Funciones Algebraicas y Sistemas Hipergeométricos de Ecuaciones Diferenciales

Carlos D'Andrea

Departamento de Matemáticas

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

Marzo de 1997

1 Introducción

Este trabajo trata sobre un problema clásico en matemática que es el de encontrar fórmulas para las raíces de la ecuación general de grado n :

$$f(X) := a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n = 0. \tag{1}$$

Aunque existen fórmulas en términos de radicales para $n \leq 4$, la teoría de Galois nos dice que no hay tales fórmulas para $n \geq 5$. Una alternativa es expandir las raíces en forma de series de potencias fraccionarias (o series de Puiseux). Este es un caso particular del estudio hecho por J. McDonald en la referencia [3] .

Por otro lado, se pueden estudiar las raíces como funciones hipergeométricas multivaluadas, en todos sus coeficientes. Esa será la dirección que seguiremos. Veremos que las raíces satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 X}{\partial a_i \partial a_j} & = & \frac{\partial^2 X}{\partial a_k \partial a_l} \quad \text{si } i+j=k+l \\ \sum\limits_{i=0}^{n} i a_i \frac{\partial X}{\partial a_i} & = & -X \quad y \quad \sum\limits_{i=0}^{n} a_i \frac{\partial X}{\partial a_i} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Esta es una clase particular de los sistemas $\mathcal{A}-$ hipergeométricos de ecuaciones diferenciales estudiados por Gel'fand, Kapranov y Zelevinsky en [2] . Sturmfels consiguió encontrar fórmulas explícitas para las raíces en [1] , identificando explícitamente las series construidas en [3] con combinaciones de series introducidas en [2] . Esta identificación será desarrollada aquí, además de un estudio global de los sistemas hipergeométricos de ecuaciones diferenciales, y de la naturaleza de los coeficientes de las raíces conseguidas en el trabajo desarrollado en [1] .

Por último, nos dedicaremos a caracterizar las soluciones racionales de (2) . Tales soluciones existen, ya que la suma de las raíces de un polinomio es una función racional que verifica este sistema de ecuaciones diferenciales.

2 Las Raíces del Polinomio de grado n

Supondremos de ahora en adelante $n \in \mathbf{N}$ fijo. Queremos estudiar la naturaleza de las "raíces" de la ecuación genérica de grado n, esto es, las funciones $X(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ a valores complejos, analíticas, definidas en algún abierto de $\mathbf{C}^{n+1}$ que verifican (1).

Proposición 2.1 *Una tal serie $X(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ verifica el sistema de ecuaciones diferenciales presentado en la sección* (2).

Demostración: Las dos ecuaciones de primer orden son consecuencia de las siguientes homogeneidades de X:

$$X(\lambda a_0, \lambda a_1, \lambda a_2 \cdots, \lambda a_n) = X(a_0, a_1, a_2 \cdots, a_n),$$

$$X(a_0, \lambda a_1, \lambda^2 a_2, \cdots, \lambda^n a_n) = \frac{1}{\lambda} X(a_0, a_1, a_2 \cdots, a_n),$$

para $\lambda \in \mathbf{K}^*$.

La primera de estas homogeneidades es evidente, ya que

$$a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n = 0 \Leftrightarrow \lambda a_0 + \lambda a_1 X + \lambda a_2 X^2 + \cdots + \lambda a_n X^n = 0$$

para $\lambda \in \mathbf{K}^*$. Para la segunda, hay que reemplazar X por λX:

$$a_0 + a_1 (\lambda X) + a_2 (\lambda X)^2 + \cdots + a_n (\lambda X)^n = a_0 + \lambda a_1 X + \lambda^2 a_2 X^2 + \cdots + \lambda^n a_n X^n.$$

Las ecuaciones diferenciales resultan del siguiente hecho general: si

$$\phi(\lambda^{\omega_0} a_0, \lambda^{\omega_1} a_1, \cdots, \lambda^{\omega_n} a_n) = \lambda^{\omega} \phi(a_0, a_1, \cdots, a_n),$$

entonces se puede pensar esta última igualdad como función de λ, fijando $a_0, a_1, \cdots, a_n$. Al derivarla, usando la regla de la cadena, se obtiene

$$\sum_{i=0}^{n} \omega_i . \lambda^{\omega_i - 1} a_i . \left. \frac{\partial \phi}{\partial a_i} \right|_{(\lambda^{\omega_0} a_0, \lambda^{\omega_1} a_1, \cdots, \lambda^{\omega_n} a_n)} = \omega . \lambda^{\omega - 1} \phi(a_0, a_1, \cdots, a_n).$$

Especializando en $\lambda = 1$, se consigue

$$\sum_{i=0}^{n} \omega_i . a_i . \frac{\partial \phi}{\partial a_i} = \omega . \phi.$$

Veamos qué pasa con las ecuaciones de orden 2. Fijados $a_0, a_1, \cdots, a_n$ en $\mathbf{C}$, y enteros i, j $1 \leq i, j \leq n$,diferenciamos la igualdad (1) respecto de a_i y resulta:

$$X^i + f'(X)\frac{\partial X}{\partial a_i} = 0,$$

donde $f'(X) := \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$. Si $f'(X) \neq 0$, entonces

$$\frac{\partial X}{\partial a_i} = -\frac{X^i}{f'(X)}$$

y al derivar respecto de a_j ambos miembros resulta

$$\frac{\partial^2 X}{\partial a_j \partial a_i} = \frac{\partial}{\partial a_j}\left(-\frac{X^i}{f'(X)}\right) = -f''(X)\,X^{i+j} f'(X)^{-3} + (i+j)\,X^{i+j-1} f'(X)^{-2},$$

donde $f''(X) := \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\,a_k X^{k-2}$. Esta última expresión depende solamente de $i+j$, y esto prueba lo que queríamos, si X es raiz simple de f.

Para el caso general, consideramos la función

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{d}{dz}\left[\log\left(f(z)\right)\right], \quad z \in \mathbf{C}.$$

Esta es una función racional en $a_0, a_1, \cdots, a_n, z$. La diferenciamos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_j}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right) &= \frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_j}\left(\frac{\partial}{\partial z}\left[\log\left(f(z)\right)\right]\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_j}\left[\log\left(f(z)\right)\right]\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial a_j}\left(\frac{z^i}{f(z)}\right)\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{z^{i+j}}{f^2(z)}\right).
\end{aligned}$$

La última expresión también depende solamente de $i+j$, de lo cual resulta que $\frac{f'(z)}{f(z)}$ satisface las ecuaciones de orden 2. Para ver que X también las satisface, hay que diferenciar bajo el signo integral la identidad que viene dada por la fórmula del residuo:

$$X = \frac{1}{2\pi i \mu}\int_{\Gamma} \frac{z.f'(z)}{f(z)} dz,$$

donde Γ es una curva alrededor de $X(a_0, a_1, a_2 \cdots, a_n)$, lo suficientemente pequeña como para no contener en su interior a otras raíces de la ecuación polinómica de grado n con coeficientes $a_0, a_1, a_2 \cdots, a_n$, y μ es la multiplicidad de X como raiz de f.$\square$

3 Los Sistemas $\mathcal{A}-$Hipergeométricos de Ecuaciones Diferenciales

El sistema de ecuaciones diferenciales que aparece en (2) es un ejemplo de las ecuaciones diferenciales $\mathcal{A}$-hipergeométricas introducidas por Gel'fand, Kapranov y Zelevinsky en [2] . Estos sistemas están dados por una matriz $\mathcal{A}$ de k filas y K columnas, con entradas enteras

$$\mathcal{A} := (\chi_{ij}), 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq K$$

que verifican las siguientes propiedades:

a) las columnas

$$\chi_j = (\chi_{1j}, \cdots, \chi_{nj})$$

generan $\mathbf{Z}^k$ como $\mathbf{Z}$-módulo;

b) existen enteros $c_1, \cdots, c_n$ tales que para todo $j, 1 \leq j \leq K$:

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{ij} = 1.$$

Geométricamente, esta condición dice que la familia $\{\chi_j\}_{1 \leq j \leq K}$está contenida en un hiperplano afín primitivo.

Introducimos el lattice de relaciones entre los caracteres. Por definición éste es el conjunto

$$\mathcal{L} := \left\{ (r_1, \cdots, r_K) \in \mathbf{Z}^K : \sum_{j=1}^{K} r_j . \chi_{ij} = 0, 1 \leq i \leq k \right\}. \tag{3}$$

Los siguientes enunciados nos darán una mejor idea de las propiedades de este lattice.

Lema 3.1 *Los espacios vectoriales* $\mathcal{L}_Q := \mathcal{L} \otimes \mathbf{Q}$ *y* $\mathcal{L}_R := \mathcal{L} \otimes \mathbf{R}$ *tienen dimensión igual a* $K - k$ *sobre los respectivos cuerpos de base.*

Demostración: Por la condición a) el rango de la matriz $\mathcal{A}$ es k, así que la transformación lineal

$$f : \mathbf{Q}^K \to \mathbf{Q}^k, \qquad f(x) := \mathcal{A}.x^t$$

es sobreyectiva. Luego,

$$\dim(\mathcal{L}_Q) = K - k.$$

Análogamente con $\mathcal{L}_R$.□

Lema 3.2 *El lattice* $\mathcal{L}$ *es primitivo; o sea si* $r \in \mathcal{L}$, *para todo* $\lambda \in Q$ *tal que* $\lambda r \in \mathbf{Z}^K$, *entonces* $\lambda r \in \mathcal{L}$.

Demostración: Simplemente hay que ver que la condición $r \in \mathcal{L}$ quiere decir que r está en el núcleo entero de la matriz $\mathcal{A}$. Luego, λr también lo estará para cualquier λ.□

Lema 3.3 $(r_1, \cdots, r_K) \in \mathcal{L}$, *entonces* $\sum_{i=1}^{K} r_i = 0$.

Demostración: Si $r \in \mathcal{L}$ entonces $\mathcal{A}.r^t = 0$. Por otro lado, la condición b) de la matriz $\mathcal{A}$ dice que para ciertos $c_1, \cdots, c_k$ vale la siguiente identidad:

$$(c_1 \cdots c_k)\,\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Eso implica que

$$(c_1 \cdots c_k)\,\mathcal{A}r^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} r^t = \sum_{i=1}^{K} r_i = 0.\square$$

Para cada $r = (r_1, \cdots, r_K) \in \mathcal{L}$, consideramos el operador diferencial

$$\square_r := \prod_{r_j > 0} \left(\frac{\partial}{\partial a_j}\right)^{r_j} - \prod_{r_j < 0} \left(\frac{\partial}{\partial a_j}\right)^{-r_j}; \tag{4}$$

y para una colección fija de parámetros $(\beta_1, \cdots, \beta_k)$, definimos el operador

$$Z_i := \left(\sum_{j=1}^{K} \chi_{ij}.a_j.\frac{\partial}{\partial a_j} \right) - \beta_i \quad 1 \leq i \leq k. \tag{5}$$

Definición 3.1 *El sistema de tipo hipergeométrico dado por una matriz* $\mathcal{A} := (\chi_{ij})$ *que verifica las condiciones a) y b), y una colección de parámetros* $(\beta_1, \cdots, \beta_k) \in \mathbf{C}^k$ *tiene la forma*

$$\left\{ \begin{array}{rcll} Z_i\phi & = & 0 & 1 \leq i \leq k \\ \Box_r\phi & = & 0 & r \in \mathcal{L}. \end{array} \right. \tag{6}$$

Formalmente, el número de ecuaciones en este sistema es infinito, dado que el lattice $\mathcal{L}$ contiene infinitos elementos. Veamos que en realidad uno puede quedarse con un conjunto finito de ecuaciones:

Proposición 3.4 *El sistema* (6) *puede describirse con finitas ecuaciones.*

Demostración: El anillo de operadores diferenciales a coeficientes constantes $\mathbf{C}\left[\frac{\partial}{\partial a_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial a_K}\right]$ es noetheriano (es isomorfo a $\mathbf{C}[a_1, \cdots, a_K]$). Luego el ideal (homogéneo)

$$\mathcal{I}_{\mathcal{L}} := \left\langle \Box_r := \prod_{r_j > 0} \left(\frac{\partial}{\partial a_j} \right)^{r_j} - \prod_{r_j < 0} \left(\frac{\partial}{\partial a_j} \right)^{-r_j}, r \in \mathcal{L} \right\rangle$$

está generado por finitos $\Box_r$, digamos

$$\mathcal{I}_{\mathcal{L}} = \langle \Box_{r_1}, \cdots, \Box_{r_t} \rangle .$$

Por lo tanto, si

$$\Box_{r_i}\phi = 0, 1 \leq i \leq t$$

entonces

$$\Box_r\phi = 0, \forall r \in \mathcal{L},$$

y recíprocamente.$\Box$

4 Γ- Series y Condiciones de Convergencia

Veamos como se pueden construir soluciones para el sistema (6) como series de potencias. Por un abuso de notación, algunas veces escribiremos la expresión $a_1^{b_1}\ldots a_K^{b_K}$ como a^b. Fijado un vector $u := (u_1, u_2, \ldots, u_K) \in \mathbf{C}^K$, consideramos la serie formal de potencias:

$$\phi_u(a) := \sum_{r\in\mathcal{L}} \frac{a^{u+r}}{\prod\limits_{1\leq j\leq K} \Gamma(u_j + r_j + 1)} \tag{7}$$

donde Γ es la función Gamma de Euler. Observemos que, si bien la función Γ no está definida sobre todo el plano complejo (tiene singularidades en los enteros negativos), existe

$$\lim_{z\to -k} \frac{1}{\Gamma(z)} = 0, k \in \mathbf{N}.$$

Luego, si la cantidad $u_j + r_j + 1$ es un número entero negativo (y en muchos casos así será), entonces se tomará por definición

$$\frac{1}{\Gamma(u_j + r_j + 1)} = 0.$$

Proposición 4.1 *La serie $\phi_u(a)$ es una solución formal del sistema* (6) *con colección de exponentes* $(\beta_1, \cdots, \beta_k)$ *donde*

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{K} \chi_{ij} u_j.$$

Demostración: Veamos primero qué pasa con las ecuaciones de primer orden:

$$\left(\sum_{j=1}^{K} \chi_{ij}.a_j.\frac{\partial}{\partial a_j}\right)(\phi_u(a)) =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{K} \chi_{ij} . a_j . \frac{\partial}{\partial a_j} \right) \left(\sum_{r \in \mathcal{L}} \frac{a^{u+r}}{\prod\limits_{1 \leq t \leq K} \Gamma\left(u_t + r_t + 1\right)} \right) =$$

$$= \sum_{r \in \mathcal{L}} \left(\sum_{j=1}^{K} \left(\chi_{ij} . a_j . \frac{\partial}{\partial a_j} \frac{a^{u+r}}{\prod\limits_{1 \leq t \leq K} \Gamma\left(u_t + r_t + 1\right)} \right) \right) =$$

$$= \sum_{r \in \mathcal{L}} \left(\sum_{j=1}^{K} \left(\chi_{ij} . (u_j + r_j) \frac{a^{u+r}}{\prod\limits_{1 \leq t \leq K} \Gamma\left(u_t + r_t + 1\right)} \right) \right) =$$

$$= \sum_{r \in \mathcal{L}} \left(\left(\sum_{j=1}^{K} \chi_{ij} . (u_j + r_j) \right) \left(\frac{a^{u+r}}{\prod\limits_{1 \leq t \leq K} \Gamma\left(u_t + r_t + 1\right)} \right) \right) =$$

$$= \sum_{r \in \mathcal{L}} \left(\sum_{j=1}^{K} \chi_{ij} u_j \left(\frac{a^{u+r}}{\prod\limits_{1 \leq t \leq K} \Gamma\left(u_t + r_t + 1\right)} \right) \right) =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{K} \chi_{ij} u_j \right) \sum_{r \in \mathcal{L}} \left(\frac{a^{u+r}}{\prod\limits_{1 \leq t \leq K} \Gamma\left(u_t + r_t + 1\right)} \right) = \beta_i \phi_u\left(a\right).$$

Ahora resta ver que

$$\Box_{\widetilde{r}} \phi_u = 0, \forall \widetilde{r} \in \mathcal{L}.$$

O sea, hay que demostrar que, fijado $\widetilde{r}$, vale

$$\prod_{\widetilde{r}_j > 0} \left(\frac{\partial}{\partial a_j} \right)^{\widetilde{r}_j} \phi_u = \prod_{\widetilde{r}_j < 0} \left(\frac{\partial}{\partial a_j} \right)^{-\widetilde{r}_j} \phi_u.$$

Escribimos $\widetilde{r} = \widetilde{r}^+ - \widetilde{r}^-$, donde

$$\widetilde{r}_j^+ := m\acute{a}x \left\{0, r_j\right\}, 1 \leq j \leq K,$$

y

$$\widetilde{r}^- := \widetilde{r}^+ - \widetilde{r}.$$

Calculamos el primer miembro de la igualdad que queremos demostrar:

$$\prod_{\widetilde{r}_j > 0} \left(\frac{\partial}{\partial a_j} \right)^{\widetilde{r}_j} \left(\phi_u\left(a\right)\right) = \prod_{\widetilde{r}_j > 0} \left(\frac{\partial}{\partial a_j} \right)^{\widetilde{r}_j} \left(\sum_{r \in \mathcal{L}} \frac{a^{u+r}}{\prod\limits_{1 \leq t \leq K} \Gamma\left(u_t + r_t + 1\right)} \right) =$$

$$= \sum_{r \in \mathcal{L}} \left(\prod_{\widetilde{r}_j > 0} \left(\frac{\partial}{\partial a_j} \right)^{\widetilde{r}_j} \frac{a^{u+r}}{\prod\limits_{1 \leq t \leq K} \Gamma(u_t + r_t + 1)} \right) =$$

$$= \sum_{r \in \mathcal{L}} \left(\prod_{\widetilde{r}_j > 0} \left(\prod_{s=0}^{\widetilde{r}_j - 1} (u_j + r_j - s) \right) \frac{a^{u+r-\widetilde{r}^+}}{\prod\limits_{1 \leq t \leq K} \Gamma(u_t + r_t + 1)} \right) . (*)$$

Para simplificar la expresión $(*)$, vamos a usar la propiedad que caracteriza a la función Gamma:

$$z.\Gamma(z) = \Gamma(z+1),$$

luego

$$\frac{z}{\Gamma(z+1)} = \frac{1}{\Gamma(z)}$$

y esta igualdad también es cierta incluso en el caso en que z es un número entero negativo, con nuestra definición

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = 0$$

en esos casos.

Iterando esta última igualdad se obtiene:

$$\frac{\prod\limits_{s=0}^{\widetilde{r}_j - 1} (u_j + r_j - s)}{\Gamma(u_j + r_j + 1)} = \frac{1}{\Gamma(u_j + r_j - \widetilde{r}_j + 1)},$$

que es válida incluso en los casos especiales, ya que si

$$\prod_{s=0}^{\widetilde{r}_j - 1} (u_j + r_j - s) = 0,$$

entonces

$$u_j + r_j - \widetilde{r}_j + 1 \in \mathbf{Z}_{\leq 0},$$

y por lo tanto

$$\frac{1}{\Gamma(u_j + r_j - \widetilde{r}_j + 1)} = 0.$$

Hechas estas simplificaciones, y usando las notaciones recién introducidas, vale:

$$(*) = \sum_{r\in\mathcal{L}} \left(\frac{a^{u+r-\widetilde{r}^{+}}}{\prod\limits_{1\leq t\leq K} \Gamma\left(u_t + r_t - \widetilde{r}_t^{+} + 1\right)} \right) (**)\,.$$

Por otro lado, desarrollando el segundo miembro de la igualdad que queremos verificar:

$$\prod_{\widetilde{r}_j<0} \left(\frac{\partial}{\partial a_j}\right)^{-\widetilde{r}_j} \left(\sum_{r\in\mathcal{L}} \frac{a^{u+r}}{\prod\limits_{1\leq t\leq K} \Gamma\left(u_t + r_t + 1\right)} \right) =$$

$$= \sum_{r\in\mathcal{L}} \left(\prod_{\widetilde{r}_j<0} \left(\frac{\partial}{\partial a_j}\right)^{-\widetilde{r}_j} \frac{a^{u+r}}{\prod\limits_{1\leq t\leq K} \Gamma\left(u_t + r_t + 1\right)} \right) =$$

$$= \sum_{r\in\mathcal{L}} \left(\prod_{\widetilde{r}_j<0} \left(\prod_{s=0}^{-\widetilde{r}_j-1} (u_j + r_j - s) \right) \frac{a^{u+r-\widetilde{r}^{-}}}{\prod\limits_{1\leq t\leq K} \Gamma\left(u_t + r_t + 1\right)} \right) =$$

$$= \sum_{r\in\mathcal{L}} \left(\frac{a^{u+r-\widetilde{r}^{-}}}{\prod\limits_{1\leq t\leq K} \Gamma\left(u_t + r_t - \widetilde{r}_t^{-} + 1\right)} \right) (***),$$

usando las mismas simplificaciones que en la cuenta anterior.

Para ver que $(**)$ es lo mismo que $(***)$ hacemos un "cambio de variables" sobre $r \in \mathcal{L}$. Observamos que la la transformación

$$r \to r + \widetilde{r}$$

es biyectiva, luego se puede sumar sobre $\widehat{r} := r + \widetilde{r}$, con r recorriendo $\mathcal{L}$. Resulta entonces lo siguiente:

$$(**) = \sum_{\widehat{r}\in\mathcal{L}} \left(\frac{a^{u+\widehat{r}-\widetilde{r}^{+}}}{\prod\limits_{1\leq t\leq K} \Gamma\left(u_t + \widehat{r}_t - \widetilde{r}_t^{+} + 1\right)} \right) =$$

$$= \sum_{r\in\mathcal{L}} \left(\frac{a^{u+r+\widetilde{r}-\widetilde{r}^{+}}}{\prod\limits_{1\leq t\leq K} \Gamma\left(u_t + r_t + \widetilde{r}_t - \widetilde{r}_t^{+} + 1\right)} \right) =$$

$$= \sum_{r \in \mathcal{L}} \left(\frac{a^{u+r-\widetilde{r}^-}}{\prod_{1 \le t \le K} \Gamma\left(u_t + r_t - \widetilde{r_t}^- + 1\right)} \right) = (***).\Box$$

Si la colección de parámetros β está fija, entonces los posibles u para que ϕ_u sea una solución del sistema hipergeométrico con parámetros β_i están en el subespacio afín

$$\prod(\beta) := \left\{ (u_1, u_2, \cdots u_K) \,/\, \sum_{j=1}^{K} \chi_{ij} u_j = \beta_i, \forall i, 1 \le i \le k \right\}.$$

Observemos que $\prod(\beta)$ es paralelo al subespacio lineal $\mathcal{L}_C := \mathcal{L} \otimes \mathbf{C}$

Definición 4.1 *Llamaremos a un subconjunto* $\mathbf{I} \subset \{1, 2, \cdots, K\}$ conjunto base *si los vectores* $\chi_j \, (j \in \mathbf{I})$ *forman una base del espacio vectorial* $\mathbf{R}^k$.

