El problema de les coincidències de Montmort

Breu descripció del material

Per aquest problema només ens calen boles numerades o, en el seu defecte, cartes numerades.

Continguts que es poden tractar

Sèries de Taylor, el nombre e, diagrama d’arbre, càlcul de probabilitats, el nombre factorial, llei forta dels grans nombres.

Proposta d’aplicació didàctica

En el llibre **La matemàtica: una filosofia una tècnica** trobem aquest text d’allò més inspirador:

> *Al llarg de l'interval comprès entre la mort de Jakob Bernoulli i la publicació de la seva obra, apareix un llibre del francès Montmort titulat “Essai d'Analyse sur les Jeux de Hasard” (1708), en la segona edició del qual (1714) l'autor afegeix diverses cartes amb discussions interessants i comentaris de Nicolau Bernoulli. En aquesta obra de Montmort apareix per primera vegada l'anomenat problema de les coincidències, que després es va anar repetint més o menys modificat en gairebé tots els textos de probabilitats. El seu enunciat és el següent: s'introdueixen en una urna tretze boletes numerades de l'1 al 13 i, un cop ben barrejades, es treuen d'una en una successivament. El jugador guanya si com a mínim una de les boletes extretes té el mateix nombre que el que indica l'ordre d'extracció. S'estima la probabilitat que això esdevingui. Montmort demostra que la probabilitat val:*

$$P = 1 - 1/2! + 1/3! + 1/4! + 1/5! + \ldots + 1/13! = 0{,}6321,$$
on $2! = 2\cdot 1$, $3! = 3\cdot 2\cdot 1$, $4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$, etc. [1]

[1] Imatge escanejada del llibre original. En la següent pàgina, veurem que existeix un error d'impremta d’aquest càlcul de probabilitats.

[...] Allò remarcable és que uns anys després Euler considera el cas d'un nombre infinit de boletes i obté una serie que és la mateixa expressió anterior perllongada indefinidament ("Calcul de la Probabilité dans le Jeu de Recuontre", Hist. Acad. de Berlín, 1751). La suma d'aquesta serie també és 0,6321... i coincideix fins a la novena xifra decimal amb el resultat de Montmort per a tretze boletes.

Referent al text, val a dir que (tal i com s'indica en el peu de pàgina anterior), la fórmula recollida en el llibre conté un error de signes; caldria que la fórmula fos:

$$P = 1 - 1/2! + 1/3! - 1/4! + 1/5! - 1/6! + ... + 1/13!$$

Per saber-ne més sobre el problema de Montmort no us podeu perdre l'article d'en Raúl Ibáñez [1].

Val a dir que, com a curiositat, aquesta probabilitat és aproximadament igual a 1-1/e. El motiu d'aquest fet ve donat perquè el polinomi de Taylor associat a e^x entorn a x = 0 és:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + ...$$

Avaluant el polinomi de Taylor per a x = -1…

$$e^{-1} = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + ... = \frac{1}{2} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + ..$$

<u>Com podem portar-ho a l'aula?</u>

- En els primers cursos de l'ESO…
  Podem realitzar l'experiment diverses vegades amb els alumnes. Recollir les dades del què ha succeït, estudiar les freqüències relatives, representar les dades amb gràfics estadístics… per acabar generar les seves pròpies conjectures és un molt bon punt de partida. El mateix recurs es pot fer amb un joc de cartes i en format de "truc de màgia". Si s'està interessat en aquest recurs, és aconsellable llegir l'article [3].

- A segon cicle d'ESO…
  Estudiar diferents sorteigs en funció del número de boles (o cartes) pot ser interessant. Estudiar totes les combinacions possibles i valorar en quins casos hi ha o no coincidència pot ser més que interessant. Fins i tot, pot ser interessant intentar cercar un patró… En cas de no trobar-lo, es pot valorar aquesta dificultat.

- De batxillerat endavant...
  Cercar el model matemàtic que modelitza aquesta situació probabilística pot arribar a ser molt ric. Estudiar la probabilitat de cada cas: cap coincidència, una coincidència… pot arribar a ser molt difícil. No obstant, trobar un punt de connexió amb el número e és una oportunitat que no es pot deixar passar!

- A qualsevol nivell de secundària o batxillerat…
  És una bona oportunitat de programar el problema de Montmort. Poder simular moltes extraccions i comptabilitzar les freqüències relatives de cada cas pot ser d'allò més ric. No obstant, sempre som del parer que és preferible passar primerament per la simulació amb materials abans de passar a la programació (sobretot, a nivells inicials).

Enllaços d'interès

[1] Ibáñez, Raúl (20/11/2019). El problema matemático de las cartas extraviadas.
https://culturacientifica.com/2017/09/20/problema-matematico-las-cartas-extraviadas/

[2] Wikipedia. El número e.
https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_e

[3] Barreras Alconchel, Miguel. El problema de Rencontre. Revista SUMA. Número 71. Novembre 2012. https://revistasuma.es/IMG/pdf/71/027-030.pdf