Cómo triangular Ecuaciones

Carlos D'Andrea
Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

1 Sistemas lineales

Uno de los temas clásicos del álgebra lineal elemental es el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales o de primer grado con varias incógnitas. Estos sistemas pueden presentarse de la manera siguiente:

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. , \tag{1}$$

donde m (el número de ecuaciones) y n (el número de incógnitas) son enteros positivos, las letras $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}, b_1, b_2, \ldots, b_m$ son números (racionales, reales o complejos) dados, y las incógnitas (o sea, las cantidades que hay que calcular) son $x_1, x_2, \ldots, x_n$. "Resolver" uno de tales sistemas quiere decir decidir si existen valores numéricos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que satisfacen simultáneamente las m igualdades de (1). En el caso en que la respuesta sea afirmativa, "resolver el sistema" también significará encontrar una descripción sencilla de las soluciones.

Ejemplos:

1. Consideremos el sistema

$$\left\{\begin{array}{rl} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 & = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 0 \end{array}\right. .$$

En este caso, $n = 4$ y $m = 3$. Observemos que las dos últimas igualdades no pueden satisfacerse nunca simultáneamente ya que, si bien la cantidad que aparece en el miembro izquierdo de ambas es la misma, en el miembro derecho aparecen números distintos. Luego, este sistema no tiene solución.

2. Sea
$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & = 0 \\ & & & & x_3 & = 0 \end{array}\right. .$$
Para resolver este sistema ($m = n = 3$), observemos primero que la última ecuación nos dice que -de existir alguna solución- x_3 debe ser necesariamente igual a cero. Con esa información, pasamos a la segunda ecuación, y nos queda
$$x_2 + x_3 = x_2 + 0 = 0,$$
con lo cual deducimos que x_2 también tiene que ser igual a cero. Ahora podemos "subir" a la primer ecuación, y con un razonamiento análogo concluir que, de haber una solución, x_1 tiene que valer cero. Por otro lado, es fácil comprobar que los valores $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ satisfacen las tres ecuaciones simultáneamente. Podemos decir entonces que hemos resuelto esta ecuación, ya que pudimos demostrar que tiene solución, que esa solución es única, y además la hemos encontrado.

   Vamos a profundizar sobre este tipo de sistemas en la próxima sección.

3. Consideremos
$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = 0 \\ x_1 & + & x_2 & & & = 0 \\ & & & & x_3 & = 0 \end{array}\right. .$$
En este caso (donde también $m = n = 3$), no podemos aplicar el método del inciso anterior, ya que saber que x_3 tiene que ser igual a cero no ayuda para resolver la segunda ecuacion. Es más, si reemplazamos x_3 por 0 en la primer igualdad, nos queda ésta exactamente igual a la segunda ecuación.

   Una observación útil en este caso es que la primer ecuación es exactamente la suma de las otras dos. Luego, las soluciones de este sistema son en realidad las soluciones de
$$\left\{\begin{array}{cccccc} x_1 & + & x_2 & & & = 0 \\ & & & & x_3 & = 0 \end{array}\right. .$$
Y este sistema es más sencillo de resolver, ya que de la primer ecuación se deduce que x_1 y x_2 son números opuestos. Además, esa es la única condición que tienen que cumplir x_1 y x_2 para que el sistema tenga solución. Como hay infinitas parejas de números opuestos, esto implica que el sistema tiene infinitas soluciones y que todas las soluciones son de la forma
$$x_1 = t,\ x_2 = -t,\ x_3 = 0,$$
donde t es un número cualquiera. Esta es una de las descripciones sencillas de las soluciones a la que se hizo referencia antes.

2 triangulación de sistemas lineales

Existen diferentes métodos para resolver sistemas lineales. Uno de ellos es el llamado "método de triangulación o" "de Gauss", y es en el que nos vamos a concentrar en esta sección. Este método se basa en el hecho siguiente: los sistemas que tienen la forma (triangular) siguiente:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} A_{11}x_1 & + & A_{12}x_2 & + & A_{13}x_3 & + & \cdots & + & A_{1n}x_n & = & B_1 \\ & & A_{22}x_2 & + & A_{23}x_3 & + & \cdots & + & A_{2n}x_n & = & B_2 \\ & & & & A_{33}x_3 & + & \cdots & + & A_{3n}x_n & = & B_3 \\ & & & & & & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}\right. \tag{2}$$

(como el sistema del segundo ejemplo en la sección anterior) son obviamente más fáciles de resolver que los generales como (1). El método consiste en "transformar" cualquier sistema lineal de ecuaciones en uno que esté triangulado, de tal manera que las soluciones de ambos sistemas coincidan.

Por "transformar" entendemos realizar operaciones que llamaremos "elementales" sobre un sistema de ecuaciones de tal manera que, después de aplicar estas operaciones, la presentación del sistema probablemente haya cambiado, pero no así las soluciones del mismo (es decir, si el sistema original no tiene soluciones, el sistema transformado tampoco las tiene; y si el sistema original se puede resolver, el transformado también, y tiene exactamente las mismas soluciones que el original).