Para cada $\mathbf{J} \subset \{1, 2, \cdots K\}$ notaremos $\mathbf{C}^{\mathbf{J}}$ al subespacio coordenado

$$\left\{ a \in \mathbf{C}^K / a_j = 0, \forall j \notin \mathbf{J} \right\}.$$

Proposición 4.2 $\mathbf{I} \subset \{1, 2, \cdots K\}$ *es un conjunto base si y sólo si las funciones lineales*

$$a_j \left(j \in \overline{\mathbf{I}} := \{1, 2, \cdots, K\} \setminus \mathbf{I} \right)$$

forman un sistema de coordenadas en $\prod(\beta)$, *o sea la proyección*

$$\prod(\beta) \to \mathbf{C}^{\overline{\mathbf{I}}}$$

resulta biyectiva.

Demostración: Supongamos sin pérdida de generalidad $\mathbf{I} = \{1, \cdots, k\}$. Para ver que vale $\Rightarrow]$, sabemos por hipótesis que $\{\chi_1, \cdots, \chi_k\}$ es una base de $\mathbf{R}^k$.

Veamos la proyección

$$\pi : \prod(\beta) \to \mathbf{C}^{\overline{\mathbf{I}}}, \pi(u) = (u_{k+1}, \cdots, u_K)$$

Como $u \in \prod(\beta)$, entonces

$$0 = \mathcal{A}.u^t = (\chi_1 \cdots \chi_K)\, u^t = (\chi_1 \cdots \chi_K) \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_K \end{pmatrix}$$

luego

$$(\chi_1 \cdots \chi_k) \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix} = -(\chi_{k+1} \cdots \chi_K) \begin{pmatrix} u_{k+1} \\ \vdots \\ u_K \end{pmatrix}.$$

Por ser $\{\chi_1, \cdots, \chi_k\}$ una base, la matriz $(\chi_1 \cdots \chi_k)$ resulta inversible, de allí que

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix} = -(\chi_1 \cdots \chi_k)^{-1} (\chi_{k+1} \cdots \chi_K) \begin{pmatrix} u_{k+1} \\ \vdots \\ u_K \end{pmatrix}.$$

Esto tiene la siguiente lectura: dadas las últimas $K - k$ coordenadas de u, las k primeras están unívocamente determinadas. Luego,

$$\pi(u) = \pi\left(u^{'}\right) \Rightarrow u = u^{'}.$$

Por otro lado, cualquiera sea la $(K-k)-$upla

$$(u_{k+1}, \cdots, u_K) \in \mathbf{C}^{\overline{\mathbf{I}}},$$

usando esta última fórmula es posible levantarla a un $u \in \prod(\beta)$ de tal manera que

$$\pi(u) = (u_{k+1}, \cdots, u_K).$$

Luego π es biyectiva.

$\Leftarrow$] Consideramos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$(\chi_1 \cdots \chi_k) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}$$

con $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ fijos. El álgebra lineal dice que si tal sistema admite solución única para alguna $k-$upla $(\alpha_1, \cdots, \alpha_k)$ entonces admite solución única para cualquier $k-$upla, y por lo tanto la matriz $(\chi_1 \cdots \chi_k)$ es inversible. Aplicando este resultado a la igualdad

$$(\chi_1 \cdots \chi_k) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = -(\chi_{k+1} \cdots \chi_K) \begin{pmatrix} u_{k+1} \\ \vdots \\ u_K \end{pmatrix}$$

para $(u_{k+1} \cdots, u_K)$elegidos arbitrariamente, como π es biyectiva, existe solución única para este sistema. Luego, $\{\chi_1, \cdots, \chi_k\}$ es una base de $\mathbf{R}^k$.$\square$

Para un conjunto base $\mathbf{I}$ notamos

$$\prod\nolimits_{\mathbf{Z}} (\beta, \mathbf{I}) = \left\{ u \in \prod (\beta) / u_j \in \mathbf{Z}, j \notin \mathbf{I} \right\}.$$

Geométricamente, este conjunto es un lattice en la variedad lineal $\prod (\beta)$.

Llamaremos a las series $\phi_u(a)$, para $u \in \prod_{\mathbf{Z}} (\beta, \mathbf{I})$, $\Gamma-$ *series multidimensionales asociadas con el conjunto base* $\mathbf{I}$. Queremos describir la región de convergencia de estas series, o sea el conjunto $\left\{ a \in \mathbf{C}^K / \phi_u(a) \text{ converge} \right\}$. Para ello introduciremos el espacio "logarítmico" $\mathbf{R}^K$ con coordenadas $w_1, \cdots, w_K$. Para cada conjunto base $\mathbf{I}$ y cada punto $w \in \mathbf{R}^K$, definimos una función lineal $\varphi_{\mathbf{I},w}$ sobre $\mathbf{R}^k$ haciendo valer

$$\varphi_{\mathbf{I},w}(\chi_j) = w_j, \quad si \quad j \in \mathbf{I}.$$

Definición 4.2 *El* cono $\mathbf{C}(\mathbf{I}) \subset \mathbf{R}^K$ *es el conjunto de los* $w \in \mathbf{R}^K$ *tales que*

$$\varphi_{\mathbf{I},w}(\chi_j) \leq w_j, \quad si \quad j \notin \mathbf{I}..$$

Teorema 4.3 *Sea* $\mathbf{I} \subset \{1, 2, \cdots K\}$ *un conjunto base,* $u \in \prod_{\mathbf{Z}} (\beta, \mathbf{I})$. *Existe* $V \in \mathbf{C}(\mathbf{I})$ *tal que la serie* $\phi_u(a)$ *converge para aquellos* $a \in \mathbf{C}^K$ *para los cuales*

$$(-\log |a_1|, \cdots, -\log |a_K|) \in \mathbf{C}(\mathbf{I}) + V.$$

Demostración: Suponemos ahora, para no confundir demasiado la notación, que

$$\mathbf{I} = \{K-k+1, \cdots, K\}.$$

Para cada

$$l \in \overline{\mathbf{I}} = \{1, 2, \cdots, K-k\},$$

sea $b^{(l)} \in \mathcal{L}_Q := \mathcal{L} \otimes Q$ el único vector que verifica $b_j^{(l)} := \delta_{lj}$. Los vectores $\left\{b^{(l)}\right\}_{1 \leq l \leq K-k}$ están bien definidos por la proposición 4.2, y forman una $\mathbf{Q}$ base para $\mathcal{L}_Q$ ya que son linealmente independientes y son tantos como la dimensión de $\mathcal{L}_Q$, por el lema 3.1. Hacemos

$$y_l := a^{b^{(l)}}, 1 \leq l \leq K-k.$$

Sea

$$M := \left\{ m = (m_1, \cdots, m_{K-k}) \in \mathbf{Q}^k / \sum_{i=1}^{K-k} m_i b^{(i)} \in \mathcal{L} \right\}.$$

Afirmamos que $M \subset \mathbf{Z}^{K-k}$. En efecto, si

$$r = \sum_{i=1}^{K-k} m_i b^{(i)} \in \mathcal{L},$$

para j tal que $1 \leq j \leq K-k$ vale que $r_j \in \mathbf{Z}$, y

$$r_j = \sum_{i=1}^{K-k} m_i b_j^{(i)} = m_j.$$

La serie puede escribirse entonces en estos términos:

$$\phi_u(a) = \sum_{r \in \mathcal{L}} \frac{a^{u+r}}{\prod\limits_{1 \leq t \leq K} \Gamma(u_t + r_t + 1)} = a^u \sum_{r \in \mathcal{L}} \frac{a^r}{\prod\limits_{1 \leq t \leq K} \Gamma(u_t + r_t + 1)} =$$

$$= a^u \sum_{m \in M} \frac{a^{\sum_{i=1}^{K-k} m_i b^{(i)}}}{\prod\limits_{1 \leq t \leq K} \Gamma\left(u_t + \sum_{j=1}^{K-k} m_j b_t^{(j)} + 1\right)} =$$

$$= a^u \sum_{m \in M} \frac{\prod\limits_{1 \le i \le K-k} \left(a^{b^{(i)}}\right)^{m_i}}{\prod\limits_{1 \le t \le K} \Gamma\left(u_t + \sum\limits_{j=1}^{K-k} m_j b_t^{(j)} + 1\right)} =$$

$$= a^u \sum_{m \in M} \frac{y^m}{\prod\limits_{1 \le t \le K} \Gamma\left(u_t + \sum\limits_{j=1}^{K-k} m_j b_t^{(j)} + 1\right)}.$$

Veamos que

$$M^+ := \left\{ m \in M / \frac{1}{\prod\limits_{1 \le t \le K} \Gamma\left(u_t + \sum\limits_{j=1}^{K-k} m_j b_t^{(j)} + 1\right)} \neq 0 \right\}$$

es un subconjunto de $\prod\limits_{i=1}^{K-k} \mathbf{Z}_{\ge -u_i}$. Para

$$1 \le t \le K-k, \quad u_t \in \mathbf{Z}$$

ya que $u \in \prod_{\mathbf{Z}} (\beta, \mathbf{I})$. Además,

$$u_t + \sum_{j=1}^{K-k} m_j b_t^{(j)} + 1 = u_t + m_t + 1.$$

Luego,

$$\frac{1}{\Gamma\left(u_t + m_t + 1\right)} \neq 0$$

si y sólo si $m_t \ge -u_t$.

Ahora vamos a demostrar que

$$\sum_{m \in M^+} \frac{y^m}{\prod\limits_{1 \le t \le K} \Gamma\left(u_t + \sum\limits_{j=1}^{K-k} m_j b_t^{(j)} + 1\right)}$$

converge si $|y_l|$ es chico. Lo vamos a hacer sólo para el caso $u_t \notin \mathbf{Z}$, si $K-k+1 \le t \le K$, que luego vamos a necesitar. Los otros casos se demuestran (con un poco más de cuidado), de análoga manera. Observemos primero que para $|y|$ chico, el conjunto

$$\left\{ \frac{y^m}{\prod\limits_{1\le t\le K} \Gamma\left(u_t + \sum\limits_{j=1}^{K-k} m_j b_t^{(j)} + 1\right)} \right\}_{m\in \mathbf{Z}^{K-k}_{\ge -u_i}}$$

está acotado superiormente. Esto lo haremos por inducción sobre $|m| := \sum\limits_{i=1}^{K-k} m_i$. Demostraremos que, a partir de un cierto α entero positivo, si existe $C > 0$ tal que

$$\sup \left\{ \left| \frac{y^m}{\prod\limits_{1\le t\le K} \Gamma\left(u_t + \sum\limits_{j=1}^{K-k} m_j b_t^{(j)} + 1\right)} \right| \right\}_{|m|<\alpha} \le C,$$

entonces $\sup \left\{ \left| \frac{y^m}{\prod\limits_{1\le t\le K} \Gamma\left(u_t + \sum\limits_{j=1}^{K-k} m_j b_t^{(j)} + 1\right)} \right| \right\}_{|m|\le\alpha} \le C.$

Una observación previa que luego nos será útil es la siguiente: para cada $i, 1 \le i \le K-k$, existe un entero positivo d_i tal que si $m \in \mathcal{M}^+$, y $|m|$ es grande, entonces $m - d_i e_i \in \mathcal{M}^+$. En efecto, sea

$$d_i := mcm \left\{ \text{denominadores de } b_l^{(i)}, K-k+1 \le l \le K \right\}.$$

Luego,

$$d_i.b^{(i)} \in \mathbf{Z}^K \cap \mathcal{L}_{\mathbf{Q}} \Rightarrow d_i.b^{(i)} \in \mathcal{L},$$

por el lema 3.2. Tomando

$$\alpha \ge (K-k)\,.máx\,\{d_i\}_{1\le i\le K-k}\,.$$

Sea $m \in M^+$, tal que $|m| = \alpha$. Entonces existe $i, 1 \le i \le K-k$, tal que $m - d_i e_i \in \mathcal{M}^+$, y además

$$|m - d_i e_i| = |m| - d_i < \alpha.$$

Supongamos sin pérdida de generalidad que $i = 1$. Entonces para $\widetilde{m} := m - d_i e_i$ vale la hipótesis inductiva:

$$\left| \frac{y^{\widetilde{m}}}{\prod\limits_{1 \leq t \leq K} \Gamma\left(u_t + \sum\limits_{j=1}^{K-k} \widetilde{m_j} b_t^{(j)} + 1\right)} \right| \leq C,$$

y basta ver que

$$\left| \frac{y^{m}}{\prod\limits_{1 \leq t \leq K} \Gamma\left(u_t + \sum\limits_{j=1}^{K-k} m_j b_t^{(j)} + 1\right)} \right| \leq \left| \frac{y^{\widetilde{m}}}{\prod\limits_{1 \leq t \leq K} \Gamma\left(u_t + \sum\limits_{j=1}^{K-k} \widetilde{m_j} b_t^{(j)} + 1\right)} \right|$$

si $|y|$ es chico. Hacemos el cociente

$$\left| \frac{y^{m}}{\prod\limits_{1 \leq t \leq K} \Gamma\left(u_t + \sum\limits_{j=1}^{K-k} m_j b_t^{(j)} + 1\right)} \right| \Bigg/ \left| \frac{y^{\widetilde{m}}}{\prod\limits_{1 \leq t \leq K} \Gamma\left(u_t + \sum\limits_{j=1}^{K-k} \widetilde{m_j} b_t^{(j)} + 1\right)} \right| =$$

$$= |y_1|^{d_1} \prod_{1 \leq t \leq K} \frac{\Gamma\left(u_t + \sum\limits_{j=1}^{K-k} \widetilde{m_j} b_t^{(j)} + 1\right)}{\Gamma\left(u_t + \sum\limits_{j=1}^{K-k} m_j b_t^{(j)} + 1\right)} =$$

$$= |y_1|^{d_1} \prod_{1 \leq t \leq K} \frac{\Gamma\left(u_t + \sum\limits_{j=1}^{K-k} \widetilde{m_j} b_t^{(j)} + 1\right)}{\Gamma\left(u_t + \sum\limits_{j=1}^{K-k} m_j b_t^{(j)} + 1\right)}.$$

Queremos simplificar la expresiones

$$\frac{\Gamma\,(u)}{\Gamma(u+z)}, z \in \mathbf{Z},$$

que aparecen en el producto. Para ello usamos la propiedad que caracteriza a la función Gamma:

$$z.\Gamma(z) = \Gamma(z+1),$$

y distinguiendo los casos en que z sea positivo o negativo, llegamos a la siguiente identidad:

$$\frac{\Gamma(u)}{\Gamma(u+z)} = \begin{cases} \frac{1}{u(u+1)\cdots(u+z-1)} & \text{si } z \in \mathbf{N} \\ (u-1)(u-2)\cdots(u+z) & \text{si } z \in \mathbf{Z}_{<0}. \end{cases} \tag{8}$$

Luego, en el caso en que estamos trabajando, se tiene

$$\frac{\Gamma\left(u_t + \sum_{j=1}^{K-k} \widetilde{m_j} b_t^{(j)} + 1\right)}{\Gamma\left(u_t + \sum_{j=1}^{K-k} \widetilde{m_j} b_t^{(j)} + 1 + d_1 b_t^{(1)}\right)} =$$

$$= \begin{cases} \prod_{i=0}^{d_1 b_t^{(1)}-1} \frac{1}{u_t + \sum_{j=1}^{K-k} \widetilde{m_j} b_t^{(j)} + 1 + i} & \text{si } b_t^{(1)} > 0 \\ \prod_{i=1}^{-d_1 b_t^{(1)}} \left(u_t + \sum_{j=1}^{K-k} \widetilde{m_j} b_t^{(j)} + 1 - i\right) & \text{si } b_t^{(1)} < 0 \end{cases}$$

así que

$$|y_1|^{d_1} \prod_{1 \le t \le K} \frac{\Gamma\left(u_t + \sum_{j=1}^{K-k} \widetilde{m_j} b_t^{(j)} + 1\right)}{\Gamma\left(u_t + \sum_{j=1}^{K-k} m_j b_t^{(j)} + 1\right)} =$$

$$= |y_1|^{d_1} \frac{\prod_{b_t^{(1)} < 0} \left(\prod_{i=1}^{-d_1 b_t^{(1)}} \left(u_t + \sum_{j=1}^{K-k} \widetilde{m_j} b_t^{(j)} + 1 - i\right)\right)}{\prod_{b_t^{(1)} > 0} \left(\prod_{i=0}^{d_1 b_t^{(1)}-1} \left(u_t + \sum_{j=1}^{K-k} \widetilde{m_j} b_t^{(j)} + 1 + i\right)\right)}.$$

Observar que hay tantos factores en el numerador como en el denominador ya que

$$\sum_{i=1}^{K} d_1 b_t^{(1)} = d_1 \sum_{i=1}^{K} b_t^{(1)} = 0,$$

por el lema 3.3.

Sea $\rho > 0$ tal que

$$\rho < \min\left\{1, dist\left(u_t, \mathbf{Z}\right), K-k+1 \le t \le K\right\}.$$

sólo hay que ver que la función

$$\Psi\left(z_1,\cdots,z_K\right):=\frac{\prod\limits_{b_t^{(1)}<0}\left(\prod\limits_{i=1}^{-d_1b_t^{(1)}}\left|z_t-i\right|\right)}{\prod\limits_{b_t^{(1)}>0}\left(\prod\limits_{i=0}^{d_1b_t^{(1)}-1}\left|z_t+i\right|\right)}$$

está acotada en

$$D:=\left\{z_1\geq 1,z_2\geq 1,\cdots,z_{K-k}\geq 1,z_t\geq\rho,K-k<t\leq K\right\}$$

En efecto, si u_t es entero, entonces $1\leq t\leq K-k$, y

$$z_t=u_t+\sum_{j=1}^{K-k}\widetilde{m_j}b_t^{(j)}+1=u_t+\widetilde{m}_t+1\geq 1.$$

Por otro lado, si $K-k<t\leq K$

$$|z_t|=\left|u_t+\sum_{j=1}^{K-k}\widetilde{m_j}b_t^{(j)}+1\right|\geq\rho.$$

Para ver que Ψ está acotada, fijemos previamente

$$z=\left(z_1,\cdots,z_K\right)\in D\cap\left\{|z|\leq 1\right\}.$$

Si λ es un número positivo mayor que $R:=\frac{2|d_1b_1|}{\rho}$,

$$\Psi\left(\lambda z_1,\cdots,\lambda z_K\right)=\frac{\prod\limits_{b_t^{(1)}<0}\left(\prod\limits_{i=1}^{-d_1b_t^{(1)}}\left|\lambda z_t-i\right|\right)}{\prod\limits_{b_t^{(1)}>0}\left(\prod\limits_{i=0}^{d_1b_t^{(1)}-1}\left|\lambda z_t+i\right|\right)}=$$

$$=\frac{\lambda^{d_1\sum\left(b_t^{(1)}\right)^-}}{\lambda^{d_1\sum\left(b_t^{(1)}\right)^+}}\frac{\prod\limits_{b_t^{(1)}<0}\left(\prod\limits_{i=1}^{-d_1b_t^{(1)}}\left|z_t-\frac{i}{\lambda}\right|\right)}{\prod\limits_{b_t^{(1)}>0}\left(\prod\limits_{i=0}^{d_1b_t^{(1)}-1}\left|z_t+\frac{i}{\lambda}\right|\right)}\leq$$

$$\leq \frac{\prod\limits_{b_t^{(1)}<0} \left(\prod\limits_{i=1}^{-d_1 b_t^{(1)}} |z_t| + \left| \frac{i}{\lambda} \right| \right)}{\prod\limits_{b_t^{(1)}>0} \left(\prod\limits_{i=0}^{d_1 b_t^{(1)}-1} |z_t| - \left| \frac{i}{\lambda} \right| \right)} \leq$$

$$\leq \frac{2^{d_1 \sum \left(b_t^{(1)}\right)^-}}{\left(\frac{1}{2}\rho\right)^{\lambda^{d_1 \sum \left(b_t^{(1)}\right)^+}}}$$

y esta última constante no depende de z. Esto implica que $\Psi\left(z_1, \cdots, z_K\right)$ está acotada para $|z| > R$.

Por otro lado, Ψ es continua en $D \cap \{|z| \leq R\}$, luego uniformemente acotada. Por lo tanto, existe $M > 0$ tal que

$$|\Psi\left(z_1, \cdots, z_K\right)| \leq M$$

cualquiera sea z en el dominio de definición de Ψ. Tomando

$$|y_1|^{d_1} \leq \frac{1}{M},$$

se obtiene:

$$|y_1|^{d_1} \left| \prod_{1 \leq t \leq K} \frac{\Gamma\left(u_t + \sum\limits_{j=1}^{K-k} \widetilde{m_j} b_t^{(j)} + 1\right)}{\Gamma\left(u_t + \sum\limits_{j=1}^{K-k} m_j b_t^{(j)} + 1\right)} \right| \leq 1,$$

por lo tanto

$$\left| \frac{y^m}{\prod\limits_{1 \leq t \leq K} \Gamma\left(u_t + \sum\limits_{j=1}^{K-k} m_j b_t^{(j)} + 1\right)} \right| \leq$$

$$\leq \left| \frac{y^{\widetilde{m}}}{\prod\limits_{1 \leq t \leq K} \Gamma\left(u_t + \sum\limits_{j=1}^{K-k} \widetilde{m_j} b_t^{(j)} + 1\right)} \right| \leq C.$$

Una vez demostrado que

$$\left\{ \frac{y^m}{\prod\limits_{1\le t\le K} \Gamma\left(u_t + \sum\limits_{j=1}^{K-k} m_j b_t^{(j)} + 1\right)} \right\}_{m\in M^+}$$

está acotado para $|y|$ chico, veamos que la serie

$$\sum_{m\in M^+} \frac{y^m}{\prod\limits_{1\le t\le K} \Gamma\left(u_t + \sum\limits_{j=1}^{K-k} m_j b_t^{(j)} + 1\right)}$$

tiene radio de convergencia positivo. En efecto, supongamos que

$$\left| \frac{y^m}{\prod\limits_{1\le t\le K} \Gamma\left(u_t + \sum\limits_{j=1}^{K-k} m_j b_t^{(j)} + 1\right)} \right| \le C,\ |y_l| \le \rho_l,\ 1 \le l \le K-k,\ m \in M^+.$$

Tomando

$$\varepsilon_l := \delta.\rho_l,\ 0 < \delta < 1$$

si $|y_l| \le \varepsilon_l$, entonces

$$\left| \frac{y^m}{\prod\limits_{1\le t\le K} \Gamma\left(u_t + \sum\limits_{j=1}^{K-k} m_j b_t^{(j)} + 1\right)} \right| \le$$

$$\le \prod_{l=1}^{K-k} \delta_l^{m_l} \frac{\prod\limits_{l=1}^{K-k} \rho_l^{m_l}}{\left|\prod\limits_{1\le t\le K} \Gamma\left(u_t + \sum\limits_{j=1}^{K-k} m_j b_t^{(j)} + 1\right)\right|}$$

y esta última cantidad es menor o igual que

$$C. \prod_{l=1}^{K-k} \delta_l^{m_l}.$$

Como la serie

$$\sum_{m\in M^+}\prod_{l=1}^{K-k}\delta_l^{m_l}=\prod_{l=1}^{K-k}\left(\sum_{m_l\geq 0}\delta_l^{m_l}\right)=\prod_{l=1}^{K-k}\frac{1}{1-\delta_l},$$

converge absolutamente, también lo hace

$$\sum_{m\in M^+}\frac{y^m}{\prod\limits_{1\leq t\leq K}\Gamma\left(u_t+\sum\limits_{j=1}^{K-k}m_jb_t^{(j)}+1\right)}$$

si $|y_l|<\varepsilon_l$.

