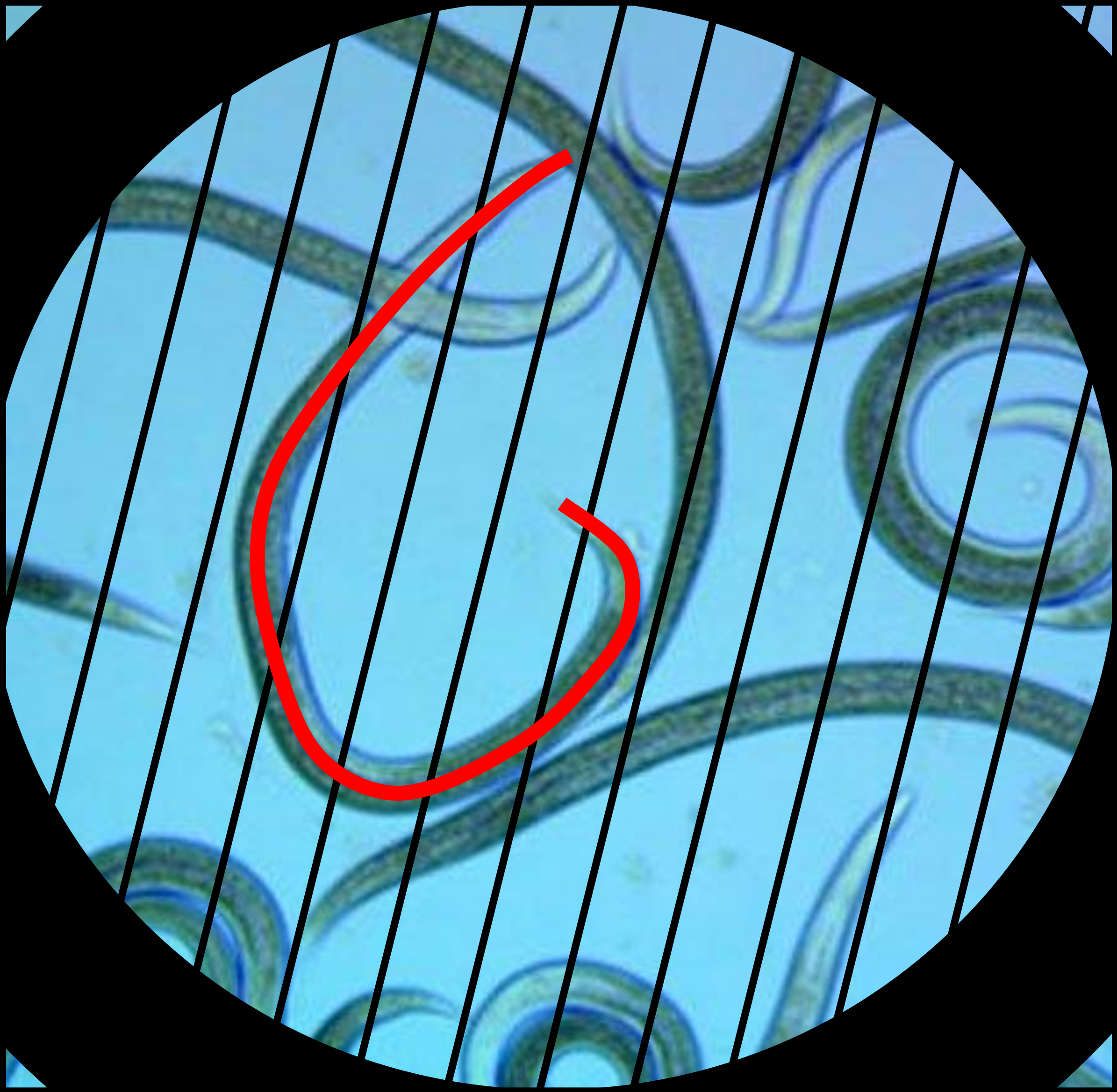
Nematodes / Planet Natural



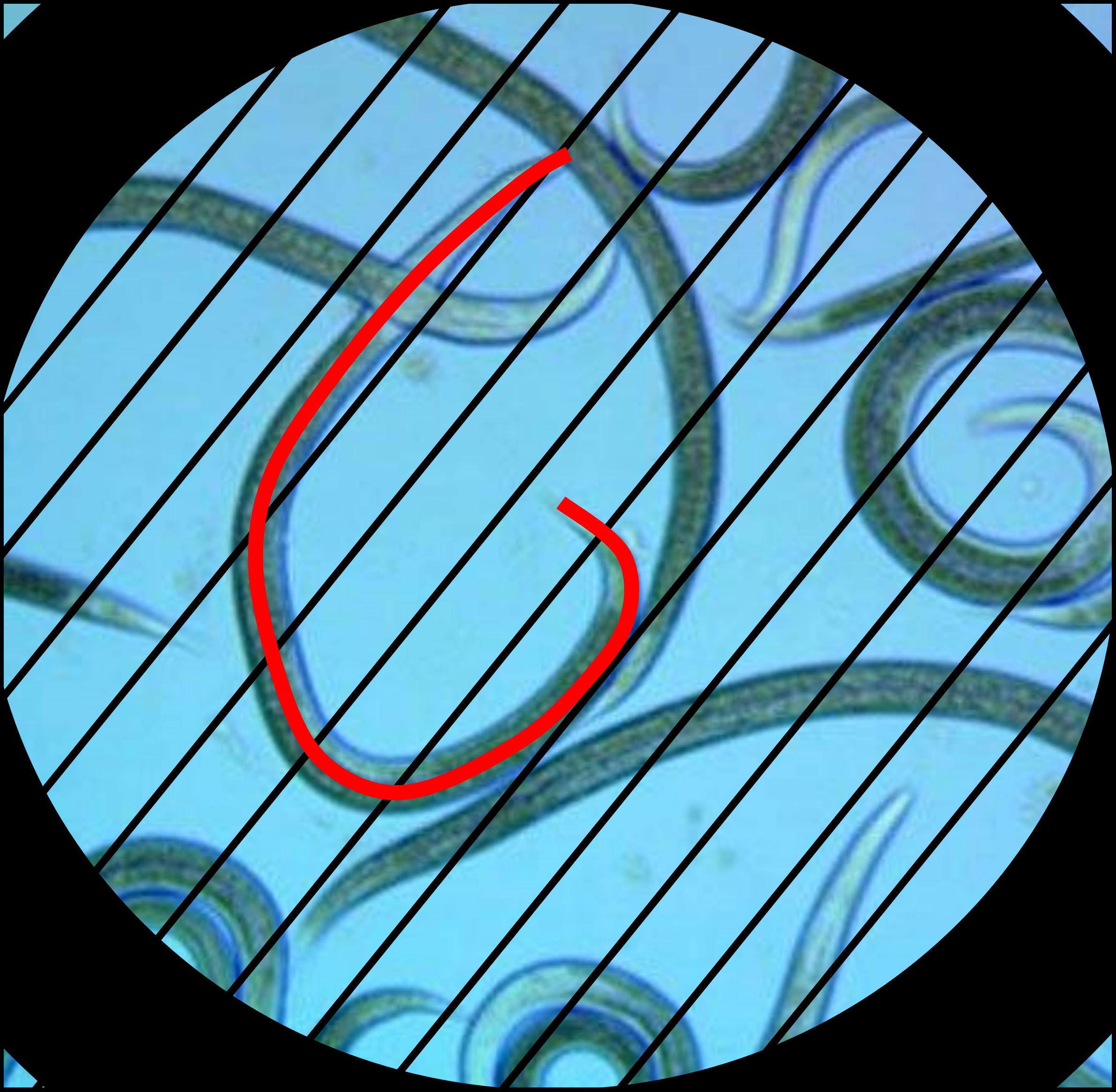
Nematodes / Planet Natural



Nematodes / Planet Natural



Nematodes / Planet Natural



Nematodes / Planet Natural

“En aquest nivell és més fàcil *comptar* que *mesurar*”

Lluís A. Santaló

Moltes gràcies!

UNIVERSITAT DE BARCELONA

Facultat de Matemàtiques i Informàtica