Veamos cómo se traduce la condición

$$|y_l|<\varepsilon_l,\ 1\leq l\leq K-k.$$

Por definición es

$$y_l=a^{b^{(l)}}=\prod_{1\leq j\leq K}a_j^{b_j^{(l)}}.$$

Luego,

$$|y_l|=\prod_{1\leq j\leq K}|a_j|^{b_j^{(l)}}<\varepsilon_l$$

y esto implica

$$\sum_{j=1}^{K}b_j^{(l)}.\log|a_j|<\log(\varepsilon_l).$$

Si ε_l es chico, entonces

$$\log(\varepsilon_l)=-\alpha_l,$$

para α_l un número real positivo grande. Además, para $1\leq j\leq K-k$, se verifica que $b_j^{(l)}=\delta_{lk}$. Por lo tanto,

$$\sum_{j=1}^{K}b_j^{(l)}.(-\log|a_j|)=-\log|a_l|+\sum_{j=K-k+1}^{K}b_j^{(l)}.(-\log|a_j|)>\alpha_l.\quad(*)$$

Tomamos como

$$w_a:=(-\log|a_1|,\cdots,-\log|a_K|).$$

La funcional φ_{I,w_a} está definida de la manera siguiente:

$$\varphi_{I,w_a}(\chi_j) := -\log|a_j|,$$

para $K-k+1 \le j \le K$.

Queremos ver que

$$\varphi_{I,w_a}(\chi_l) \le \beta_l + (-\log|a_l|)$$

para $1 \le l \le K-k$. Observamos esta relación:

$$(\chi_1, \cdots, \chi_K)\begin{pmatrix} b_1^{(l)} \\ \vdots \\ b_K^{(l)} \end{pmatrix} = 0,$$

o sea

$$(\chi_1, \cdots, \chi_{K-k})\begin{pmatrix} b_1^{(l)} \\ \vdots \\ b_{K-k}^{(l)} \end{pmatrix} = -(\chi_{K-k+1}, \cdots, \chi_K)\begin{pmatrix} b_{K-k+1}^{(l)} \\ \vdots \\ b_K^{(l)} \end{pmatrix}.$$

Pero

$$\begin{pmatrix} b_1^{(l)} \\ \vdots \\ b_{K-k}^{(l)} \end{pmatrix} = e_l^t,$$

luego

$$-(\chi_{K-k+1}, \cdots, \chi_K)\begin{pmatrix} b_{K-k+1}^{(l)} \\ \cdots \\ b_K^{(l)} \end{pmatrix} = \chi_l^t,$$

con lo cual resulta

$$\chi_l = -\left(b_{K-k+1}^{(l)}, \cdots, b_K^{(l)}\right)(\chi_{K-k+1}, \cdots, \chi_K)^t = -\sum_{i=K-k+1}^{K} b_i^{(l)}\chi_i.$$

Ahora podemos calcular

$$\varphi_{I,w_a}(\chi_l) = -\sum_{i=K-k+1}^{K} b_i^{(l)}\varphi_{I,w_a}(\chi_i) =$$

$$= \sum_{i=K-k+1}^{K} b_i^{(l)}.\log|a_i| \leq -\log|a_l| - \alpha_l$$

por la desigualdad $(*)$. Tomando

$$V = (\alpha_1, \cdots, \alpha_{K-k}, 0, \cdots, 0)$$

se cumple que

$$(-\log|a_1|, \cdots, -\log|a_K|) \in \mathbf{C}(\mathbf{I}) + V.$$

Además está claro que $V \in \mathbf{C}(\mathbf{I})$, ya que

$$\varphi_{I,V} = 0 \leq V_j, \quad \forall j.$$

La recíproca es evidente, o sea cualquier vector que se encuentre en $\mathbf{C}(\mathbf{I}) + V$, al escribirse como

$$(-\log|a_1|, \cdots, -\log|a_K|)$$

resulta la serie ϕ_u convergente para $|a|$.□

5 Triangulaciones del poliedro de Newton

Definición 5.1 *Llamaremos* $\mathbf{P}$ *a la cápsula convexa en* $\mathbf{R}^k$ *del conjunto* $\{0, \chi_1, \ldots, \chi_K\}$. *Para un conjunto base* $\mathbf{I}$ *denotaremos con* $\Delta(\mathbf{I})$ *al simplex en* $\mathbf{R}^k$ *que es la cápsula convexa de* 0 *y* $\{\chi_j\}_{j\in\mathbf{I}}$.

$\mathbf{P}$ se suele llamar "el poliedro de Newton" ya que el caso $k = 1$ fue estudiado por Newton para encontrar soluciones de ecuaciones como series formales.

Definición 5.2 *Una colección de conjuntos bases* $\mathbf{T}$ *se llama una* triangulación *del poliedro* $\mathbf{P}$, *si*

$$\bigcup_{\mathbf{I}\in\mathbf{T}} \Delta(\mathbf{I}) = \mathbf{P}$$

y para cada $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2 \in \mathbf{T}$ *los símplices* $\Delta(\mathbf{I}_2)$ *y* $\Delta(\mathbf{I}_2)$ *se intersecan en una sola cara (posiblemente vacía).*

Definición 5.3 *Para una triangulación* $\mathbf{T}$ *denotaremos por* $\mathbf{C}(\mathbf{T})$ *al cono en el espacio logarítmico* $\mathbf{R}^K$ *que resulta de intersecar todos los* $\mathbf{C}(\mathbf{I})$, *con* $\mathbf{I} \in \mathbf{T}$. *Por* $Vert(\mathbf{T})$ *denotaremos al conjunto de todos los vértices de la triangulación* $\mathbf{T}$*, o sea*

$$Vert(\mathbf{T}) = \bigcup_{\mathbf{I}\in\mathbf{T}} \{\chi_j\}_{j\in\mathbf{I}}.$$

Dada una triangulación $\mathbf{T}$ y un punto $w \in \mathbf{R}^K$, construiremos una función lineal a trozos

$$\varphi_{T,w} : \mathbf{P} \to \mathbf{R},$$

la cual queda caracterizada de la manera siguiente:

a) $\varphi_{T,w}$ es continua y para cada conjunto base $\mathbf{I} \in \mathbf{T}$, la restricción $\varphi_{T,w}|_{\Delta(\mathbf{I})}$ es lineal;

b) para $j \in Vert(\mathbf{T})$, $\varphi_{T,w}(\chi_j) = w_j$.

Proposición 5.1 *El cono* $\mathbf{C}(\mathbf{T})$ *consiste de todos aquellos* w *para los cuales la función* $\varphi_{T,w}$ *es convexa y para* $j \notin Vert(\mathbf{T})$, *se tiene*

$$\varphi_{T,w}(\chi_j) \leq w_j.$$

Demostración: Hay ver que

$$\bigcap_{\mathbf{I}\in\mathbf{T}} \mathbf{C}(\mathbf{I}) = \left\{ w \in \mathbf{R}^K / \varphi_{T,w} \text{ es convexa y } \varphi_{T,w}(\chi_j) \leq w_j, j \notin Vert(\mathbf{T}) \right\}$$

$\subset$] Por definición, el cono $\mathbf{C}(\mathbf{I})$ es el conjunto de los $w \in \mathbf{R}^K$ para los cuales se cumple

$$\varphi_{I,w}(\chi_j) = w_j, j \in \mathbf{I} \quad y \quad \varphi_{I,w}(\chi_j) \leq w_j,\ j \notin Vert(\mathbf{I}).$$

Si $w \in \mathbf{C}(\mathbf{I})$, para todo $\mathbf{I} \in \mathbf{T}$, entonces

$$\varphi_{T,w}(\chi_j) \leq w_j, \quad \forall j$$

ya que por ser $\mathbf{T}$ una triangulación, $\chi_j \in \Delta(\mathbf{I}_i)$, para algún $\mathbf{I}_i \in \mathbf{T}$. Luego,

$$\varphi_{T,w}(\chi_j) = \varphi_{I_j,w}(\chi_j) \leq w_j.$$

Veamos entonces que $\varphi_{T,w}$ es convexa. Sean $p_1, p_2 \in \mathbf{P}$. Luego,

$$p_i \in \Delta(\mathbf{I}_i),$$

así que

$$p_i = \sum_{j \in \mathbf{I}_i} \lambda_{ij}\chi_j, \quad 0 \leq \lambda_j \leq 1, \ \sum \lambda_j \leq 1$$

ya que $\Delta(\mathbf{I}_i)$ es la cápsula convexa de los χ_j y el cero. En $\Delta(\mathbf{I}_i)$, la función $\varphi_{T,w}$ es lineal así que

$$\varphi_{T,w}(p_i) = \varphi_{I_i,w}(p_i) = \sum_{j \in \mathbf{I}_i} \lambda_{ij}\varphi_{I_i,w}(\chi_j) = \sum_{j \in \mathbf{I}_i} \lambda_j w_j.$$

Si la suma $p_1 + p_2$ está en $\mathbf{P}$, estará en un cierto símplice $\Delta(\mathbf{I}_3)$ y además

$$p_1 + p_2 = \sum_{j \in \mathbf{I}_1} \lambda_{1j}\chi_j + \sum_{l \in \mathbf{I}_2} \lambda_{2l}\chi_l.$$

De allí resulta

$$\varphi_{T,w}(p_1 + p_2) = \varphi_{I_3,w}\left(\sum_{j \in \mathbf{I}_1} \lambda_{1j}\chi_j + \sum_{l \in \mathbf{I}_2} \lambda_{2l}\chi_l\right) =$$

$$= \sum_{j \in \mathbf{I}_1} \lambda_{1j}\varphi_{I_3,w}(\chi_j) + \sum_{l \in \mathbf{I}_2} \lambda_{2l}\varphi_{I_3,w}(\chi_l) \leq \sum_{j \in \mathbf{I}_1} \lambda_{1j}w_j + \sum_{l \in \mathbf{I}_2} \lambda_{2l}w_l =$$

$$= \varphi_{T,w}(p_1) + \varphi_{T,w}(p_2).$$

Por otro lado, si $p \in \mathbf{P}$ y $\lambda p \in \mathbf{P}$,$\lambda > 0$, entonces tanto p como λp se encuentran en el mismo símplice ya que si $\lambda < 1$ entonces λp está en el segmento entre 0 y p, y si $\lambda > 1$, p está en el segmento entre 0 y λp. Como los símplices son convexos, se deduce que

$$\varphi_{T,w}(\lambda p) = \lambda\varphi_{T,w}(p),$$

cualquiera sea $\lambda > 0$, siempre que $\lambda p \in \mathbf{P}$.

$\supset$] Sea w tal que $\varphi_{T,w}$ es convexa y

$$\varphi_{T,w}(\chi_j) \leq w_j, j \notin Vert(\mathbf{T});$$

sea $\mathbf{I} \in \mathbf{T}$, queremos ver que $w \in \mathbf{C}(\mathbf{I})$. Para ello, estimemos

$$\varphi_{I,w}(\chi_j), j \notin \mathbf{I}.$$

Supongamos que existe un j_0 tal que

$$\varphi_{I,w}(\chi_{j_0}) > \varphi_{T,w}(\chi_{j_0}).$$

Tomemos un punto $p \in \Delta(\mathbf{I})^{\circ}$. Entonces $p + \varepsilon.\chi_{j_0} \in \Delta(\mathbf{I})$, para $\varepsilon > 0$, pequeño. Luego,

$$\varphi_{T,w}(p + \varepsilon.\chi_{j_0}) = \varphi_{I,w}(p + \varepsilon.\chi_{j_0}) =$$

$$= \varphi_{I,w}(p) + \varepsilon.\varphi_{I,w}(\chi_{j_0}) > \varphi_{T,w}(p) + \varepsilon.\varphi_{T,w}(\chi_{j_0}) \geq \varphi_{T,w}(p + \varepsilon.\chi_{j_0}),$$

absurdo.

Entonces

$$\varphi_{I,w}(\chi_j) \leq \varphi_{T,w}(\chi_j), \forall j \notin Vert(\mathbf{T}),$$

lo cual implica $\varphi_{I,w}(\chi_j) \leq w_j$.$\square$

Definición 5.4 *Una triangulación* $\mathbf{T}$ *del poliedro de Newton* $\mathbf{P}$ *se dice* regular *si el cono* $\mathbf{C}(\mathbf{T}) \subset \mathbf{R}^K$ *contiene puntos interiores. En otras palabras,* $\mathbf{T}$ *es regular si existen funciones lineales a trozos estrictamente convexas sobre* $\mathbf{P}$.

El hecho de que una triangulación $\mathbf{T}$ sea regular implica, por el teorema 4.3, que existe un abierto no vacío $\mathcal{U} \subset \mathbf{C}^K$, tal que la serie $\phi_u(a)$ converge para $a \in \mathcal{U}$, si $u \in \prod_{\mathbf{Z}}(\beta, \mathbf{I})$, cualquiera sea $\mathbf{I} \in \mathbf{T}$. Explícitamente,

$$\mathcal{U} := Log^{-1}(\mathbf{C}(\mathbf{T})^{\circ} + V),$$

para un V elegido convenientemente.

Finalizamos esta sección mencionando un resultado bastante interesante acerca de los sistemas de la forma (6). Introducimos una forma de volumen en $\mathbf{R}^k$ respecto del cual el volumen del cubo unidad es igual a $k!$. De esta manera, el volumen de cualquier poliedro con vértices en $\mathbf{R}^k$ será entero.

Teorema 5.2 (*Theorem 2 de* [2]) : *El sistema hipergeométrico* (6) *es holónomo. El número de soluciones linealmente independientes de este sistema en un punto genérico es igual al volumen del poliedro* $\mathbf{P}$.

La demostración de este terorema está basada en aspectos de teoría de $\mathcal{D}-$módulos aplicados al sistema hipergeómetrico en cuestión, y se encuentra detallada en [2].

6 Las raíces como funciones hipergeométricas

Habíamos dicho en la introducción que, dada la ecuación genérica de grado n introducida en (1), las raíces de dicha ecuación -como función de los coeficientes- satisfacen un sistema hipergeométrico del tipo (6). Vamos a describir explícitamente dicho sistema. El valor de K para este caso es $n+1$, ya que las funciones que aquí consideramos dependen de $a_0, a_1, \cdots a_n$. Observamos que k es el número de ecuaciones diferenciales de primer orden Z_i que aparecen en (6), y el sistema que satisfacen las raíces (2) tiene 2 ecuaciones de este tipo. Luego, $k = 2$.

La matriz $\mathcal{A}$ y los parámetros $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ pueden deducirse también de las ecuaciones de primer orden de (2). De hecho,

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \beta_1 = -1, \beta_2 = 0. \tag{9}$$

$\mathcal{A}$ cumple con las condiciones pedidas ya que ciertamente $\left\{\binom{0}{1}, \cdots, \binom{n}{1}\right\}$ generan $\mathbf{Z}^2$ como $\mathbf{Z}-$módulo, de hecho

$$\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

es una base de $\mathbf{Z}^2$. Además, tomando

$$c_1 = 0, c_2 = 1,$$

se verifica que todos los vectores $\left\{\binom{t}{1}\right\}_{0 \le t \le n}$ están en el hiperplano

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 = 1.$$

El lattice $\mathcal{L}$ es el sublattice $(n-1)$-dimensional de $\mathbf{Z}^{n+1}$ dado por:

$$\mathcal{L} = \left\{ v = (v_0, \cdots, v_n) \in \mathbf{Z}^{n+1} / \sum v_i = 0, \sum i v_i = 0 \right\} \tag{10}$$

Sólo nos falta ver que las finitas ecuaciones de orden 2 de la proposición 2.1, alcanzan para reconstruir los infinitos $\{\Box_r\}_{r \in \mathcal{L}}$. Veamos que esto es así.

Proposición 6.1 *El sistema de ecuaciones diferenciales que aparece en* (2) *es un sistema hipergeométrico del tipo* (6) *con la matriz* $\mathcal{A}$ *y los parámetros* β *dados en* (9).

Demostración: Las ecuaciones de primer orden son las mismas que en (6). Sólo resta ver que si

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial a_i \partial a_j} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial a_k \partial a_l}$$

cada vez que $i + j = k + l$, entonces $\Box_r \phi = 0, \forall r \in \mathcal{L}$.

Observemos que esta condición estará demostrada si verificamos que, en $\mathbf{C}\left[\frac{\partial}{\partial a_0}, \cdots, \frac{\partial}{\partial a_n}\right]$ el ideal generado por $\left\{\frac{\partial^2 \phi}{\partial a_i \partial a_j} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial a_k \partial a_l}\right\}_{i+j=k+l}$ coincide con $\langle \Box_r \rangle_{r \in \mathcal{L}}$. En virtud del isomorfismo de anillos que proporciona la transformada de Fourier entre $\mathbf{C}\left[\frac{\partial}{\partial a_0}, \cdots, \frac{\partial}{\partial a_n}\right]$ y $\mathbf{C}\left[a_0, \cdots, a_n\right]$, $\frac{\partial}{\partial a_i} \to a_i$, podemos trabajar en el anillo de polinomios, y verificar que

$$\langle a_i a_j - a_k a_l \rangle_{i+j=k+l} = \left\langle \prod_{r_j > 0} a_j^{r_j} - \prod_{r_j < 0} a_j^{-r_j} \right\rangle_{r \in \mathcal{L}}.$$

$\subset]$ Es trivial, ya que $a_i a_j - a_k a_l$ es el polinomio que corresponde al vector

$$r = e_i + e_j - e_k - e_l, \quad r \in \mathcal{L}$$

para $i + j = k + l$.

$\supset]$ Basta ver que los generadores del ideal de la derecha se escriben como combinación polinómica de los $a_i a_j - a_k a_l$. Tomemos el orden monomial lexicográfico con

$$a_0 > a_1 > \cdots > a_n.$$

Vamos a demostrar que cualquier polinomio de la forma

$$\prod_{r_j>0} a_j^{r_j} - \prod_{r_j<0} a_j^{-r_j}, r \in \mathcal{L},$$

puede escribirse como

$$(a_i a_j - a_k a_l) M(a) + Q(a) \left(\prod_{\widetilde{r_j}>0} a_j^{\widetilde{r_j}} - \prod_{\widetilde{r_j}<0} a_j^{-\widetilde{r_j}} \right),$$

con $i + j = k + l,\ \ M(a), Q(a) \in \mathbf{C}[a_0, \cdots, a_n],\ \widetilde{r} = (\widetilde{r_0}, \cdots, \widetilde{r_n}) \in \mathcal{L}$, y

$$gr_{lex} \left(\prod_{\widetilde{r_j}>0} a_j^{\widetilde{r_j}} - \prod_{\widetilde{r_j}<0} a_j^{-\widetilde{r_j}} \right) < gr_{lex} \left(\prod_{r_j>0} a_j^{r_j} - \prod_{r_j<0} a_j^{-r_j} \right).$$

Como toda cadena estrictamente decreciente en el grado es finita, esto implicará que

$$\prod_{r_j>0} a_j^{r_j} - \prod_{r_j<0} a_j^{-r_j}$$

se escribe como combinación polinómica de los $(a_i a_j - a_k a_l)$.

Para comenzar esta demostración, hagamos algunas observaciones acerca del lattice $\mathcal{L}$:

1) Si $r = (r_1, \cdots, r_K) \in \mathcal{L} \setminus \{0\}$, entonces $\{j : r_j \neq 0\}$ tiene más de dos elementos. En efecto, no puede haber un solo r_j no nulo ya que debe cumplirse

$$\sum r_j = 0,$$

y si hubiera solo dos, debería cumplirse

$$r_i + r_j = i r_i + j r_j = 0.$$

Este sistema admite solución única $r_i = r_j = 0$. Absurdo.

2) Corolario de 1) :

$$r \in \mathcal{L} \setminus \{0\} \Rightarrow \sum r_j^+ \geq 2,$$

ya que o bien hay más de una coordenada entera positiva o más de una coordenada negativa. Como en valor absoluto suman lo mismo, sale lo pedido.

3) Para $r \in \mathcal{L} \setminus \{0\}$, sea

$$i_0 := \min \{i / r_i \neq 0\}.$$

Si $r_{i_0} < 0$ (resp. > 0) entonces existe

$$i_1 \in \{i / r_i \neq 0\}, i_1 > i_0$$

tal que $r_{i_1} < 0$ (resp. > 0). De otro modo, sería

$$0 = \sum i r_i = i_0 r_{i_0} + \sum_{i > i_0} i r_i \geq i_0 r_{i_0} + (i_0 + 1) \left(\sum_{i > i_0} r_i \right) =$$

$$= i_0 r_{i_0} + (i_0 + 1)(-r_{i_0}) = -r_{i_0} > 0,$$

absurdo.

4) Con las mismas notaciones de 3), si $r_{i_0} > 0$, y

$$\{r_j > 0\} = \{r_{i_0}, r_{i_1}\}$$

(tiene exactamente dos elementos), entonces

$$i_1 - i_0 > 1.$$

En efecto, si así no fuera tendríamos la siguiente igualdad:

$$0 = \sum i r_i = i_0 r_{i_0} + i_1 r_{i1} + \sum_{i > i_1} i r_i \leq$$

$$\leq i_0 r_{i_0} + i_1 r_{i_1} + (i_1 + 1) \left(\sum_{i > i_1} r_i \right) =$$

$$= i_0 r_{i_0} + i_1 r_{i_1} + (i_1 + 1)(-r_{i_0} - r_{i_1}) \leq$$

$$\leq i_1 (r_{i_0} + r_{i_1}) + (i_1 + 1)(-r_{i_0} - r_{i_1}) =$$

$$= -r_{i_0} - r_{i_1} < 0,$$

absurdo.

Hechas estas 4 observaciones, podemos afirmar lo siguiente: si

$$r \in \mathcal{L} \setminus \{0\}, r_{i_0} > 0,$$

entonces existe $r_i > 0$, tal que

$$i - i_0 > 1.$$

Vamos a implementar esta idea en la demostración de la proposición de la manera siguiente: tomemos

$$P_r(a) := \prod_{r_j>0} a_j^{r_j} - \prod_{r_j<0} a_j^{-r_j}, r \in \mathcal{L} \setminus \{0\}.$$

Supongamos s.p.g. $r_{i_0} > 0$ ya que de lo contrario tomamos

$$P_{-r}(a) = -P_r(a)$$

y trabajamos con este polinomio. La observación 4) dice que existe entonces

$$r_{i_1} > 0$$

tal que

$$i_1 - i_0 > 1.$$

Definimos

$$j_1 := i_1 - 1, j_0 := i_0 + 1.$$

Observar que

$$i_1 + i_0 = j_1 + j_0,$$

y cada $j_i \geq i_0$. Entonces hacemos la “división” entre $P_r(a)$ y $(a_{i_0}a_{i_1} - a_{j_0}a_{j_1})$ de la siguiente manera: el monomio inicial de $P_r(a)$ es $\prod\limits_{r_j>0} a_j^{r_j}$ que se puede escribir como $a_{i_0}a_{i_1}M(a)$, con

$$M(a) = \frac{\prod\limits_{r_j>0} a_j^{r_j}}{a_{i_0}a_{i_1}} \in \mathbf{C}[a],$$

ya que tanto r_{i_0} como r_{i_1} son positivos. Luego,

$$P_r(a) = \prod_{r_j>0} a_j^{r_j} - \prod_{r_j<0} a_j^{-r_j} =$$

$$= (a_{i_0}a_{i_1} - a_{j_0}a_{j_1}) M(a) + \left(a_{j_0}a_{j_1}.M(a) - \prod_{r_j<0} a_j^{-r_j} \right).$$

Ahora veamos que

$$a_{j_0}a_{j_1}.M\left(a\right)-\prod_{r_j<0}a_j^{-r_j}$$

se puede escribir como

$$Q(a)P_{\widetilde{r}}(a),\widetilde{r}\in\mathcal{L}.$$

Tomando

$$\widetilde{r}:=r+\left(e_{j_0}+e_{j_1}-e_{i_0}-e_{i_1}\right),$$

(si $\widetilde{r}_{\widetilde{i_0}}<0$, para $\widetilde{i_0}:=\min\left\{i/\widetilde{r}_i\neq 0\right\}$, entonces tomamos como $\widetilde{r}$ al vector opuesto). Se verifica que

$$\widetilde{r}\in\mathcal{L},\quad y\quad \widetilde{r}_{\widetilde{i_0}}>0.$$

Hacemos

$$Q(a):=mcd\left(a_{j_0}a_{j_1}.M\left(a\right),\prod_{r_j<0}a_j^{-r_j}\right).$$

Observar que hay pocos valores para $Q\left(a\right)$ dado que

$$mcd\left(\prod_{r_j>0}a_j^{r_j},\prod_{r_j<0}a_j^{-r_j}\right)=1,$$

digamos

$$Q(a)\in\left\{1,a_{j_0},a_{j_1},a_{j_0}a_{j_1}\right\}.$$

En todos los casos, es fácil verificar que

$$a_{j_0}a_{j_1}.M\left(a\right)-\prod_{r_j<0}a_j^{-r_j}=Q(a)P_{\widetilde{r}}(a).$$

Ahora sólo resta ver que

$$gr_{lex}\left(P_{\widetilde{r}}(a)\right)<gr_{lex}\left(P_r(a)\right).$$

Pero el monomio inicial de $P_{\widetilde{r}}(a)$ no puede tener un coeficiente superior o igual $a_{i_0}^{r_{i_p}}$, ni tampoco ningún monomio de la forma $a_i^{r_i},i<i_0$. En efecto, es $\widetilde{i_0}\geq i_0$, y si $\widetilde{i_0}=i_0$ entonces

$$r_{i_0}=\widetilde{r_{i_0}}+1>\widetilde{r_{i_0}}=\widetilde{r}_{\widetilde{i_0}}.$$

Luego, en el orden lexicográfico que hemos tomado, se verifica lo pedido.$\square$

Estamos interesados en encontrar $\Gamma-$series que sean soluciones de este sistema hipergeométrico. En primer lugar, observemos que cualquier subconjunto

$$\mathbf{I} \subset \{j\}_{0 \leq j \leq n}$$

con dos elementos es un conjunto base según la definición 4.1, ya que

$$\left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} j \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es base de $\mathbf{R}^2$, si $i \neq j$. Luego una condición necesaria para ser elemento de algún conjunto $\prod_{\mathbf{Z}} (\beta, \mathbf{I})$ es tener a lo más dos coordenadas no enteras. Vamos a centrar nuestra atención en aquellos

$$u \in \mathbf{Q}^{n+1}, \mathcal{A}.u^t = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

tales que si $u_t \in \mathbf{Z}$, $u_t \geq 0$.

Definición 6.1 *Para cada número racional u_i y cada entero v_i, definimos*

$$\gamma(u_i, v_i) := \begin{cases} 1 & si \;\; v_i = 0 \\ u_i(u_i - 1)(u_i - 2) \ldots (u_i + v_i + 1) & si \;\; v_i < 0 \\ 0 & si \;\; u_i \; \in \mathbf{Z}_{<0}, \; u_i \geq -v_i \\ \frac{1}{(u_i+1)(u_i+2)\ldots(u_i+v_i)} & en \; otro \; caso \end{cases} \tag{11}$$

Como

$$z.\Gamma(z) = \Gamma(z+1), \forall z \notin \mathbf{Z}_{\leq 0},$$

y usando las simplificaciones hechas en (8) se tiene que, si $u_i \notin \mathbf{Z}_{<0}$, entonces

$$\gamma(u_i, v_i - 1) = (u_i + v_i).\gamma(u_i, v_i)$$

y tenemos que

$$\gamma(u_i, v_i) = \frac{\Gamma(u_i + 1)}{\Gamma(u_i + v_i + 1)}.$$

Definición 6.2 *Dado* $u = (u_0, \cdots, u_n) \in \mathbf{Q}^{n+1}$, *definimos la serie de potencias formales*

$$[a_0^{u_0} a_1^{u_1} \cdots a_n^{u_n}] := \sum_{(v_0, \cdots, v_n) \in \mathcal{L}} \prod_{i=0}^{n} \left(\gamma(u_i, v_i) . a^{u_i + v_i} \right). \tag{12}$$

Proposición 6.2 *Si* $u \in \mathbf{Q}^{n+1}$ *no tiene ninguna coordenada entera negativa, entonces*

$$[a_0^{u_0} a_1^{u_1} \cdots a_n^{u_n}]$$

satisface formalmente el sistema hipergeométrico de ecuaciones diferenciales con la matriz $\mathcal{A}$ *dada en* (9) *y parámetros* $\left(\sum iu_i\right)$ *y* $\left(\sum u_i\right)$.

Demostración: Como $u_i \notin \mathbf{Z}_{<0}$, entonces

$$\prod_{i=0}^{n} \Gamma(u_i + 1) \neq 0.$$

Debido a la observación de la definición 6.1, es

$$\frac{1}{\prod_{i=0}^{n} \Gamma(u_i + 1)} [a_0^{u_0} a_1^{u_1} \cdots a_n^{u_n}] = \sum_{v \in \mathcal{L}} \prod_{i=0}^{n} \left(\frac{\gamma(u_i, v_i)}{\Gamma(u_i + 1)} . a^{u_i + v_i} \right) =$$

$$= \sum_{v \in \mathcal{L}} \frac{a^{u+v}}{\prod_{i=0}^{n} \Gamma(u_i + v_j + 1)} = \phi_u(a),$$

donde $\phi_u(a)$ es la función definida en (7). Luego,

$$[a_0^{u_0} a_1^{u_1} \cdots a_n^{u_n}] = \left(\prod_{i=0}^{n} \Gamma(u_i + 1) \right) \phi_u(a),$$

satisface formalmente el sistema hipergeométrico con los parámetros indicados en la hipótesis, debido a la proposición 4.1.□

La función γ de la definición 7.1 ha sido definida así para que tenga sentido en un caso particular, que vamos a estudiar por separado; el caso en que

$$u = e_{i-1} - e_i = (0, \cdots 0, 1, -1, 0, \cdots 0), 1 \leq i \leq n.$$

Aquí también se verifica que $\mathcal{A}.u^t = \binom{-1}{0}$. Más aún:

Proposición 6.3 *Si* $u = e_{i-1} - e_i, 1 \leq i \leq n,$ *entonces* $\left[a_0^{u_0} a_1^{u_1} \cdots a_n^{u_n}\right]$ *es solución del sistema* $\mathcal{A}-$*hipergeométrico con parámetros* $\binom{-1}{0}$.

Si $\mathbf{I} = \{j, i\}, j < i,$ *entonces existe* $V \in \mathbf{C}(\mathbf{I})$ *,tal que la serie converge para*

$$(-\log|a_0|, \cdots, -\log|a_n|) \in \mathbf{C}(\mathbf{I}) + V.$$

Demostración: Hay que calcular cuánto valen $\gamma(0, z), \gamma(1, z)$ y $\gamma(-1, z)$ si z es un número entero. Se tienen las siguientes igualdades:

$$\gamma(0, z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0 \\ \frac{1}{z!} & \text{si } z \geq 0 \end{cases},$$

$$\gamma(1, z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < -1 \\ \frac{1}{(z+1)!} & \text{si } z \geq -1 \end{cases},$$

$$\gamma(-1, z) = \begin{cases} (-1)^z(-z)! & \text{si } z \leq 0 \\ 0 & \text{si } z > 0 \end{cases}.$$

Luego, denotando $\binom{m_i}{m}$ a la expresión

$$\frac{m_i!}{m_0! m_1! \cdots (m_{i-1}+1)! m_{i+1}! \cdots m_n!}$$

se llega a lo siguiente:

$$\left[a_{i-1} a_i^{-1}\right] = \sum (-1)^{m_i} \binom{m_i}{m} \frac{a_0^{m_0} a_1^{m_1} \cdots a_{i-1}^{1+m_{i-1}} a_{i+1}^{m_{i+1}} \cdots a_n^{m_n}}{a_i^{1+m_i}} \tag{13}$$

La suma se extiende sobre

$$M^+ = \{(m_0, \cdots m_{i-1}, -m_i, m_{i+1}, \cdots m_n) \in \mathcal{L}, m_j \geq 0, j \neq i-1, m_{i-1} \geq -1\}.$$

Veamos que esta serie satisface formalmente el sistema $\mathcal{A}-$ hipergeométrico. Las ecuaciones de primer orden salen de las homogeneidades siguientes: si llamamos

$$\phi(a_0, \cdots, a_n) := \left[a_{i-1} a_i^{-1}\right]$$

entonces

$$\phi\left(\lambda a\right)=$$

$$=\sum\left(-1\right)^{m_i}\binom{m_i}{m}\frac{\lambda^{1+\sum_{j\neq i}m_j}a_0^{m_0}a_1^{m_1}\cdots a_{i-1}^{1+m_{i-1}}a_{i+1}^{m_{i+1}}\cdots a_n^{m_n}}{\lambda^{1+m_i}a_i^{1+m_i}}=$$

$$=\sum\left(-1\right)^{m_i}\binom{m_i}{m}\frac{a_0^{m_0}a_1^{m_1}\cdots a_{i-1}^{1+m_{i-1}}a_{i+1}^{m_{i+1}}\cdots a_n^{m_n}}{a_i^{1+m_i}}=\phi\left(a\right);$$

$$\phi\left(a_0,\lambda a_1,\cdots,\lambda^n a_n\right)=$$

$$=\sum\left(-1\right)^{m_i}\binom{m_i}{m}\frac{\lambda^{i-1+\sum_{j\neq i}jm_j}a_0^{m_0}a_1^{m_1}\cdots a_{i-1}^{1+m_{i-1}}a_{i+1}^{m_{i+1}}\cdots a_n^{m_n}}{\lambda^{i+im_i}a_i^{1+m_i}}=$$

$$=\lambda^{-1}\sum\left(-1\right)^{m_i}\binom{m_i}{m}\frac{a_0^{m_0}a_1^{m_1}\cdots a_{i-1}^{1+m_{i-1}}a_{i+1}^{m_{i+1}}\cdots a_n^{m_n}}{a_i^{1+m_i}}=\lambda^{-1}\phi\left(a\right).$$

Respecto de las ecuaciones de orden superior: calculemos primero la derivada parcial de un monomio genérico de $\phi\left(a\right)$:

$$\frac{\partial}{\partial a_j}\left(\left(-1\right)^{m_i}\binom{m_i}{m}\frac{a_0^{m_0}a_1^{m_1}\cdots a_{i-1}^{1+m_{i-1}}a_{i+1}^{m_{i+1}}\cdots a_n^{m_n}}{a_i^{1+m_i}}\right)=$$

$$=\left(-1\right)^{\widetilde{m_i}}\binom{\widetilde{m_i}}{\widetilde{m}}\frac{a_0^{\widetilde{m_0}}a_1^{\widetilde{m_1}}\cdots a_{i-1}^{1+\widetilde{m_{i-1}}}a_{i+1}^{\widetilde{m_{i+1}}}\cdots a_n^{\widetilde{m_n}}}{a_i^{1+\widetilde{m_i}}},$$

donde

$$\widetilde{m}=\left(m_0,\cdots m_{i-1},-m_i,m_{i+1},\cdots m_n\right)-e_j.$$

Luego,

$$\frac{\partial^2}{\partial a_j\partial a_k}\phi\left(a\right)=\sum\left(-1\right)^{m_i}\binom{m_i}{m}\frac{a_0^{m_0}a_1^{m_1}\cdots a_{i-1}^{1+m_{i-1}}a_{i+1}^{m_{i+1}}\cdots a_n^{m_n}}{a_i^{1+m_i}},$$

con

$$\left(m_0,\cdots m_{i-1},-m_i,m_{i+1},\cdots m_n\right)\in M^+-e_j-e_k.$$

Si $p+q=j+k$, entonces usando la siguiente transformación biyectiva:

$$\begin{array}{llll}\widetilde{}: & M^++e_j+e_k & \to & M^++e_p+e_q\\ & m & \to & \widetilde{m}=m-e_j-e_k+e_p+e_q\end{array}$$

vale que

$$\frac{\partial^2}{\partial a_j \partial a_k}\left((-1)^{m_i}\binom{m_i}{m}\frac{a_0^{m_0}a_1^{m_1}\cdots a_{i-1}^{1+m_{i-1}}a_{i+1}^{m_{i+1}}\cdots a_n^{m_n}}{a_i^{1+m_i}}\right)=$$

$$=\frac{\partial^2}{\partial a_p \partial a_q}\left((-1)^{\widetilde{m_i}}\binom{\widetilde{m_i}}{\widetilde{m}}\frac{a_0^{\widetilde{m_0}}a_1^{\widetilde{m_1}}\cdots a_{i-1}^{1+\widetilde{m_{i-1}}}a_{i+1}^{\widetilde{m_{i+1}}}\cdots a_n^{\widetilde{m_n}}}{a_i^{1+\widetilde{m_i}}}\right),$$

y sumando en ambos miembros, se llega a

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial a_j \partial a_k}-\frac{\partial^2}{\partial a_p \partial a_q}\right)\phi\left(a\right)=0,$$

que era lo que queríamos ver.

Respecto de la convergencia, si $\mathbf{I}=\{j,i\}\,, j<i$, entonces para cualquier

$$(m_0,m_1,\cdots\widehat{m_j},\cdots,\widehat{m_i},\cdots m_n)\in\mathbf{Z}^{n-1},$$

$\exists!\,(m_j,m_i)$ tal que

$$(m_0,m_1,\cdots m_j,\cdots,m_i,\cdots m_n)\in\mathcal{L}_{\mathbf{Q}},$$

explícitamente, como

$$\sum m_k=\sum km_k=0,$$

entonces

$$\begin{array}{rcl} m_i+m_j & = & -\sum m_k \\ im_i+jm_j & = & -\sum km_k, \end{array}$$

donde las sumas se realizan sobre $k\neq j,i$.Resolviendo este sistema lineal resulta

$$m_i=\frac{\sum\left(j-k\right)m_k}{i-j},\quad m_j=\frac{\sum\left(k-i\right)m_k}{i-j}.$$

Luego, para estudiar la convergencia sobre $\mathbf{C}\left(\mathbf{I}\right)$ hay que escribir la serie (13) en términos de $(m_0,m_1,\cdots\widehat{m_j},\cdots,\widehat{m_i},\cdots m_n)$:

$$\left[a_{i-1}a_i^{-1}\right]=$$

$$=\sum\left((-1)^{m_i}\binom{-\frac{\sum(j-k)m_k}{i-j}}{m}\frac{a_{i-1}}{a_i}\prod_{k\neq j,i}\left(a_k a_j^{(k-i)/(i-j)}a_i^{(j-k)/(i-j)}\right)^{m_k}\right).$$

Esta serie convergerá para $(-\log|a_0|, \cdots, -\log|a_n|) \in \mathbf{C}(\mathbf{I}) + V$, para un $V \in \mathbf{C}(\mathbf{I})$, si la serie

$$\sum \binom{-\frac{\sum (j-k) m_k}{i-j}}{m} \prod_{k \neq j,i} (y_k)^{m_k}$$

converge para $|y_k|$ chico., y esta última serie es de la forma

$$\sum_{k \neq j,i} \frac{1}{(m_{i-1}+1)} \frac{(A(m))!}{m_0! \cdots m_n! \left(A(m) - |m|\right)!} \prod (y_k)^{m_k},$$

con $A(m) \geq |m| \in \mathbf{N}_0$ lineal en

$$m = \left(m_0, m_1, \cdots \widehat{m_j}, \cdots, \widehat{m_i}, \cdots m_n\right),$$

$m_k \geq 0, k \neq j, i; m_{i-1} \geq -1$. Usando las mismas técnicas de la demostración del teorema 4.3, se puede ver que para $|m|$ grande,

$$\frac{A(m)!}{m_0! \cdots m_n! \left(A(m) - |m|\right)!} \prod (y_k)^{m_k}$$

está acotado si $|y_k|$ es chico y por lo tanto, esta serie tiene radio de convergencia positivo.$\square$

Investiguemos un poco el poliedro de Newton $\mathbf{P}$ correspondiente a nuestro sistema $\mathcal{A}-$hipergeométrico. De acuerdo con la definición 5.1, el mismo consiste en la cápsula convexa en $\mathbf{R}^2$, de

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Resulta claro que $\mathbf{P}$ es en este caso el triángulo de vértices

$$0, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Su volumen normalizado es

$$\frac{n}{2}.2! = n.$$

Luego, de acuerdo con el Teorema 5.2, el número de soluciones linealmente independientes del sistema $\mathcal{A}$-hipergeométrico alrededor de un punto genérico es n.

Sea

$$\mathbf{I} = \{i_{j-1}, i_j\} \subset \{0, 1, \cdots n\}, i_{j-1} < i_j.$$

Sabemos que $\mathbf{I}$ es un conjunto base. Veamos la estructura de $\mathbf{C}(\mathbf{I})$. Si definimos

$$\varphi_{I,w}\left(\chi_{i_{j-1}}\right) = \varphi_{I,w}\begin{pmatrix} i_{j-1} \\ 1 \end{pmatrix} := w_{i_{j-1}};$$

$$\varphi_{I,w}\left(\chi_{i_j}\right) = \varphi_{I,w}\begin{pmatrix} i_j \\ 1 \end{pmatrix} := w_{i_j},$$

el cono estará caracterizado por aquellos $w \in \mathbf{R}^{n+1}$, para los cuales

$$\varphi_{I,w}(\chi_k) \leq w_k \quad si \quad k \notin \{i_{j-1}, i_j\}.$$

Como

$$(\chi_k) = \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{i_j - k}{i_j - i_{j-1}}\begin{pmatrix} i_{j-1} \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{k - i_{j-1}}{i_j - i_{j-1}}\begin{pmatrix} i_j \\ 1 \end{pmatrix},$$

entonces

$$\varphi_{I,w}(\chi_k) = \frac{i_j - k}{i_j - i_{j-1}} w_{i_{j-1}} + \frac{k - i_{j-1}}{i_j - i_{j-1}} w_{i_j}.$$

Luego, haciendo

$$d_j := i_j - i_{j-1} > 0,$$

el cono $\mathbf{C}(\mathbf{I})$ queda caracterizado como el conjunto de los $w \in \mathbf{R}^{n+1}$para los cuales

$$(i_j - k) w_{i_{j-1}} + (k - i_{j-1}) w_{i_j} \leq d_j w_k, k \notin \{i_{j-1}, i_j\} \tag{14}$$

Observemos que el Polígono de Newton $\mathbf{P}$ es en este caso un triángulo cuya base es el segmento

$$\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix}\right],$$

y además todos los χ_k de la matriz $\mathcal{A}$ están en este segmento. Es por ello que todas las posibles triangulaciones de este polígono - de acuerdo con la definición 5.2- vienen dadas por "particiones" del segmento

$$\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

en segmentos de longitud entera. En efecto, dados

$$\mathbf{I}_1, \cdots, \mathbf{I}_r \subset \{0, 1, \cdots, n\},$$

Para que se cumpla simultáneamente que $\bigcup_{j=1}^{r} \Delta(\mathbf{I}_j) = \mathbf{P}$,y que $\Delta(\mathbf{I}_j) \cap \Delta(\mathbf{I}_k)$ sea un conjunto de medida cero en $\mathbf{R}^2$ para $j \neq k$, entonces necesariamente debe ocurrir que $\mathbf{I}_j = \{i_{j-1}, i_j\}$, donde

$$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_r = n.$$

Entonces cada triangulación está indexada por un subconjunto de $\{0, 1, \cdots, n\}$ que necesariamente debe contener a 0 y a n. Es fácil ver que hay 2^{n-1} posibles triangulaciones.

Fijada una de estas triangulaciones, vamos a calcular el cono

$$\mathbf{C}(\mathbf{T}) = \bigcap_{j=1}^{r} \mathbf{C}(\mathbf{I}_j).$$

Para $j = 1, 2, \cdots, r$ escribimos

$$d_j := i_j - i_{j-1},$$

la longitud del j-ésimo segmento en esa triangulación. Claramente,

$$d_1 + d_2 + \cdots + d_r = n.$$

En virtud de (14), se tiene una caracterización precisa de este cono: son aquellos $w \in \mathbf{R}^{n+1}$ que verifican

$$(i_j - k) w_{i_{j-1}} + (k - i_{j-1}) w_{i_j} \leq d_j w_k, k \notin \{i_{j-1}, i_j\}, j = 1, \cdots, r. \tag{15}$$

Proposición 6.4 *Cada una de las triangulaciones del Polígono de Newton* **P** *es regular.*

Demostración: De acuerdo con la definición 5.4, sólo hay que ver que

$$\mathbf{C_T} := \mathbf{C}(\mathbf{T})^{\circ} \neq \emptyset.$$

Por (15), si $w \in \mathbf{C_T}$ entonces

$$(i_j - k)\, w_{i_{j-1}} + (k - i_{j-1})\, w_{i_j} < d_j w_k, k \notin \{i_{j-1}, i_j\}\,, j = 1, \cdots, r.$$

La demostración la hacemos por inducción en n. Para $n = 2$, hay sólo dos posibles triangulaciones:

$$\mathbf{C_{T_1}} = \left\{w \in \mathbf{R}^3 : w_0 + w_2 < 2w_1\right\},$$

(un solo segmento de longitud 2),

$$\mathbf{C_{T_2}} = \left\{w \in \mathbf{R}^3 : -w_0 + 2w_1 < w_2\right\}$$

(dos segmentos de longitud 1); y ambos conos son trivialmente no vacíos. Para $n > 2$, fijada una triangulación $\mathbf{T}$, hay que encontrar $w \in \mathbf{R}^{n+1}$ para el cual se cumplen las desigualdades estrictas de (15). “Quitemos” el último segmento de la triangulación que estamos estudiando. Llamemos h a su longitud. Por hipótesis inductiva, el conjunto

$$\mathbf{C}^r_{\mathbf{T}} \subset \mathbf{R}^{n+1-h}$$

definido por las inecuaciones

$$(i_j - k)\, w_{i_{j-1}} + (k - i_{j-1})\, w_{i_j} < d_j w_k, k \notin \{i_{j-1}, i_j\}\,, j = 1, \cdots, r-1$$

es distinto de vacío. Sea

$$w' = \left(w_0, \cdots, w_{i_{r-1}}\right) \in \mathbf{C}^r_{\mathbf{T}}.$$

Vamos a “levantarlo” a un $w \in \mathbf{C_T}$.

Sean

$$a := \max\left\{\frac{(i_j - k)\, w_{i_{j-1}} + (k - i_{j-1})\, w_{i_j}}{d_j}, j = 1, \cdots, r-1\right\},$$

$$b := \max\left\{\frac{(n - k)\, w_{i_{r-1}} - d_r w_{i_j}}{k - i_{r-1}}, j = 1, 2, \cdots r-2\right\}.$$

Tomamos

$$w_n > \max\{a, b\}.$$

Una vez fijado w_n, para cada $i_{r-1} < k < n$, sea

$$w_k > \max\left\{\frac{(i_j - k)\, w_{i_{j-1}} + (k - i_{j-1})\, w_{i_j}}{d_j}, j = 1, \cdots, r\right\}.$$

El vector $w = (w_0, \cdots, w_n)$ cumple todas las desigualdades pedidas.□

7 Soporte de las series $[a_0^{u_0} a_1^{u_1} \cdots a_n^{u_n}]$

Sea $u \in \mathbf{Q}^{n+1}$, tal que tiene exactamente dos coordenadas racionales no enteras

$$q_{i_1}, q_{i_2}, \quad i_1 < i_2,$$

y todas las coordenadas restantes son enteras no negativas. Resulta entonces que $u \in \prod_{\mathbf{Z}}(\beta, \mathbf{I})$, con

$$\beta = \left(\sum i u_i, \sum u_i\right), \mathbf{I} = \{i_1, i_2\}.$$

De acuerdo con la demostración de la proposición 6.2, la serie $[a_0^{u_0} a_1^{u_1} \cdots a_n^{u_n}]$ es un múltiplo de la serie $\phi_u(a)$ definida en (7).

Definición 7.1 *Si* $\phi(a) = \sum_{\alpha \in Q^{n+1}} c_\alpha . a^\alpha$,*se define*

$$Sop(\phi) := \left\{\alpha \in Q^{n+1} / c_\alpha \neq 0\right\}.$$

Nos interesa calcular $Sop([a_0^{u_0} a_1^{u_1} \cdots a_n^{u_n}])$, para los $u \in \prod_{\mathbf{Z}}(\beta, \mathbf{I})$, que verifican lo señalado al principio de esta sección. Por la última observación, esto es equivalente a calcular $Sop(\phi_u)$,

$$\phi_u(a) = a^u \sum_{v \in \mathcal{L}} \frac{a^v}{\prod_{0 \leq i \leq n} \Gamma(u_i + v_i + 1)}.$$

Como $u_i \geq 0, i \notin \mathbf{I}$, entonces los términos no nulos están en

$$M^+ := \{v \in \mathcal{L}/v_i \geq -u_i, i \notin \mathbf{I}\}.$$

Además, dada una colección de $n-1$ números enteros

$$v_i \geq -u_i, \quad i \notin \mathbf{I},$$

se lo puede levantar a un único $v \in \mathcal{L}$ de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} v_{i_2} &= \tfrac{\sum (i_1-k)m_k}{d} \\ v_{i_1} &= \tfrac{\sum (k-i_2)m_k}{d} \end{aligned}$$

donde $d := i_2 - i_1$, y las sumas se realizan sobre $k \notin \mathbf{I}$.

Haciendo

$$y_i := a_i a_{i_1}^{\frac{i-i_2}{d}} a_{i_2}^{\frac{i_1-i}{d}}, i \notin \mathbf{I},$$

entonces

$$a^v = \prod_{i \notin \mathbf{I}} y_i^{v_i}.$$

Luego, tenemos demostrada la siguiente

Proposición 7.1 *Con las hipótesis anteriores, los exponentes de la serie $\phi_u(a)$ están en el conjunto*

$$u + \left\{ \sum_{i \notin I} v_i \left(e_i + \frac{i-i_2}{d} e_{i_1} + \frac{i_1 - i}{d} e_{i_2} \right), v_i \geq -u_i \right\}.$$

Haciendo

$$\widetilde{u} := u - \sum_{i \notin I} u_i \left(e_i + \frac{i-i_2}{d} e_{i_1} + \frac{i_1 - i}{d} e_{i_2} \right),$$

los exponentes de ϕ_u están en

$$\widetilde{u} + \left\{ \sum_{i \notin I} v_i \left(e_i + \frac{i-i_2}{d} e_{i_1} + \frac{i_1 - i}{d} e_{i_2} \right), v_i \in \mathbf{Z}_{\geq 0} \right\}.$$

Definición 7.2 *Sean K y k enteros positivos. Fijados $v_1, \cdots v_k \in \mathbf{R}^K$, un* cono convexo *es un conjunto de la forma*

$$C = \{r_1 v_1 + \cdots + r_k v_k : r_i \in \mathbf{R}_{\geq 0}\}.$$

El cono se dice racional *si $v_i \in \mathbf{Q}^K$, para todo i, y se dice* estrictamente convexo *si no contiene subespacios lineales no triviales.*

Fijada una triangulación $\mathbf{T}$ indexada por r números enteros

$$0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_r = n,$$

definimos

$$Q_{\mathbf{T}} := \left\{ \sum_{j=1}^{r} \sum_{i \notin I_j} q_{ij} \left(e_i + \frac{i - i_j}{d_j} e_{i_{j-1}} + \frac{i_{j-1} - i}{d_j} e_{i_j} \right), q_{ij} \in \mathbf{R}_{\geq 0} \right\} \tag{16}$$

Proposición 7.2 *$Q_{\mathbf{T}}$ es un cono racional estrictamente convexo, o sea que no contiene subespacios vectoriales más que el trivial.*

Demostración: Está claro que $Q_{\mathbf{T}}$ es un cono racional convexo. Para ver que es estrictamente convexo, como $\mathbf{C}_{\mathbf{T}}$ no es vacío por la proposición 6.4, tomamos un $w \in \mathbf{C}_{\mathbf{T}}$ y realizamos el producto interno

$$w. \left(e_i + \frac{i - i_j}{d_j} e_{i_{j-1}} + \frac{i_{j-1} - i}{d_j} e_{i_j} \right) = w_i + \frac{i - i_j}{d_j} w_{i_{j-1}} + \frac{i_{j-1} - i}{d_j} w_{i_j}$$

y esta cantidad es mayor que 0, cualquiera sea $i \notin \{i_{j-1}, i_j\}$, para todo $j = 1, \cdots, r$. Luego, los vectores

$$\left\{ e_i + \frac{i - i_j}{d_j} e_{i_{j-1}} + \frac{i_{j-1} - i}{d_j} e_{i_j} \right\}$$

están contenidos en el semiespacio

$$\left\{ x \in R^{n+1} / w.x > 0 \right\}$$

que no contiene ninguna recta. Así que todos los vectores no nulos de $Q_{\mathbf{T}}$ están dicho semiespacio.$\square$

Si j es un entero mayor que cero, entonces el conjunto

$$Q_{\mathbf{T}}^{j} := Q_{\mathbf{T}} \cap \frac{1}{j}\mathbf{Z}^{n+1}$$

con la suma usual de vectores, tiene estructura de semigrupo.

Definición 7.3 $\mathbf{C}\left[\left[Q_{\mathbf{T}}^{j}\right]\right] := \left\{ \sum_{\alpha \in Q_{\mathbf{T}}^{j}} c_{\alpha}.a^{\alpha}, c_{\alpha} \in \mathbf{C} \right\}$

En $\mathbf{C}\left[\left[Q_{\mathbf{T}}^{j}\right]\right]$ la suma está definida de manera natural:

$$\sum_{\alpha \in Q_{\mathbf{T}}^{j}} c_{\alpha}.a^{\alpha} + \sum_{\alpha \in Q_{\mathbf{T}}^{j}} c'_{\alpha}.a^{\alpha} = \sum_{\alpha \in Q_{\mathbf{T}}^{j}} \left(c_{\alpha} + c'_{\alpha}\right).a^{\alpha}.$$

Lo interesante es que también hay allí un producto bien definido. En efecto, queremos que valga la identidad

$$\left(\sum_{\alpha \in Q_{\mathbf{T}}^{j}} c_{\alpha}.a^{\alpha}\right) \cdot \left(\sum_{\alpha \in Q_{\mathbf{T}}^{j}} c'_{\alpha}.a^{\alpha}\right) = \sum_{\alpha \in Q_{\mathbf{T}}^{j}} \left(\sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha} c_{\alpha_1}.c_{\alpha_2}\right).a^{\alpha}$$

y para ello habría que verificar que el número de soluciones en $Q_{\mathbf{T}}^{j}$ de

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$$

es finito, para todo $\alpha \in Q_{\mathbf{T}}^{j}$. Tomemos un elemento $w \in \mathbf{C}_{\mathbf{T}}$, que podemos suponer sin pérdida de generalidad que tiene todas sus coordenadas enteras. Entonces

$$w.\alpha = m_0 \in \frac{1}{j}\mathbf{N},$$

ya que $\alpha \in Q_{\mathbf{T}}^{j}$, y $w.\alpha > 0$. Por la misma razón,

$$w.\alpha_i = m_i \in \frac{1}{j}\mathbf{N}, m_i \leq m.$$

Entonces es suficiente ver que el número de soluciones de

$$w.\alpha = m_i$$

es finito para $\alpha \in Q^j_{\mathbf{T}}$. Un tal α se escribe como

$$\sum_{j=1}^{r} \sum_{i \notin I_j} q_{ij} \left(e_i + \frac{i - i_j}{d_j} e_{i_{j-1}} + \frac{i_{j-1} - i}{d_j} e_{i_j} \right),$$

con $q_{ij} \in \frac{1}{q}\mathbf{N}_{\geq 0}$, para un entero positivo q. Luego,

$$w.\alpha = \sum_{j=1}^{r} \sum_{i \notin I_j} q_{ij} \left(w_i + \frac{i - i_j}{d_j} w_{i_{j-1}} + \frac{i_{j-1} - i}{d_j} w_{i_j} \right) = \sum_{j=1}^{r} \sum_{i \notin I_j} q_{ij} A_{ij},$$

con $A_{ij} \in \mathbf{Q}^+$. Entonces, fijado m_i, el número de soluciones para

$$\sum_{j=1}^{r} \sum_{i \notin I_j} q_{ij} A_{ij} = m_i,$$

con $q_{ij} \in \frac{1}{q}\mathbf{N}_{\geq 0}$ es finito. Con todo esto, hemos demostrado la siguiente:

Proposición 7.3 $\mathbf{C}\left[\left[Q^j_{\mathbf{T}}\right]\right]$ *con la suma y el producto usuales es un anillo.*

Mas aún, si notamos

$$\mathbf{C}\left((Q_{\mathbf{T}})\right) := \bigcup_{q \in \mathbf{Q}^{n+1}, j \in \mathbf{N}} a^q.\mathbf{C}\left[\left[Q^j_{\mathbf{T}}\right]\right],$$

el conjunto de todas las series que se escriben como producto de un monomio con exponentes racionales y un elemento de $\mathbf{C}\left[\left[Q^j_{\mathbf{T}}\right]\right]$, para algún $j \in \mathbf{N}$. Entonces vale:

Proposición 7.4 $\mathbf{C}\left((Q_{\mathbf{T}})\right)$*es un anillo.*

Demostración: Hay que ver que cualquier par de series de $\mathbf{C}((Q_{\mathbf{T}}))$ pertenecen a algún $a^q.\mathbf{C}[[Q_{\mathbf{T}}^s]]$. Tomamos

$$a^z \sum_{\alpha\in Q_{\mathbf{T}}^j} c_\alpha . a^\alpha, a^{z'} \sum_{\alpha\in Q_{\mathbf{T}}^{j'}} c'_\alpha . a^\alpha;$$

con

$$z_i = \frac{u_i}{v_i},\ z'_i = \frac{u'_i}{v'_i},\ 0 \le i \le n,\ v_i,\ v'_i,\ j,\ j' \in \mathbf{N}.$$

Ambas series son elementos de $a^V \mathbf{C}\left[\left[Q_{\mathbf{T}}^{jj'}\right]\right]$, con

$$V = (V_0, \cdots, V_n),\quad V_i := \frac{\min\{u_i, u'_i\}}{mcm\,(v_i, v'_i)}, 0 \le i \le n,$$

y allí pueden sumarse y multiplicarse.□

Ahora sí estamos en condiciones de demostrar la siguiente:

Proposición 7.5 *Dada una triangulación* $\mathbf{T}$. *Si el vector* $u \in \mathbf{Q}^{n+1}$ *tiene todas sus coordenadas enteras no negativas salvo en los índices que corresponden a algún conjunto base de* $\mathbf{T}$ *donde tiene exponentes racionales no enteros, o bien es de la forma* $e_{i-1} - e_i$, *con* $i \in Vert\,(T)$, *entonces la serie*

$$[a_0^{u_0} a_1^{u_1} \cdots a_n^{u_n}] \in \mathbf{C}((Q_{\mathbf{T}})).$$

Demostración: Para el primer caso, la proposición 7.1 dice que los exponentes de $[a_0^{u_0} a_1^{u_1} \cdots a_n^{u_n}]$ están en

$$a^{\widetilde{u}} \mathbf{C}\left[\left[Q_{\mathbf{T}}^{d_j}\right]\right], \widetilde{u}_j \in \mathbf{Q}^{n+1}.$$

En el caso en que

$$u = e_{i-1} - e_i \quad y \quad \{j, i\} \in \mathbf{T}, \quad j < i,$$

en la proposición 6.3 se vio que la serie se escribe como

$$\sum c_m \frac{a_{i-1}}{a_i} \prod_{k\neq j,i} \left(a_k a_j^{(k-i)/(i-j)} a_i^{(j-k)/(i-j)}\right)^{m_k},$$

con $m_k \geq 0, m_{i-1} \geq -1$. Luego, el soporte de $\left(\left[a_{i-1}a_i^{-1}\right]\right)$ es el conjunto

$$(e_{i-1} - e_i) + u + \left\{ \sum_{k \neq j,i} m_k \left(e_k + \frac{k-i}{i-j} e_j + \frac{j-k}{i-j} e_i \right), m_k \geq 0 \right\}.$$

Por lo tanto, también $\left[a_{i-1}a_i^{-1}\right] \in \mathbf{C}\left(\left(Q_{\mathbf{T}}\right)\right)$.$\square$

8 Series fraccionarias y la deformación tórica

El polinomio genérico de grado n,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

es un elemento de $\mathbf{C}\left(\left(Q_{\mathbf{T}}\right)\right)[x]$. Queremos encontrar sus raíces en este anillo, es decir buscamos series

$$\psi(a) \in \mathbf{C}\left(\left(Q_{\mathbf{T}}\right)\right)$$

de tal manera que

$$f(\psi(a)) = 0.$$

Para ello, fijaremos previamente un vector

$$w = (w_0, \cdots, w_n) \in \mathbf{C}_{\mathbf{T}}$$

tal que todas sus coordenadas son enteras no negativas, y no hay dos rectas entre las generadas por los pares

$$\{(w_l, l), (w_p, p)\}$$

en $\mathbf{R}^2$ paralelas. Para ese vector w fijo, definimos la *"deformación tórica"* del polinomio f :

$$f_t(x) = a_0 t^{w_0} + a_1 t^{w_1} x + a_2 t^{w_2} x^2 + \cdots + a_n t^{w_n} x^n. \tag{17}$$

Observar que al especializar en $t = 1$, se reconstruye el polinomio genérico de grado n. Estamos interesados en encontrar funciones $\psi(a, t)$ tales que

$$f_t(\psi(a, t)) = 0.$$

Así, si la expresión $\psi(a,1)$ tiene sentido, ésta resultará una raíz de f. Para ello, procederemos como en [3]. Allí, dada una ecuación algebraica con coeficientes complejos

$$F(x_1,\cdots x_{N+1}),$$

se construyen series de potencias fraccionarias $\psi(x_1,\cdots,x_N)$ de tal manera que

$$F(x_1,\cdots,x_N,\psi)=0.$$

El caso $N=1$ fue estudiado por Newton, y puede verse con detalle en las referencias [4] y [5] .

Fijemos entonces

$$F(a_0,\cdots a_n,t,x):=f_t(x).$$

Buscamos $\psi(a,t)$ que verifiquen

$$F(a_0,\cdots a_n,t,\psi(a,t))=0.$$

Definición 8.1 *El* Polítopo de Newton *de la ecuación*

$$F(a_0,\cdots a_n,t,x)=0$$

es la cápsula convexa, en $\mathbf{R}^{n+3}$*, de los exponentes que aparecen en el polinomio* F*. Explícitamente*

$$P(F):=c.c.\left(e_i+w_ie_{n+1}+ie_{n+2}\right)_{0\leq i\leq n}.$$

Definición 8.2 *Llamaremos* hiperplano nulo*, en* $\mathbf{R}^{n+3}$ *al subespacio lineal*

$$N:=\{(\alpha_0,\cdots,\alpha_{n+1},0)\}.$$

Lema 8.1 *Para cualquier $j = 1, \cdots, r$; el segmento*

$$e_j := \left[e_{i_{j-1}} + w_{i_{j-1}} e_{n+1} + i_{j-1} e_{n+2}, e_{i_j} + w_{i_j} e_{n+1} + i_j e_{n+2}\right]$$

es una arista de $P(F)$, no paralela al hiperplano nulo.

Demostración: Está claro que los vértices de e_j son elementos de $P(F)$, luego todo e_j está contenido en el polítopo. Además, la "pendiente" respecto de e_{n+2} es

$$i_j - i_{j-1} = d_j > 0,$$

así que este segmento no es paralelo al hiperplano nulo. Cualquier punto de e se escribe como

$$p_\lambda = \lambda \left(e_{i_{j-1}} + w_{i_{j-1}} e_{n+1} + i_{j-1} e_{n+2}\right) + (1 - \lambda) \left(e_{i_j} + w_{i_j} e_{n+1} + i_j e_{n+2}\right),$$

con $0 \leq \lambda \leq 1$.

Supongamos que existe $v \in \mathbf{R}^{n+3}$, tal que el segmento

$$[p_\lambda - v, p_\lambda + v] \subset P(F).$$

Luego,

$$p_\lambda - v = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i^- (e_i + w_i e_{n+1} + i e_{n+2}), \sum_{i=0}^{n} \lambda_i^- = 1, \lambda_i^- \geq 0;$$

$$p_\lambda + v = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i^+ (e_i + w_i e_{n+1} + i e_{n+2}), \sum_{i=0}^{n} \lambda_i^+ = 1, \lambda_i^+ \geq 0.$$

Entonces

$$p_\lambda = \sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda_i^- + \lambda_i^+}{2} (e_i + w_i e_{n+1} + i e_{n+2}).$$

Como

$$\{e_i + w_i e_{n+1} + i e_{n+2}; i = 0, \cdots, n\}$$

es un conjunto linealmente independiente, entonces

$$\lambda_i^- + \lambda_i^+ = 0, i \notin \{i_{j-1}, i_j\}.$$

Además $\lambda_i^+, \lambda_i^- \geq 0$, entonces

$$\lambda_i^- = \lambda_i^+ = 0, \quad i \notin \{i_{j-1}, i_j\}.$$

Así que v debe ser un elemento de e_j. Esto demuestra que este segmento es una arista del polítopo.□

Definición 8.3 *Llamaremos* arista admisible *del polítopo $P(F)$ a cualquiera de sus aristas que no sea paralela al hiperplano nulo.*

De acuerdo a esta definición, las aristas e_j de $P(F)$ son admisibles.

Definición 8.4 *Sea L_j la recta en $\mathbf{R}^{n+3}$ que contiene al segmento e_j. Definimos el* haz normal *a este segmento como*

$$W(e_j) := \{\lambda(p-x)+x, \lambda \in R_{\geq 0}, p \in P(F), x \in L_j\}.$$

Proposición 8.2 *Si y es el punto de intersección de L_j con el hiperplano nulo entonces la intersección del haz normal con el hiperplano nulo es un conjunto de la forma $C(e_j)+y$, donde $C(e_j)$ es el cono racional estrictamente convexo generado por los vectores*

$$e_i + \frac{i-i_j}{d_j} e_{i_{j-1}} + \frac{i_{j-1}-i}{d_j} e_{i_j} + \left(w_i + \frac{i-i_j}{d_j} w_{i_{j-1}} + \frac{i_{j-1}-i}{d_j} w_{i_j} \right) e_{n+1},$$

$i = 0, \cdots, n; \quad i \neq i_{j-1}, i_j.$

Demostración: Calculemos primero y. Cualquier punto de L_j se escribe como

$$\beta e_{i_{j-1}} + (1-\beta) e_{i_j} + \left[\beta w_{i_{j-1}} + (1-\beta) w_{i_j}\right] e_{n+1} + [\beta i_{j-1} + (1-\beta) i_j] e_{n+2},$$

con $\beta \in \mathbf{R}$. Pertenecer al hiperplano nulo, implica la condición

$$\beta = \frac{i_j}{d_j}, 1-\beta = -\frac{i_{j-1}}{d_j}.$$

Luego,

$$y = \frac{i_j}{d_j} e_{i_{j-1}} - \frac{i_{j-1}}{d_j} e_{i_j} + \frac{i_j w_{i_{j-1}} - i_{j-1} w_{i_j}}{d_j} e_{n+1}.$$

Veamos como se escribe un elemento genérico de $W(e_j)$. Si $p \in P(F)$ entonces

$$p = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i (e_i + w_i e_{n+1} + i e_{n+2}), \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1.$$

Los elementos de L_j están parametrizados por β :

$x = \beta e_{i_{j-1}} + (1-\beta)\, e_{i_j} + \left[\beta w_{i_{j-1}} + (1-\beta)\, w_{i_j}\right] e_{n+1} + [\beta i_{j-1} + (1-\beta)\, i_j]\, e_{n+2}$.

Luego, si λ es positivo,

$$\lambda\,(p-x) + x = \lambda p + (1-\lambda)\, x =$$

$$= \lambda \sum_{i=0}^{n} \lambda_i\,(e_i + w_i e_{n+1} + i e_{n+2}) + (1-\lambda)\left(\beta(e_{i_{j-1}} + w_{i_{j-1}} e_{n+1} + i_{j-1} e_{n+2}\right) +$$

$$+ \left(1-\beta\right)\left(e_{i_{j-1}} + w_{i_{j-1}} e_{n+1} + i_{j-1} e_{n+2}\right)\Big).$$

El coeficiente $n+2-$ésimo de esta última expresión es

$$\lambda \sum_{i=0}^{n} i\lambda_i + (1-\lambda)\,[\beta i_{j-1} + (1-\beta)\, i_j]\,.$$

Si $\lambda = 1$, esta cantidad será igual a cero si y sólo si

$$p = e_0 + w_0 e_{n+1}.$$

Si $\lambda \neq 1$, entonces se puede despejar

$$\beta = \frac{\lambda \sum\limits_{i=0}^{n} i\lambda_i}{(1-\lambda)\, d_j} + \frac{i_j}{d_j}.$$

La intersección del haz normal con el hiperplano nulo está parametrizada por λ, y los λ_i de la siguiente manera:

$$\lambda \sum_{i=0}^{n} \lambda_i\,(e_i + w_i e_{n+1}) + \left(\frac{\lambda \sum\limits_{i=0}^{n} i\lambda_i}{d_j} + \frac{(1-\lambda)\, i_j}{d_j}\right)\left(e_{i_{j-1}} + w_{i_{j-1}} e_{n+1}\right) - \Big(\frac{\lambda \sum\limits_{i=0}^{n} i\lambda_i}{d_j} +$$

$$+ \frac{(1-\lambda)\, i_{j-1}}{d_j}\Big)\left(e_{i_j} + w_{i_j} e_{n+1}\right) =$$

$$= \lambda\Big(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i\,(e_i + w_i e_{n+1}) + \left(\frac{\sum\limits_{i=0}^{n} i\lambda_i}{d_j} - \frac{i_j}{d_j}\right)\left(e_{i_{j-1}} + w_{i_{j-1}} e_{n+1}\right) -$$

$$-\left(\frac{\sum\limits_{i=0}^{n} i\lambda_i}{d_j}-\frac{i_{j-1}}{d_j}\right)\left(e_{i_j}+w_{i_j}e_{n+1}\right))+y=$$

$$=\lambda(\sum_{i=0}^{n}\lambda_i(e_i+w_ie_{n+1}+\frac{i-i_j}{d_j}\left(e_{i_{j-1}}+w_{i_{j-1}}e_{n+1}\right)-$$

$$-\frac{i-i_{j-1}}{d_j}\left(e_{i_j}+w_{i_j}e_{n+1}\right))+y=$$

$$=\lambda\left(\sum_{i=0}^{n}\lambda_i\left(e_i+\frac{i-i_j}{d_j}e_{i_{j-1}}+\frac{i_{j-1}-i}{d_j}e_{i_j}+\left(w_i+\frac{i-i_j}{d_j}w_{i_{j-1}}+\frac{i_{j-1}-i}{d_j}w_{i_j}\right)e_{n+1}\right)\right)+y.$$

Como además

$$e_{i_{j-1}}+\frac{i_{j-1}-i_j}{d_j}e_{i_{j-1}}+\frac{i_{j-1}-i_{j-1}}{d_j}e_{i_j}+\left(w_{i_{j-1}}+\frac{i_{j-1}-i_j}{d_j}w_{i_{j-1}}+\frac{i_{j-1}-i_{j-1}}{d_j}w_{i_j}\right)e_{n+1}=$$

$$=e_{i_{j-1}}-e_{i_{j-1}}+w_{i_{j-1}}-w_{i_{j-1}}=0,$$

$$e_{i_j}+\frac{i_j-i_j}{d_j}e_{i_{j-1}}+\frac{i_{j-1}-i_j}{d_j}e_{i_j}+\left(w_{i_j}+\frac{i_j-i_j}{d_j}w_{i_{j-1}}+\frac{i_{j-1}-i_j}{d_j}w_{i_j}\right)e_{n+1}=$$

$$=e_{i_j}-e_{i_j}+w_{i_j}-w_{i_j}=0,$$

se sigue que el cono $C\left(e\right)$ está generado por los vectores

$$e_i+\frac{i-i_j}{d_j}e_{i_{j-1}}+\frac{i_{j-1}-i}{d_j}e_{i_j}+\left(w_i+\frac{i-i_j}{d_j}w_{i_{j-1}}+\frac{i_{j-1}-i}{d_j}w_{i_j}\right)e_{n+1}, i\notin\left\{i_{j-1},i_j\right\}.$$

Veamos que $C\left(e\right)$ es un cono estricto. Consideremos la siguiente funcional lineal:

$$\Psi:\mathbf{R}^{n+2}\to\mathbf{R},\quad \Psi\left(u_0,\cdots,u_n,u_{n+1}\right):=u_{n+1}.$$

Entonces

$$\Psi\left(e_i+\frac{i-i_j}{d_j}e_{i_{j-1}}-\frac{i-i_{j-1}}{d_j}e_{i_j}+\left(w_i+\frac{i-i_j}{d_j}w_{i_{j-1}}-\frac{i-i_{j-1}}{d_j}w_{i_j}\right)e_{n+1}\right)=$$

$$=w_i+\frac{i-i_j}{d_j}w_{i_{j-1}}-\frac{i-i_{j-1}}{d_j}w_{i_j}>0,$$

para $i \notin \{i_{j-1}, i_j\}$, pues el vector $w \in \mathbf{C_T}$. Luego el cono está totalmente contenido en el semiespacio

$$\{\Psi > 0\},$$

así que resulta lo pedido.$\square$

Definición 8.5 *Dado un cono C, el* cono dual *de C es el conjunto*

$$C^* := \left\{u \in \mathbf{R}^{n+3} : u.c \leq 0, \forall c \in C^*\right\}.$$

Hechas estas definiciones, estamos en condiciones de presentar el resultado que queremos utilizar. Diremos que una funcional lineal en $\left(R^N\right)^*$ se dirá irracional si sus coordenadas son linealmente independientes sobre $\mathbf{Q}$.

Teorema 8.3 *(Theorem 3.6 de* [3]*) Sea $F(x_1, \cdots, x_{N+1})$ un polinomio en $N+1$ variables. Sea e una arista admisible del polítopo $P(F)$. Sea $C^* = C^*(e)$ su cono dual, y sea k_e la longitud de la proyeccion de e sobre el eje x_{N+1}. Entonces:*
a) Para cada irracional $\omega \in C^*$, existe un cono racional estrictamente convexo C_ω tal que $\omega \in C_\omega^*$ y tal que el anillo $\mathbf{C}((C_\omega))$ contiene al menos k_e series $\{\psi_i\}_i$ contadas con multiplicidad tal que para cada i, $F(x_1, \cdots, x_N, \psi_i) = 0$.
b) En realidad, $\mathbf{C}((C_\omega))$ contiene, contadas con multiplicidad, exactamente k_e series que corresponden a e.

Para el caso de la deformación tórica, fijada la arista admisible

$$e_j = \left[e_{i_{j-1}} + w_{i_{j-1}} e_{n+1} + i_{j-1} e_{n+2}, e_{i_j} + w_{i_j} e_{n+1} + i_j e_{n+2}\right],$$

resulta

$$k_e = d_j,$$

así que tenemos d_j series correspondientes a este segmento. Queremos verificar si hay raíces múltiples e investigar un poco más la naturaleza del cono C_ω. Para ello, debemos avanzar un poco sobre los pasos de la demostración del Teorema 8.3 en [3]. Allí se construye secuencialmente una serie de la forma

$$\psi = \sum_{m=1}^{\infty} c_m a_1^{\alpha_{m,1}} \cdots a_n^{\alpha_{m,n}} t^{\alpha_{m,n+1}} = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m.$$

Investiguemos los primeros términos de esta construcción. Hacemos

$$F_1 (a_0, \cdots, a_n, t, x) := f_t (x) = \sum_{I \in S_1} \alpha_I a_0^{i_0} \cdots a_n^{i_n} t^{i_{n+1}} x^{i_{n+2}},$$

donde $S_1 := Sop (F)$. Tomamos

$$e_1 := e_j, S (e_1) = \frac{1}{d_j} \left(e_{i_j} - e_{i_{j-1}} + \left(w_{i_j} - w_{i_{j-1}} \right) e_{n+1} \right).$$

Definición 8.6 *Sea e una arista admisible del polítopo $P(F)$, y sea*

$$p := \min \{ j : \exists I \in e \cap S_1, I_{N+1} = j \}.$$

La ecuación de la arista e *es*

$$F_e (z) = \sum_{I \in e \cap S_1} \alpha_I . z^{i_{n+2} - p} = 0,$$

Observar que, por la elección de p, resulta que F_e no tiene raíces nulas. En nuestro caso, es siempre $\alpha_I = 0$, o $\alpha_I = 1$. Además,

$$\{ I \in e_j \cap S_1 / \alpha_I = 1 \}$$

tiene sólo dos elementos:

$$a_{i_{j-1}} t^{w_{i_{j-1}}} x^{i_{j-1}} \quad y \quad a_{i_j} t^{w_{i_j}} x^{i_j}.$$

Luego,

$$F_e (z) = 1 + z^{d_j},$$

de allí resulta que $F_e(z)$ tiene exactamente d_j raíces simples. Haciendo $c_1 := \xi$, para algún $\xi^{d_j} = -1$, se define

$$\alpha_1 = -S(e_1).$$

Una vez hecho esto, resulta

$$\varphi_1 = c_1 (a,t)^{\alpha_1} = \xi a_{i_{j-1}}^{\frac{1}{d_j}} a_{i_j}^{-\frac{1}{d_j}} t^{\frac{w_{i_{j-1}} - w_{i_j}}{d_j}}, \tag{18}$$

donde

$$(a,t)^{\alpha_1} := a_1^{\alpha_{1,1}} \cdots a_n^{\alpha_{1,n}} t^{\alpha_{1,n+1}}$$

Proposición 8.4 *(Corollary 3.16 de* [3] *) Si c_1 es una raíz simple de $F_e(z)$, y ψ es la serie construida con el algoritmo del Teorema* 3.6 *de* [3]*, entonces $Sop(\psi) \subset C(e)$. Más generalmente, si el discriminante $\Delta_z(F_e(z)) \neq 0$ entonces todas las series generadas en esta arista tienen soporte en $C(e)$.*

El polinomio $f_t(x)$ está en las condiciones de la proposición 8.4, así que las d_j series $\psi_{j,\xi}(a,t)$ que se obtienen, en virtud de la misma proposición, son elementos de $\mathbf{C}((C(e_j)))$.

Definición 8.7 *Sea P un polítopo en $\mathbf{R}^{N+1}$. Una* curva monótona sobre las aristas de *P es una secuencia de aristas $E = \{l_1, \cdots, l_s\}$ ninguna de ellas paralela al hiperplano nulo; tal que para cada i, el extremo superior del segmento l_i (respecto de la última coordenada) coincide con el extremo inferior del segmento l_{i+1}.*

Por todo lo visto anteriormente, para el caso que estamos estudiando, fijada una triangulación cualquiera, la secuencia $\{e_1, \cdots, e_r\}$ de segmentos provenientes de dicha triangulación es una curva monótona sobre las aristas.

Definición 8.8 *Una curva monótona sobre las aristas* $E = \{l_1, \cdots, l_s\}$ *se dice* coherente *si*

$$\bigcap_{i=1}^{s} C^* (l_i) \neq \emptyset.$$

Queremos ver que toda curva monótona sobre las aristas de una triangulación es coherente. En efecto, por la proposición 8.2, el cono $C(e_j)$ está generado por los vectores

$$e_i + \frac{i - i_j}{d_j} e_{i_{j-1}} + \frac{i_{j-1} - i}{d_j} e_{i_j} + \left(w_i + \frac{i - i_j}{d_j} w_{i_{j-1}} + \frac{i_{j-1} - i}{d_j} w_{i_j} \right) e_{n+1},$$

con $i = 0, \cdots, n;\ i \neq \{i_{j-1}, i_j\}$. Observemos que para cualquier $\omega \in \mathbf{C_T}$,

$$(-\omega, 0) \in C^* (e_j), j = 1, \cdots, r;$$

ya que, haciendo el producto interno

$$(-\omega, 0) . \left(e_i + \frac{i - i_j}{d_j} e_{i_{j-1}} + \frac{i_{j-1} - i}{d_j} e_{i_j} + \left(w_i + \frac{i - i_j}{d_j} w_{i_{j-1}} + \frac{i_{j-1} - i}{d_j} w_{i_j} \right) e_{n+1} \right) =$$

$$= -\omega_i + \frac{i_j - i}{d_j} \omega_{i_{j-1}} + \frac{i - i_{j-1}}{d_j} \omega_{i_j} < 0$$

por la definición de $\mathbf{C_T}$. Luego,

$$(-\omega, 0) \in \bigcap_{j=1}^{r} C^* (e_j).$$

Hasta aquí hemos verificado que la deformación tórica está en las condiciones de la siguiente

Proposición 8.5 *(Corollary* 4.1 *de* [3]*): Sea* $F(x_1, \cdots, x_{N+1}) = 0$ *una ecuación algebraica tal que cada arista de* $P(F)$ *satisface*

$$\Delta_z (F_e (z)) \neq 0.$$

Sea $E = \{l_1, \cdots l_s\}$ *una curva coherente de aristas. Sea* $d = \deg_{x_{N+1}}(F)$ *el grado de* F *respecto de* x_{N+1}*, y sea*

$$C := \bigcap_{j=1}^{s} C(l_j).$$

Entonces el anillo $\mathbf{C}((C))$ *contiene* d *soluciones de la ecuacion*

$$F(x_1, \cdots, x_N, \_) = 0$$

contadas con multiplicidad.

Notar que para el caso que estamos estudiando, C está contenido en la cápsula convexa de

$$\left\{ e_i + \frac{i - i_j}{d_j} e_{i_{j-1}} + \frac{i_{j-1} - i}{d_j} e_{i_j} + \left(w_i + \frac{i - i_j}{d_j} w_{i_{j-1}} + \frac{i_{j-1} - i}{d_j} w_{i_j} \right) e_{n+1} \right\}$$

para $i = 0, \cdots, n$, $i \neq \{i_{j-1}, i_j\}$, $1 \leq j \leq r$. Este último es un cono racional convexo estricto, ya que está contenido en el semiespacio $\{(\omega, 0) > 0\}$ para cualquier $\omega \in \mathbf{C_T}$. Lo denotaremos como $C(\mathbf{T}, t)$.

Resumiendo, para cada $j = 1, \cdots, r$, se pueden construir d_j series

$$\psi_{j,\xi}(a, t) \in \mathbf{C}((C(e_j))).$$

Notar que

$$d_1 + d_2 + \cdots + d_r = n.$$

Entonces la cantidad de series $\psi_{j,\xi}(a, t)$ es exactamente n. Con todo esto, hemos demostrado la siguiente

Proposición 8.6 *Las series* $\psi_{j,\xi}(a, t)$ *son las* n *raíces de* $f_t(x)$ *en el anillo* $\mathbf{C}((C(\mathbf{T}, t)))$.

9 Las Series $\psi_{j,\xi}(a,1)$

Queremos especializar en $t=1$ para encontrar soluciones en forma de series de la ecuación (1). Para ello, debemos asegurarnos que tiene sentido $\psi_{j,\xi}(a,1)$ en algún anillo de series formales adecuado. Si esto pudiera hacerse, las series tendrán soporte en la proyección sobre las primeras $n+1$ coordenadas de $C(\mathbf{T},t)$, y resultan contenidas en la cápsula convexa de

$$\left\{e_k + \frac{k-i_j}{d_j} e_{i_{j-1}} + \frac{i_{j-1}-k}{d_j} e_{i_j}, k \notin \{i_{j-1}, i_j\}\right\}_{1 \leq j \leq r}.$$

Esto no es otra cosa más que el cono $Q_{\mathbf{T}}$ definido en (16). Veamos que vale la siguiente

Proposición 9.1 *Las n series $\psi_{j,\xi}(a,1)$ son elementos del anillo $\mathbf{C}((Q_{\mathbf{T}}))$, y son raíces de la ecuación* (1).

Demostración: Sólo hay que verificar que tiene sentido evaluar en $t=1$ la serie $\psi_{j,\xi}(a,t)$ ya que el resto sale de la última observación, y de la proposición 8.6. Escribimos

$$\psi_{j,\xi}(a,t) = a^{\mu} t^{q} \sum_{\alpha} c_{\alpha} a^{\alpha} t^{m_{\alpha}},$$

donde $\alpha \in \mathbf{Q}_{\mathbf{T}}, m_{\alpha} \in \frac{1}{d_j}\mathbf{N}_{\geq 0}$. La tesis estará demostrada si verificamos que,

$$(\alpha, m_{\alpha}),\ (\alpha', m_{\alpha'}) \in Sop(\psi_{j,\xi}(a,t)), \alpha = \alpha' \Rightarrow m_{\alpha} = m_{\alpha'},$$

lo cual nos garantiza que al evaluar en $t=1$, se mantiene la estructura de la serie. Consideramos la proyección sobre las primeras $n+1$ coordenadas en el subespacio generado por $C(e_j) \subset \mathbf{R}^{n+2}$. Una base del mismo es

$$\left\{e_i + \frac{i-i_j}{d_j} e_{i_{j-1}} + \frac{i_{j-1}-i}{d_j} e_{i_j} + \left(w_i + \frac{i-i_j}{d_j} w_{i_{j-1}} + \frac{i_{j-1}-i}{d_j} w_{i_j}\right) e_{n+1}\right\}_{i \neq \{i_{j-1}, i_j\}}.$$

La imagen de este conjunto bajo la proyección es

$$\left\{e_i + \frac{i-i_j}{d_j} e_{i_{j-1}} + \frac{i_{j-1}-i}{d_j} e_{i_j}\right\}_{i \neq \{i_{j-1}, i_j\}},$$

por ser un conjunto linealmente independiente, resulta la proyección inyectiva, y de allí se deduce fácilmente lo pedido.□

Queremos saber algo acerca de la convergencia de las series $\psi_{j,\xi}(a,1)$. Para ello usamos las coordenadas logarítmicas a través del mapa

$$Log : (\mathbf{C}^*)^N \to \mathbf{R}^N, Log\,(x_1, \cdots, x_N) := (\log|x_1|, \cdots, \log|x_N|).$$

Teorema 9.2 *(Theorem 2.10 de [3]) Si C es un cono en $\mathbf{R}^N$ y $f \in \mathbf{C}((C))$ es algebraico sobre $\mathbf{C}[x_1, \cdots, x_N]$, entonces existe un vector $V \in \mathbf{R}^N$ para el que se verifica que f converge si*

$$Log\,(x) \in C^* + V.$$

En el caso que nos interesa, el cono dual de $\mathbf{Q_T}$ está dado por las inecuaciones

$$w_k + \frac{k - i_j}{d_j} w_{i_{j-1}} + \frac{i_{j-1} - k}{d_j} w_{i_j} \leq 0, k \notin \{i_{j-1}, i_j\}, j = 1, \cdots, r;$$

y está claro que este conjunto es igual a

$$\left\{w \in \mathbf{R}^{n+1} / (i_j - k)\, w_{i_{j-1}} + (k - i_{j-1})\, w_{i_j} \geq d_j w_k, k \notin \{i_{j-1}, i_j\}, j = 1, \cdots, r\right\} =$$

$$= -\mathbf{C}(\mathbf{T})$$

de acuerdo con (15). Luego, tenemos demostrada la siguiente

Proposición 9.3 *Dada una triangulación $\mathbf{T}$, existe un abierto $\mathcal{U}_T \subset \mathbf{R}^{n+1}$ tal que existen n series*

$$\psi_{j,\xi}(a,1) \in \mathbf{C}((Q_\mathbf{T})), j = 1, \cdots, n, \xi^{d_j} = -1,$$

convergentes sobre $\mathcal{U}_T$.

Por el teorema anterior, podemos calcular de manera explícita tal abierto, como tiene que cumplirse que

$$(i_j - k)\log\left|a_{i_{j-1}}\right| + (k - i_{j-1})\log\left|a_{i_j}\right| > d_j \log|a_k| + K,$$

para $K := \min \log |V_i|$, donde V es el vector cuya existencia afirma el teorema. Entonces, para $M := e^K$, debe ocurrir que

$$\left|a_{i_{j-1}}\right|^{i_j-k} . \left|a_{i_j}\right|^{k-i_{j-1}} > M \left|a_k\right|^{d_j} .$$

Luego,

$$\mathcal{U}_T = \left\{ \left|a_{i_{j-1}}\right|^{i_j-k} . \left|a_{i_j}\right|^{k-i_{j-1}} > M \left|a_k\right|^{d_j}, k \notin \{i_{j-1}, i_j\}, j = 1, \cdots, r \right\} \quad (19)$$

Lema 9.4 *El grado en t induce un orden monomial en $\mathbf{C}\left(\left(C\left(e_j\right)\right)\right)$.*

Demostración: Recordemos que $C\left(e_j\right)$ es el cono racional estrictamente convexo generado por

$$v_i := e_i + \frac{i - i_j}{d_j} e_{i_{j-1}} + \frac{i_{j-1} - i}{d_j} e_{i_j} + \left(w_i + \frac{i - i_j}{d_j} w_{i_{j-1}} + \frac{i_{j-1} - i}{d_j} w_{i_j} \right) e_{n+1},$$

para $i \notin \{i_{j-1}, i_j\}$. Las cantidades

$$w_i + \frac{i - i_j}{d_j} w_{i_{j-1}} + \frac{i_{j-1} - i}{d_j} w_{i_j}$$

son positivas y distintas dos a dos, ya que el vector w cumple la condición de que no hay dos rectas en la familia

$$\{(w_i, i), (w_j, j)\} \subset \mathbf{R}^2$$

paralelas. Luego, puede tomarse el orden lexicográfico, haciendo $v_i < v_{i'}$ si y solamente si

$$w_i + \frac{i - i_j}{d_j} w_{i_{j-1}} + \frac{i_{j-1} - i}{d_j} w_{i_j} < w_{i'} + \frac{i' - i_j}{d_j} w_{i_{j-1}} + \frac{i_{j-1} - i'}{d_j} w_{i_j} . \square$$

Proposición 9.5 *El conjunto*

$$\{\psi_{j,\xi}(a,1)\}_{j=1,\cdots,r\,\xi^{d_j}=-1} \subset \mathbf{C}((Q_{\mathbf{T}}))$$

es linealmente independiente.

Demostración: Fijado j, las series $\psi_{j,\xi}(a,t)$ son elementos del anillo $\mathbf{C}((C(e_j)))$, por la Proposición 8.4. Vamos a calcular los dos primeros términos según el orden que definimos en el lema anterior. El primero de ellos lo da (18):

$$\xi a_{i_{j-1}}^{\frac{1}{d_j}} a_{i_j}^{-\frac{1}{d_j}} t^{\frac{w_{i_{j-1}}-w_{i_j}}{d_j}}.$$

Para calcular el segundo término, sea l tal que

$$w_l + \frac{l-i_j}{d_j} w_{i_{j-1}} + \frac{i_{j-1}-l}{d_j} w_{i_j}$$

sea mínimo. Haciendo un cambio afín de coordenadas sobre w que no altere la estructura de la serie, podemos suponer

$$w_{i_j} = w_{i_{j-1}} = 0, w_l = 1$$

y $w_j > 1, j \notin \{i_{j-1}, i_j, l\}$. Entonces, se puede calcular explícitamente el segundo coeficiente de la serie escribiendo

$$\psi_{j,\xi}(a,t) = \xi a_{i_{j-1}}^{\frac{1}{d_j}} a_{i_j}^{-\frac{1}{d_j}} + c.t + \cdots$$

donde los puntos suspensivos indican términos más altos en t. Al plantear

$$f_t(\psi_{j,\xi}(a,t)) = 0,$$

se puede despejar c. Explícitamente:

$$\psi_{j,\xi}(a,t) = \xi a_{i_{j-1}}^{\frac{1}{d_j}} a_{i_j}^{-\frac{1}{d_j}} + \frac{1}{d_j} \xi^{l+1-i_{j-1}} a_l a_{i_{j-1}}^{(l+1-i_j)/d_j} a_{i_j}^{(i_{j-1}-l-1)/d_j} .t + \cdots$$

donde los puntos suspensivos indican términos más altos en t.

Notar que al variar w, l va recorriendo el conjunto

$$\{i_{j-2}, \cdots i_{j+1}\} \setminus \{i_{j-1}, i_j\},$$

por lo que la cardinalidad de

$$\left\{e_l + \frac{l+1-i_j}{d_j} e_{i_{j-1}} + \frac{i_{j-1}-l-1}{d_j} e_{i_j}\right\}_l$$

es por lo menos $d_j - 1$. Luego, al especializar en $t=1$, se podrán reconocer en $\psi_{j,\xi}(a,1)$ los siguientes términos

$$\xi a_{i_{j-1}}^{\frac{1}{d_j}} a_{i_j}^{-\frac{1}{d_j}} + \sum_l \frac{1}{d_j} \xi^{l+1-i_{j-1}} a_l a_{i_{j-1}}^{(l+1-i_j)/d_j} a_{i_j}^{(i_{j-1}-l-1)/d_j}.$$

Sea $\mathbf{C}[Q_{\mathbf{T}}]$ el subanillo de series de $\mathbf{C}((Q_{\mathbf{T}}))$ de soporte finito. Consideramos la aplicación

$$T : \mathbf{C}((Q_{\mathbf{T}})) \to \mathbf{C}[Q_{\mathbf{T}}],$$
$$T\left(\sum c_\alpha a^\alpha\right) = \sum_{\alpha \in S} c_\alpha a^\alpha,$$

donde S es el conjunto formado por los vectores

$$\frac{1}{d_j}\left(e_{i_{j-1}} - e_{i_j}\right), j = 1, \cdots r$$

y

$$e_r + \frac{1}{d_j}(r+1-i_j)e_{i_{j-1}} + (i_{j-1}-r-1)\, e_{i_j},$$

con $i_{j-2} \leq r \leq i_{j+1},\ i_{j-1} \neq r \neq i_j,\ j = 1, \cdots, r$..

Por lo dicho anteriormente,

$$T\left(\psi_{j,\xi}(a,1)\right) = \xi a_{i_{j-1}}^{\frac{1}{d_j}} a_{i_j}^{-\frac{1}{d_j}} + \sum_l \frac{1}{d_j} \xi^{l+1-i_{j-1}} . a_l . a_{i_{j-1}}^{(l+1-i_j)/d_j} . a_{i_j}^{(i_{j-1}-l-1)/d_j},$$

y no hay dos sumandos distintos con igual exponente en a. La proposición estará demostrada si verificamos que las imágenes son linealmente independientes. Hagamos

$$\sum_{j,\xi} \lambda_{j,\xi} T\left(\psi_{j,\xi}(a,1)\right) = 0.$$

Los monomios

$$\left\{a_{i_{j-1}}^{\frac{1}{d_j}} a_{i_j}^{-\frac{1}{d_j}} t^{\frac{w_{i_{j-1}} - w_{i_j}}{d_j}}\right\}_j$$

se pueden ordenar por el grado en t ya que

$$\frac{w_{i_{j-1}} - w_{i_j}}{d_j} = \frac{w_{i_{j'-1}} - w_{i_{j'}}}{d_{j'}}$$

implicaría que las rectas

$$\left\{\left(w_{i_{j-1}}, i_{j-1}\right), \left(w_{i_j}, i_j\right)\right\}, \left\{\left(w_{i_{j'-1}}, i_{j'-1}\right), \left(w_{i_{j'}}, i_{j'}\right)\right\}$$

son paralelas. Luego, tomando

$$j_0 := \min\left\{\frac{w_{i_{j-1}} - w_{i_j}}{d_j}, j = 1, \cdots, r\right\},$$

debe cumplirse que $a_{i_{j_0-1}}^{\frac{1}{d_{j_0}}} a_{i_{j_0}}^{-\frac{1}{d_{j_0}}}$ no puede aparecer más que en las series correspondientes al segmento j_0-ésimo, ya que las otras series tienen grado en t mínimo dado por

$$\frac{w_{i_{j-1}} - w_{i_j}}{d_j} > \frac{w_{i_{j_0-1}} - w_{i_{j_0}}}{d_{j_0}}.$$

Luego,

$$\left(\sum_{\xi^{d_{j_0}}=-1} \lambda_{j_0,\xi}\xi\right) a_{i_{j_0-1}}^{\frac{1}{d_{j_0}}} a_{i_{j_0}}^{-\frac{1}{d_{j_0}}} = 0,$$

o sea

$$\left(\sum_{\xi^{d_{j_0}}=-1} \lambda_{j_0,\xi}\xi\right) = 0.$$

Tomemos ahora

$$j_1 := \min\left\{\frac{w_{i_{j-1}} - w_{i_j}}{d_j}, j = 1, \cdots, r; j \neq j_0\right\}.$$

Ahora podría pasar que en $T\left(\psi_{j_0,\xi}\left(a,t\right)\right)$ hayan términos con grado en t iguales a $\frac{w_{i_{j_1-1}} - w_{i_{j_1}}}{d_{j_1}}$. Estos serían iguales a

$$\frac{1}{d_{j_0}}\xi^{l+1-i_{j_0-1}}.a_l.a_{i_{j_0-1}}^{(l+1-i_{j_0})/d_{j_0}}.a_{i_{j_0}}^{(i_{j_0-1}-l-1)/d_{j_0}},$$

para algún l. Si los monomios

$$a_l.a_{i_{j_0-1}}^{(l+1-i_{j_0})/d_{j_0}}.a_{i_{j_0}}^{(i_{j_0-1}-l-1)/d_{j_0}} \quad y \quad a_{i_{j_1-1}}^{\frac{1}{d_{j_1}}}a_{i_{j_1}}^{-\frac{1}{d_{j_1}}}$$

coinciden (por ejemplo, en el caso de las triangulaciones finas, donde $j = n$), entonces

$$\left(\sum_{\xi^{d_{j0}}=-1}\lambda_{j_0,\xi}\frac{1}{d_{j_0}}\xi^{l+1-i_{j_0-1}}\right)+\left(\sum_{\xi^{d_{j_1}}=-1}\lambda_{j_1,\xi}\xi\right)=0.$$

Pero

$$\left(\sum_{\xi^{d_{j0}}=-1}\lambda_{j_0,\xi}\frac{1}{d_{j_0}}\xi^{l+1-i_{j_0-1}}\right)=\frac{1}{d_{j_0}}\xi^{l-i_{j_0-1}}\left(\sum_{\xi^{d_{j0}}=-1}\lambda_{j_0,\xi}\xi\right)=0,$$

así que

$$\left(\sum_{\xi^{d_{j_1}}=-1}\lambda_{j_1,\xi}\xi\right)=0.$$

Inductivamente, se tiene que para todo j debe ser

$$\sum_{\xi^{d_j}=-1}\lambda_{j,\xi}\xi=0,$$

y además, si $i_{j-1} < i_j$, entonces para todo $l \in \{i_{j-1}+1, \cdots, i_j - 1\}$, el único lugar donde aparece el monomio

$$a_l.a_{i_{j-1}}^{(l+1-i_j)/d_j}.a_{i_j}^{(i_{j-1}-l-1)/d_j}$$

es en el segmento $j-$ésimo, luego también debe verificarse

$$\sum_{\xi^{d_j}=-1}\lambda_{j,\xi}\frac{1}{d_j}\xi^{l+1-i_{j-1}}=0.$$

Fijado $a \in \mathcal{U}_T$, el polinomio $p(t)$ definido como

$$\sum_{\xi}\lambda_{j,\xi}\left(ta_{i_{j-1}}^{\frac{1}{d_j}}a_{i_j}^{-\frac{1}{d_j}}+\sum_{l=i_{j-1}+1}^{i_j-1}\frac{1}{d_j}t^{l+1-i_{j-1}}.a_l.a_{i_{j-1}}^{(l+1-i_j)/d_j}.a_{i_j}^{(i_{j-1}-l-1)/d_j}\right)$$

es nulo o tiene grado menor o igual que d_j, por tener como raíces a 0 y a las d_j raíces de -1, debe ser el polinomio nulo. Luego, $\lambda_{j,\xi} = 0, \forall j, \forall \xi.\square$

Corolario 9.6 *Si notamos por $\mathcal{H}(\mathcal{U}_T)$ al espacio vectorial de funciones $\mathcal{A}-$hipergeométricas con parámetros $\binom{-1}{0}$ introducido en (2), entonces $\mathcal{H}(\mathcal{U}_T)$ tiene dimensión vectorial compleja igual a n, $\{\psi_{j,\xi}(a,1)\}$ es una base de $\mathcal{H}(\mathcal{U}_T)$, y la funcional*

$$T : \mathcal{H}(\mathcal{U}_T) \to \mathbf{C}[Q_{\mathbf{T}}]$$

es un monomorfismo.

Demostración: $\psi_{j,\xi}(a,1) \in \mathcal{H}(\mathcal{U}_T)$ por la proposición 2.1, y el conjunto $\{\psi_{j,\xi}(a,1)\}$ es linealmente independiente. Como por el Teorema 5.2, $\mathcal{H}(\mathcal{U}_T)$ tiene dimensión a lo más n, entonces se sigue que $\{\psi_{j,\xi}(a,1)\}$ es una base de $\mathcal{H}(\mathcal{U}_T)$, y como $\{T(\psi_{j,\xi}(a,1))\}$ es también linealmente independiente, T resulta inyectiva.□

10 Las raíces como $\Gamma-$series

Sabemos que las funciones $\psi_{j,\xi}(a,1) \in \mathcal{H}(\mathcal{U}_T)$. En (12) se introdujeron series que también pertenecen al espacio $\mathcal{H}(\mathcal{V})$, para un abierto $\mathcal{V}$ donde tales series resultan convergentes. Veamos como podemos escribir a las raíces $\psi_{j,\xi}(a,1)$ en forma de series hipergeométricas. Como siempre, supondremos fijada una triangulación $\mathbf{T}$ con r segmentos, y usaremos la misma notación para los vértices y las longitudes de los segmentos de la triangulación.

Definición 10.1 *Fijados $1 \leq j \leq r$, y $\xi = (-1)^{d_j}$ una de las d_j raíces de -1, definimos la serie $\mathcal{A}-$hipergeométrica como*

$$X_{j,\xi} := \xi \left[a_{i_{j-1}}^{\frac{1}{d_j}} a_{i_j}^{-\frac{1}{d_j}} \right] + \frac{1}{d_j} . \sum_{k=2}^{d_j} \xi^k \left[a_{i_{j-1+k-1}} a_{i_{j-1}}^{\frac{k-d_j}{d_j}} . a_{i_j}^{-\frac{k}{d_j}} \right] + \frac{1}{d_j} \left[a_{i_{j-1}-1} a_{i_{j-1}}^{-1} \right] \tag{20}$$

Definiendo como 0 a la expresión $\left[a_{-1}a_0^{-1}\right]$ que aparece en el sumando de la derecha cuando $j = 1$.

Notar que variando j y ξ hemos definido n series distintas en total.

Proposición 10.1 *Las n series $X_{j,\xi}$ son elementos de $\mathcal{H}(\mathcal{U}_T)$, para la constante $M > 0$ de* (19) *adecuada.*

Demostración: Observar que los exponentes de los corchetes que aparecen en la definición de $X_{j,\xi}$ tienen a lo más dos racionales no enteros (en los vértices de la triangulación) y en el resto, coordenadas enteras no negativas, excepto el caso $e_{i_{j-1}-1} - e_{i_{j-1}}$. Por la proposición 7.5, todos estos elementos pertenecen a $\mathbf{C}((Q_{\mathbf{T}}))$. Las Proposiciones 6.2 y 6.3 garantizan que estas series son $\mathcal{A}-$hipergeométricas con parámetros $\binom{-1}{0}$. Respecto de la convergencia, para cada j, sabemos que la serie que indica cada corchete de la definición de $X_{j,\xi}$ converge para

$$-Log\,(a) \in \mathbf{C}\,(\mathbf{I}) + V,$$

para un vector V (cf. Teorema 4.3 y proposición 6.3). Eligiendo adecuadamente el vector V, podemos encontrar un dominio común de convergencia para todas las series, o sea las n series $X_{j,\xi}$ convergerán para

$$-Log\,(a) \in \bigcap_{\mathbf{I}\in\mathbf{T}} \mathbf{C}\,(\mathbf{I}) + V = \mathbf{C}\,(\mathbf{T}) + V.$$

Esta condición se traduce en

$$(i_j - k)\left(-\log\left|a_{i_{j-1}}\right|\right) + (k - i_{j-1})\left(-\log\left|a_{i_j}\right|\right) \leq d_j\left(-\log|a_k|\right) - \alpha,$$

para $k \notin \{i_{j-1}, i_j\}$, $j = 1, \cdots, r$, con

$$\alpha := \min\left\{d_j V_k - (i_j - k)\, V_{i_{j-1}} - (k - i_{j-1})\, V_{i_j}\right\}.$$

Luego,

$$(i_j - k)\log\left|a_{i_{j-1}}\right| + (k - i_{j-1})\log\left|a_{i_j}\right| \geq d_j \log|a_k| + \alpha.$$

Tomando $M := e^{\alpha}$, entonces se cumple que las n series convergen si

$$\left|a_{i_{j-1}}\right|^{i_j - k}.\left|a_{i_j}\right|^{k - i_{j-1}} > M\,|a_k|^{d_j}, k \notin \{i_{j-1}, i_j\}, j = 1, \cdots, r.$$

Esta es precisamente la definición de $\mathcal{U}_T$ en (19) .□

Una vez hechos todos estos preliminares, podemos presentar el siguiente resultado:

Teorema 10.2 *(Theorem 3.2 de* [1]*) Las n series $X_{j,\xi}$ son las raíces de la ecuación general de orden n, esto es satisfacen* (1)*. Hay una constante M tal que las n series $X_{j,\xi}$ convergen en*

$$\mathcal{U}_T = \left\{ \left|a_{i_{j-1}}\right|^{i_j - k} . \left|a_{i_j}\right|^{k - i_{j-1}} > M \left|a_k\right|^{d_j}, k \notin \left\{i_{j-1}, i_j\right\}, j = 1, \cdots, r \right\}.$$

Demostración: Las n series $\{\psi_{j,\xi}(a,1)\}$ convergen en un abierto de la forma $\mathcal{U}_T$, con $M = M_1 > 0$ (proposición 9.3). Por otro lado, la proposición 10.1 dice que las series $\{X_{j,\xi}\}$ son convergentes también en un abierto de la misma naturaleza, con $M = M_2 > 0$. Tomando el máximo de los M_i, encontramos un abierto donde las $2n$ series resultan convergentes.

Queremos demostrar que

$$\psi_{j,\xi}(1) = X_{j,\xi}.$$

Como la funcional T separa el espacio $\mathcal{H}(\mathcal{U}_T)$, es suficiente con ver que, fijado el par j, ξ,

$$T\left(X_{j,\xi}\right) = T\left(\psi_{j,\xi}(1)\right) =$$

$$= \xi a_{i_{j-1}}^{\frac{1}{d_j}} a_{i_j}^{-\frac{1}{d_j}} + \sum_l \frac{1}{d_j} \xi^{l+1-i_{j-1}} . a_l . a_{i_{j-1}}^{(l+1-i_j)/d_j} . a_{i_j}^{(i_{j-1}-l-1)/d_j},$$

donde l varía por $\{i_{j-2}, \cdots, i_{j+1}\} \setminus \{i_{j-1}, i_j\}$.

El primer término aparece únicamente en el primer sumando de (20), y para ver que cada uno de los sumandos del segundo término también aparece en la serie, deberemos hacer unas cuentas previas. Sea

$$l \in \{i_{j-2}, \cdots, i_{j+1}\} \setminus \{i_{j-1}, i_j\},$$

y sea k el único entero entre 1 y d_j tal que

$$l \equiv i_{j-1} - 1 + k \,(\mathrm{mod}\ d_j).$$

Si $d_j > 1$ y $k = 1$, entonces

$$l = i_{j-1} + z.d_j, z \in \mathbf{Z},$$

y vale lo siguiente:

$$\frac{1}{d_j}\xi^{l+1-i_{j-1}}.a_l.a_{i_{j-1}}^{(l+1-i_j)/d_j}.a_{i_j}^{(i_{j-1}-l-1)/d_j}=$$

$$=\frac{1}{d_j}\xi^{z.d_j+1}.a_{i_{j-1}+z.d_j}.a_{i_{j-1}}^{(z.d_j+1-d_j)/d_j}.a_{i_j}^{(-z.d_j-1)/d_j}=$$

$$=\frac{(-1)^z}{d_j}\xi.a_{i_{j-1}+z.d_j}.a_{i_{j-1}}^{z-1+\frac{1}{d_j}}.a_{i_j}^{-z-\frac{1}{d_j}}=$$

$$=\xi a_{i_{j-1}}^{\frac{1}{d_j}}a_{i_j}^{-\frac{1}{d_j}}\left(\frac{(-1)^z}{d_j}a_{i_{j-1}+z.d_j}.a_{i_{j-1}}^{z-1}.a_{i_j}^{-z}\right).$$

Este último término también aparece únicamente en el primer sumando de (20) : es el término que corresponde al vector

$$e_{i_{j-1}+z.d_j}+(z-1)\,e_{i_{j-1}}-ze_{i_j}\in\mathcal{L}$$

(cf. definición 6.2).

Para $2\leq k\leq d_j-1$,

$$l=z.d_j+i_{j-1}+k-1,$$

luego

$$\frac{1}{d_j}\xi^{l+1-i_{j-1}}.a_l.a_{i_{j-1}}^{(l+1-i_j)/d_j}.a_{i_j}^{(i_{j-1}-l-1)/d_j}=$$

$$=\frac{1}{d_j}\xi^{z.d_j+k}.a_{i_{j-1}+z.d_j+k-1}.a_{i_{j-1}}^{(z.d_j+k-d_j)/d_j}.a_{i_j}^{(-z.d_j-k)/d_j}=$$

$$=\frac{(-1)^z}{d_j}\xi^k.a_{i_{j-1}+z.d_j+k-1}.a_{i_{j-1}}^{z-1+\frac{k}{d_j}}.a_{i_j}^{-z-\frac{k}{d_j}}=$$

$$\frac{\xi^k}{d_j}\left((-1)^z.a_{i_{j-1}+z.d_j+k-1}.a_{i_{j-1}}^{z-1+\frac{k}{d_j}}.a_{i_j}^{-z-\frac{k}{d_j}}\right),$$

y este monomio aparece solamente en el sumando correspondiente a k de la suma del medio de (20). Explícitamente, corresponde al sumando que determina el vector

$$e_{i_{j-1}+z.d_j+k-1}-e_{i_{j-1}+k-1}+ze_{i_{j-1}}-z.e_{i_j}\in\mathcal{L}.$$

Para $k = d_j$ (También $k = 1 = d_j$), hay dos subcasos: si $l > i_{j-1}$, entonces

$$l = z.d_j + i_{j-1} - 1, z > 0.$$

El término que buscamos es de la forma

$$\frac{1}{d_j}\xi^{l+1-i_{j-1}}.a_l.a_{i_{j-1}}^{(l+1-i_j)/d_j}.a_{i_j}^{(i_{j-1}-l-1)/d_j} =$$

$$\frac{1}{d_j}\xi^{z.d_j}.a_{i_{j-1}+z.d_j-1}.a_{i_{j-1}}^{(z.d_j-d_j)/d_j}.a_{i_j}^{(-z.d_j)/d_j} =$$

$$= \frac{(-1)^z}{d_j}.a_{i_{j-1}+z.d_j-1}.a_{i_{j-1}}^{(z-1)}.a_{i_j}^{-z},$$

que aparece en la serie indexada para $k = d_j$, en la sumatoria del medio de (20),término que corresponde al vector

$$e_{i_{j-1}+z.d_j-1} + (z-1)\, e_{i_{j-1}} - ze_{i_j} \in \mathcal{L}.$$

Para $l < i_{j-1}$, el monomio

$$\frac{(-1)^z}{d_j}.a_{i_{j-1}+z.d_j-1}.a_{i_{j-1}}^{(z-1)}.a_{i_j}^{-z}$$

aparece en la última serie que define (20) : $\frac{1}{d_j}\left[a_{i_{j-1}-1}a_{i_{j-1}}^{-1}\right]$ indexada por el mismo vector

$$e_{i_{j-1}+z.d_j-1} + (z-1)\, e_{i_{j-1}} - ze_{i_j}.$$

Luego, $T\left(X_{j,\xi}\right) = T\left(\psi_{j,\xi}\left(1\right)\right).\square$

11 Los Coeficientes de $X_{j,\xi}$

Si bien es cierto que las series $X_{j,\xi}$ fueron definidas sobre el cuerpo de los números complejos $\mathbf{C}$, las expansiones algebraicas $\psi_{j,\xi}\left(a,t\right)$ pueden construirse en cualquier dominio entero donde la ecuación $\xi^{d_j} = -1$ tenga d_j soluciones distintas (para más detalles, ver 6.1 de [3]), y los coeficientes de $X_{j,\xi}$ estén definidos. Para estudiar la naturaleza de estos coeficientes, necesitamos unas definiciones previas.

Definición 11.1 *Sea R un grupo abeliano, y sea $R =: \mathrm{m}_0 \supset \mathrm{m}_1 \supset \mathrm{m}_2 \supset \cdots$ una sucesión de subgrupos (una filtración descendente). Definimos $\widehat{R}$, el* completado *de R con respecto a los m_i, como el subgrupo del producto directo de R/m_i:*

$$\widehat{R} := \{g = (g_1, g_2, \cdots), g_i \in R/\mathrm{m}_i \ \ y \ g_i \equiv g_j \,(\mathrm{mod}\ m_j)\,\forall i \geq j\}.$$

Si R es un anillo y los m_i son ideales, entonces cada uno de los R/m_i es un anillo, y se sigue entonces que $\widehat{R}$ es también un anillo. Un caso importante es cuando R es un anillo filtrado por ideales de la forma $m_i = m^i$ para algún ideal m de R. Esta se llama filtración $m-$ádica. En lo que sigue, supondremos que la filtración estará siempre referida a un ideal. Un anillo se dirá *completo* si es isomorfo a su completado. Puede verse (por ejemplo, en [4]) que si R es el anillo $S[x_1, \cdots, x_N]$, y $m = (x_1, \cdots, x_N)$, entonces

$$\widehat{R} \simeq S[[x_1, \cdots, x_N]].$$

Vamos a utilizar la siguiente versión del

Lema 11.1 *: "Lema de Hensel" (Theorem 7.3 de* [4]*) Sea R un anillo completo respecto de la filtración dada por el ideal m, y sea $f(x)$ un polinomio en $R[x]$. Si α es una raiz aproximada en el sentido de que*

$$f(\alpha) \equiv 0 \left(\mathrm{mod}\ f'(\alpha)^2\, \mathrm{m}\right),$$

entonces existe una raiz β de f cerca de α en el sentido de que

$$f(\beta) = 0 \quad y \quad \beta \equiv \alpha \,(\mathrm{mod}\ f'(\alpha)\,\mathrm{m}).$$

Si $f'(\alpha)$ no es un divisor de cero en R, entonces β es único.

Ahora podemos pasar a enunciar el principal resultado de esta sección:

Teorema 11.2 *(Theorem* 4.1 *de* [1]*) Fijado el par* j, ξ*, todos los coeficientes de la serie* $X_{j,\xi}$ *pertenecen al anillo* $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{d_j}\right][\xi]$.

Demostración: Sea $w \in \mathbf{C_T}$ de tal manera que

$$w_{i_{j-1}} = w_{i_j} = 0,$$

y no hay dos rectas en la familia $\{(w_i, i), (w_j, j)\}$ paralelas en $\mathbf{R}^2$, la serie $\psi_{j,\xi}(a,t)$ construída según el procedimiento que indica el teorema 8.3 es un elemento del anillo $R_1\left[\left[t^{\frac{1}{d_j}}\right]\right]$, donde

$$R_1 = Q[\xi]\left[a_s : s \notin \{i_{j-1}, i_j\}\right]\left[a_{i_{j-1}}^{\pm\frac{1}{d_j}}, a_{i_j}^{\pm\frac{1}{d_j}}\right].$$

Esta última afirmación es cierta porque

$$\psi_{j,\xi}(a,t) \in \mathbf{C}\left(\left(C\left(e_j\right)\right)\right),$$

por la proposición 8.4, y del hecho que w_k es siempre entero positivo para $k \notin \{i_{j-1}, i_j\}$. Para demostrar esta proposición es suficiente verificar que $\psi_{j,\xi}(a,t)$ es un elemento del subanillo $R_2\left[\left[t^{\frac{1}{d_j}}\right]\right]$, donde

$$R_2 := Z\left[\frac{1}{d_j}\right][\xi]\left[a_s : s \notin \{i_{j-1}, i_j\}\right]\left[a_{i_{j-1}}^{\pm\frac{1}{d_j}}, a_{i_j}^{\pm\frac{1}{d_j}}\right].$$

Aplicaremos el Lema de Hensel al dominio íntegro $R_2\left[\left[t^{\frac{1}{d_j}}\right]\right]$ y al polinomio dado por la deformación tórica $f_t(x)$ de (17). Este anillo es completo respecto de la filtración dada por el ideal maximal $m := \left\langle t^{\frac{1}{k}}\right\rangle$, y contiene a todos los coeficientes de $f_t\ (x)$. El término constante

$$\alpha := \xi a_{i_{j-1}}^{\frac{1}{d_j}} a_{i_j}^{-\frac{1}{d_j}} \in R_2.$$

Para estar en las condiciones del Lema de Hensel, veamos que $f_t'(\alpha)$ es una unidad en R_2. En efecto,

$$f_t'(\alpha) = \sum_{i=0}^{n} i a_i t^{w_i}\left(\xi a_{i_{j-1}}^{\frac{1}{d_j}} a_{i_j}^{-\frac{1}{d_j}}\right)^{i-1}.$$

El término de grado 0 en t de $f'_t(\alpha)$ es el que corresponde a los índices i_{j-1} e i_j:

$$i_{j-1}a_{i_{j-1}}\left(\xi a_{i_{j-1}}^{\frac{1}{d_j}}a_{i_j}^{-\frac{1}{d_j}}\right)^{i_{j-1}-1}+i_ja_{i_j}\left(\xi a_{i_{j-1}}^{\frac{1}{d_j}}a_{i_j}^{-\frac{1}{d_j}}\right)^{i_j-1}=$$

$$=\xi^{i_{j-1}-1}i_{j-1}a_{i_{j-1}}^{\frac{i_{j-1}-1}{d_j}+1}a_{i_j}^{\frac{1-i_{j-1}}{d_j}}+\xi^{i_j-1}i_ja_{i_{j-1}}^{\frac{i_j-1}{d_j}}a_{i_j}^{\frac{1-i_j}{d_j}+1}=$$

$$=\xi^{i_j-1}a_{i_{j-1}}^{\frac{i_j-1}{d_j}}a_{i_j}^{\frac{1-i_{j-1}}{d_j}}d_j,$$

que es un elemento inversible en R_2. Como la serie $f'_t(\alpha)$ tiene término constante inversible en R_2, entonces $f'_t(\alpha)$ es inversible en $R_2\left[\left[t^{\frac{1}{d_j}}\right]\right]$.

Por todo lo dicho anteriormente, para ver que α es una raiz aproximada, es suficiente verificar que $f_t(\alpha)\in m$.

Dado que

$$f_t(\alpha)=\sum_{i=0}^{n}a_it^{w_i}\left(\xi a_{i_{j-1}}^{\frac{1}{d_j}}a_{i_j}^{-\frac{1}{d_j}}\right)^i,$$

los términos de grado 0 en t para $f_t(\alpha)$ son los que corresponden a i_{j-1} e i_j. Pero

$$a_{i_{j-1}}\left(\xi a_{i_{j-1}}^{\frac{1}{d_j}}a_{i_j}^{-\frac{1}{d_j}}\right)^{i_{j-1}}+a_{i_j}\left(\xi a_{i_{j-1}}^{\frac{1}{d_j}}a_{i_j}^{-\frac{1}{d_j}}\right)^{i_j}=0.$$

Por el lema de Hensel, existe un único $\beta\in R_2\left[\left[t^{\frac{1}{d_j}}\right]\right]$ tal que

$$f_t(\beta)=0,\quad y\quad \beta\equiv\alpha\,(\mathrm{mod}\ f'(\alpha)\,m).$$

Aplicando también el lema de Hensel a $R_1\left[\left[t^{\frac{1}{d_j}}\right]\right]$, se sabe que

$\exists!\beta'\in R_1\left[\left[t^{\frac{1}{d_j}}\right]\right]$ tal que

$$f_t(\beta')=0,\quad y\quad \beta'\equiv\alpha\,(\mathrm{mod}\ f'(\alpha)\,m).$$

Como la serie $\psi_{j,\xi}(a,t)$ es un elemento de $R_1\left[\left[t^{\frac{1}{k}}\right]\right]$ y verifica

$$f_t(\psi_{j,\xi}(a,t))=0,$$

y

$$\psi_{j,\xi}(a,t)\equiv\alpha\,(\mathrm{mod}\ f'(\alpha)\,m),$$

entonces $\psi_{j,\xi}(a,t) = \beta'$. También debe ser $\psi_{j,\xi}(a,t) = \beta$, ya que por la inclusión
$$R_2\left[\left[t^{\frac{1}{k}}\right]\right] \subset R_1\left[\left[t^{\frac{1}{k}}\right]\right]$$
se tiene que β y β' son raíces de f_t en $R_1\left[\left[t^{\frac{1}{k}}\right]\right]$.□

12 Soluciones racionales

Hemos demostrado que fijada una triangulación $\mathbf{T}$, se pueden construir n funciones $X_{j,\xi}$ convergentes en un abierto $\mathcal{U}_T$, que forman una base del espacio vectorial $\mathcal{H}(\mathcal{U}_T)$, y además verifican
$$a_0 + a_1 X_{j,\xi} + a_2 X_{j,\xi}^2 + \cdots + a_n X_{j,\xi}^n = 0.$$
Luego, se tiene la siguiente igualdad algebraica en $\mathbf{C}((\mathbf{C_T}))[x]$:
$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = a_n \prod_{j=1,\cdots,r\, \xi^{d_j}=-1} (x - X_{j,\xi}). \tag{21}$$
De aquí se deduce que
$$\sum_{j,\xi} X_{j,\xi} = -\frac{a_{n-1}}{a_n}.$$
Por ser $\mathcal{H}(\mathcal{U}_T)$ un espacio vectorial, la función racional $\frac{a_{n-1}}{a_n}$ pertenece a dicho espacio. Es natural intentar caracterizar todas las soluciones racionales de (2), es decir aquellas funciones $R(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ hipergeométricas que pueden escribirse como cociente de 2 polinomios en las variables $a_0, a_1, \cdots, a_n$.

A partir de ahora supondremos fijada una triangulación $\mathbf{T}$. El abierto $\mathcal{U}_T$ será denominado simplemente $\mathcal{U}$. Supongamos también que tenemos fijada una enumeración de las funciones $X_{j,\xi}$, es decir que tenemos un mapa
$$\chi : \mathcal{U} \to \mathbf{C}^n, \chi(a) = (X_1(a), X_2,(a) \cdots, X_n(a)), \forall a \in \mathcal{U},$$
donde $X_p := X_{j,\xi}$ para algún par j, ξ.

Lema 12.1 $\chi(\mathcal{U})$ *es abierto en* $\mathbf{C}^n$.

Demostración: Sea $\mathcal{V}$ un abierto no vacío contenido en $\mathcal{U}$, homogéneo (o sea $a \in \mathcal{V} \Leftrightarrow \lambda.a \in \mathcal{V}, \forall \lambda \in \mathbf{C}^*$). Basta ver que $\chi(\mathcal{V})$ es abierto, ya que el abierto $\mathcal{U}$ definido en (19) es homogéneo. Notemos que además,

$$\mathcal{U} \cap \{a_n = 0\} = \emptyset.$$

Para ello consideremos la aplicación: $\phi : \mathcal{V} \to \mathbf{C}^n$ tal que

$$\phi(a_0, a_1, \cdots, a_n) = (\frac{a_0}{a_n}, \frac{a_1}{a_n}, \cdots, \frac{a_{n-1}}{a_n}).$$

$\phi(\mathcal{V})$ es abierto ya que $(z_0, z_1, \cdots, z_{n-1}) \in \phi(\mathcal{V})$ si y solamente si

$$(z_0, z_1, \cdots, z_{n-1}, 1) \in \mathcal{V}.$$

Como $\mathcal{V}$ es abierto, existe un polidisco

$$\left\{ w / \prod_{i=0}^{n} |w_i - z_i| < \epsilon_i \right\} \subset \mathcal{V},$$

con $z_n = 1, \epsilon_i > 0, \forall i = 0, 1, \cdots, n$. Eso implica

$$\left\{ w / \prod_{i=0}^{n-1} |w_i - z_i| < \epsilon_i \right\} \subset \phi(\mathcal{V}),$$

con lo cual hemos conseguido un entorno abierto de $(z_0, z_1, \cdots, z_{n-1})$ en $\phi(\mathcal{V})$. El resto del lema sale de considerar el Teorema de Invariancia del Dominio, aplicado a la función inyectiva y continua:

$$f : \phi(\mathcal{V}) \to \chi(\mathcal{V}), \ f(z_0, z_1, \cdots, z_{n-1}) = \chi(z_0, z_1, \cdots, z_{n-1}, 1).$$

f es inyectiva ya que dados n números complejos, existe un único polinomio mónico de grado n cuyas raíces son esos números, y es sobreyectiva puesto que si

$$(r_1, r_2, \cdots, r_n) = \chi(a),$$

$$a = (a_0, a_1, \cdots, a_n) \in \mathcal{V} \Rightarrow (\frac{a_0}{a_n}, \frac{a_1}{a_n}, \cdots, \frac{a_{n-1}}{a_n}, 1) \in \mathcal{V} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\frac{a_0}{a_n}, \frac{a_1}{a_n}, \cdots, \frac{a_{n-1}}{a_n}) \in \phi(\mathcal{V})$$

con lo cual

$$\chi(a) = f(\frac{a_0}{a_n}, \frac{a_1}{a_n}, \cdots, \frac{a_{n-1}}{a_n}).\square$$

Lema 12.2 *Si*

$$R(a) = \frac{P(a)}{Q(a)},$$

con P y Q polinomios sin factores comunes en $\mathbf{C}[a_0, a_1, \cdots a_n]$ satisface el sistema $\mathcal{A}-$hipergeométrico (2), *entonces P y Q son polinomios homogéneos, con el mismo grado de homogeneidad.*

Demostración: Q no puede ser constante, ya que la condición

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\partial P}{\partial a_i} = 0$$

no se cumple para polinomios no constantes. Y si P fuera constante distinto de 0, (y también Q), entonces

$$\sum_{i=0}^{n} i a_i \frac{\partial P}{\partial a_i} = 0$$

y no sería igual a $-P$.

Como tiene que valer

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\partial R}{\partial a_i} = 0.$$

Luego,

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \left(\frac{\partial P}{\partial a_i} Q - P \frac{\partial Q}{\partial a_i} \right) = 0,$$

lo cual implica

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\partial P}{\partial a_i} \right) Q = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\partial Q}{\partial a_i} \right) P(*).$$

Como Q no es constante, entonces

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\partial Q}{\partial a_i} \right) \neq 0.$$

P y Q son coprimos en el dominio de factorización única $\mathbf{C}[a_0, a_1, \cdots a_n]$, entonces P divide a $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i \frac{\partial P}{\partial a_i}$ y Q divide a $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i \frac{\partial Q}{\partial a_i}$. Sea j_0 tal que $\deg_{a_{j_0}}(Q) > 0$. Luego

$$\deg_{a_{j_0}} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\partial Q}{\partial a_i} \right) = \deg_{a_{j_0}}(Q),$$

con lo cual resulta

$$Q=\lambda\sum_{i=0}^{n}a_i\frac{\partial Q}{\partial a_i},\lambda\in\mathbf{C}.$$

Reemplazando esta igualdad en $(*)$ y simplificando, queda

$$P=\lambda\sum_{i=0}^{n}a_i\frac{\partial P}{\partial a_i}.$$

Ahora, si $Q\left(a\right)=\sum_{\alpha}q_{\alpha}a^{\alpha}$, entonces

$$\sum_{i=0}^{n}a_i\frac{\partial Q}{\partial a_i}=\sum_{\alpha}\left|\alpha\right|q_{\alpha}a^{\alpha}.$$

Como debe ser

$$Q-\lambda\sum_{i=0}^{n}a_i\frac{\partial Q}{\partial a_i}=0,$$

entonces

$$\sum_{\alpha}\left(1-\lambda\left|\alpha\right|\right)q_{\alpha}a^{\alpha}=0.$$

Luego, $q_{\alpha}=0$, o $\left(1-\lambda\left|\alpha\right|\right)=0$, de lo cual se deduce que Q es homogéneo de grado $\frac{1}{\lambda}$. La misma cuenta hecha con P completa la demostración.$\square$

Ahora estamos en condiciones de demostrar el

Teorema 12.3 *Si $R(a)$ es una función racional que satisface el sistema $\mathcal{A}-$hipergeométrico* (2)*, entonces existe $\lambda\in\mathbf{C}$ tal que*

$$R(a)=\lambda\frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

Demostración: Supongamos

$$R(a)=\frac{P(a)}{Q(a)},$$

con P y Q polinomios sin factores comunes en $\mathbf{C}[a_0, a_1, \cdots a_n]$. Entonces por el lema anterior ambos son homogéneos, con el mismo grado de homogeneidad. Luego, el abierto

$$\mathcal{U}^0 := \{a \in \mathbf{C}^n \ / \ Q(a) \neq 0\}$$

es homogéneo. Entonces se puede considerar el abierto no vacío (y también homogéneo)

$$\mathcal{U}' := \mathcal{U} \cap \mathcal{U}^0,$$

y se tiene que $R(a)$ es un elemento del espacio de funciones hipergeométricas sobre $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$.

El espacio $\mathcal{H}(\mathcal{U}')$ tiene dimensión a lo más n, por el Teorema 5.2, las funciones $X_1, X_2, \cdots, X_n$ están definidas y son linealmente independientes en $\mathcal{U}'$, luego también forman una base para este espacio. Por lo tanto, existen $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbf{C}$ tal que vale

$$R(a) = \lambda_1 X_1(a) + \lambda_2 X_2(a) + \cdots + \lambda_n X_n(a), \forall a \in \mathcal{U}'.$$

Como P y Q son homogéneos del mismo grado, podemos "extraer" a_n de ambos polinomios, y queda la siguiente identidad:

$$\frac{P(\frac{a_0}{a_n}, \frac{a_1}{a_n}, \cdots, \frac{a_{n-1}}{a_n}, 1)}{Q(\frac{a_0}{a_n}, \frac{a_1}{a_n}, \cdots, \frac{a_{n-1}}{a_n}, 1)} = \lambda_1 X_1(a) + \lambda_2 X_2(a) + \cdots + \lambda_n X_n(a), \forall a \in \mathcal{U}'.$$

Para cada $a \in \mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$, las funciones

$$X_1(a), X_2(a), \cdots, X_n(a)$$

son las raíces de la ecuación polinómica de grado n con coeficientes $a_0, a_1, \cdots, a_n$. Usando las "relaciones entre las raíces y los coeficientes" de (22), se obtienen las siguientes identidades en $\mathcal{U}'$:

$$\begin{array}{rcl} \frac{a_0}{a_n} & = & (-1)^n \prod\limits_{i=1}^{n} X_i(a), \\ \frac{a_1}{a_n} & = & (-1)^{n-1} \sum\limits_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} X_j(a), \\ & \vdots & \\ \frac{a_{n-1}}{a_n} & = & - \sum\limits_{i=1}^{n} X_i(a), \end{array}$$

funciones simétricas en $X_1, X_2, \cdots, X_n$. Haciendo esta sustitución, P y Q pueden escribirse como:

$$\frac{P(S(X\,(a)))}{Q(S(X\,(a)))} = \lambda_1 X_1\,(a) + \lambda_2 X_2\,(a) + \cdots + \lambda_n X_n\,(a)\,, \forall a \in \mathcal{U}',$$

con

$$S(x) := ((-1)^n . \prod_{i=1}^{n} x_i, (-1)^{n-1} . \sum_{i=1}^{n} \prod\nolimits_{j \neq i} x_j, \cdots, -\sum_{i=1}^{n} x_i, 1).$$

Pero entonces, la función racional en las variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$

$$\frac{P(S(x))}{Q(S(x))}$$

y el polinomio

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$$

coinciden en $\chi(\mathcal{U}')$, que es abierto ya que $\mathcal{U}'$ se encuentra en las condiciones de la demostración del lema 12.1. Luego, estas expresiones deben coincidir en $\mathbf{C}(x_1, \cdots x_n)$, el anillo de cocientes de polinomios en las variables $x_1, \ldots, x_n$. Como $\frac{P(S(x))}{Q(S(x))}$ es una función simétrica en $x_1, \cdots, x_n$, también debe serlo la forma lineal

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n.$$

Por lo tanto,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n,$$

llamando λ a este valor común, resulta

$$\frac{P(a)}{Q(a)} = \lambda\,(X_1\,(a) + X_2\,(a) + \cdots + X_n\,(a)) = -\lambda \frac{a_{n-1}}{a_n} . \square$$

Referencias

[1] B. Sturmfels: *Solving Algebraic Equations in Terms of A-Hypergeometric Series*, por aparecer en *8th. International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics, Minneapolis, June 1996.*

[2] I.M. Gel'fand, A.V. Zelevinsky y M.M. Kapranov: *Hypergeometric Functions and Toral Manifolds,* Functional Analysis and its Applications 23 (1989) 94-106.

[3] J.Mc Donald: *Fiber polytopes and fractional power series (1996)*, por aparecer en el *Journal of Pure and Applied Algebra.*

[4] D.Eisenbud: *Conmutative Algebra with a View Towards Algebraic Geometry*, *Graduate Texts in Mathematics,* Springer Verlag, New York, 1995

[5] R.Walker: *Algebraic Curves*, *Dover Publications,* INC, 1950

[6] E.Brieskorn, H.Knorrer: *Plane Algebraic Curves*, *Birkhauser,* 1986.