A continuación vamos a dar una lista de transformaciones elementales, y queda en manos del lector verificar que -efectivamente- estas transformaciones no alteran la naturaleza de las soluciones de un sistema:

- Intercambiar dos ecuaciones del mismo sistema;
- Sumar a una ecuación un múltiplo de otra ecuación del sistema.

En cualquier libro de álgebra lineal elemental se puede encontrar una demostración de que todo sistema se puede triangular utilizando estas operaciones elementales.

- Veamos un ejemplo de triangulación. Consideremos el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{ll} x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 & = 1 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 & = 0 \end{array}\right. . \tag{3}$$

  A continuación enumeraremos una serie de operaciones elementales que nos llevarán a triangular este sistema, y listaremos también los sistemas equivalentes que van apareciendo.

  1. A la segunda ecuación le sumamos dos veces la primer ecuación:

$$\left\{\begin{array}{rl} x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 & = 1 \\ 7x_2 + 9x_3 + 11x_4 & = 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 & = 0 \end{array}\right. .$$

2. A la tercer ecuación le sumamos -1 veces la primer ecuación:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 & = 1 \\ \quad 7x_2 + 9x_3 + 11x_4 & = 6 \\ \quad -x_2 - 3x_3 - 6x_4 & = -1 \end{cases}.$$

3. Finalmente, a la última ecuación le sumamos $\frac{1}{7}$ de la segunda ecuación, y el sistema queda triangulado de la manera siguiente:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 & = 1 \\ \quad 7x_2 + 9x_3 + 11x_4 & = 6 \\ \quad -\frac{12}{7}x_3 - \frac{31}{7}x_4 & = -\frac{1}{7} \end{cases}.$$

En el sistema triangulado es fácil ver que hay infinitas soluciones, ya que para cada valor que uno le asigne a x_4 (y hay infinitos de estos valores), en la última ecuación del sistema se podrá despejar un valor de x_3 que resuelva la última igualdad. Con estos valores fijos de x_3 y x_4, se puede encontrar un valor de x_2 que verifique la segunda igualdad, y de la misma manera encontrar el valor de x_1 que satisfaga la primer ecuación.

2.1 Triangulación general

El método de Gauss mencionado anteriormente, reemplaza un sistema lineal por otro equivalente con la misma cantidad de ecuaciones. Es fácil ver (aunque por el momento no queda clara la utilidad) que si uno agrega a las ecuaciones iniciales las nuevas ecuaciones que provienen de realizar operaciones elementales, el sistema resultante sigue teniendo las mismas soluciones que el original, sigue siendo tan sencillo de resolver como el sistema triangulado, aunque obviamente tiene más ecuaciones que al principio.
Por ejemplo, un sistema equivalente a (3) es el siguiente:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 & = 1 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 & = 0 \\ \quad 7x_2 + 9x_3 + 11x_4 & = 4 \\ \quad -x_2 - 3x_3 - 6x_4 & = -1 \\ \quad -\frac{12}{7}x_3 - \frac{31}{7}x_4 & = -\frac{1}{7} \end{cases}.$$

Veremos más adelante que este tipo de triangulación va a permitirnos resolver con éxito el caso de sistemas no lineales.

3 Sistemas polinomiales

Consideremos un sistema de m ecuaciones en n variables más general:

$$\left\{\begin{array}{lcl} p_1(x_1,x_2,\dots,x_n) & = & 0 \\ p_2(x_1,x_2,\dots,x_n) & = & 0 \\ & \vdots & \\ p_m(x_1,x_2,\dots,x_n) & = & 0 \end{array}\right., \tag{4}$$

donde cada $p_i(x_1,x_2,\dots,x_n)$ es ahora un polinomio en las variables $x_1,x_2,\dots,x_n$ no necesariamente de grado 1 como en el caso anterior.
Ejemplos de estos sistemas aparecen a menudo en varias ramas de la matemática, incluso a nivel muy elemental. Veamos algunos de ellos.

- Queremos saber si el número 1998 se puede escribir en base 2 con menos de 15 dígitos. Este enunciado puede plantearse con el siguiente sistema de 16 ecuaciones con 15 incógnitas:
$$\left\{\begin{array}{ccl} x_1^2-x_1 & = & 0 \\ x_2^2-x_2 & = & 0 \\ & \vdots & \\ x_{15}^2-x_{15} & = & 0 \\ 1998-\sum_{i=1}^{15}2^{i-1}x_i & = & 0. \end{array}\right.,$$

- Queremos encontrar la ecuación "implícita" de la curva $x(t)=\frac{t}{1+t}$, $y(t)=\frac{1}{1-t}$; es decir, buscamos una función $F(X,Y)$ tal que la curva se pueda describir además como $\{(X,Y):\ F(X,Y)=0\}$. Para ello, hay que buscar las soluciones "en X y en Y" del siguiente sistema:
$$\left\{\begin{array}{lcl} (1+t)X-t & = & 0 \\ (1-t)Y-1 & = & 0. \end{array}\right. \tag{5}$$

- Fijados seis números A,B,C,D,E,F, queremos ver si podemos encontrar n puntos $(p_1,q_1),(p_2,q_2),\dots,(p_n,q_n)$ en la cónica de ecuación
$$AX^2+BXY+CY^2+DX+EY+F=0.$$
Para ello, hay que ver si el siguiente sistema donde las incógnitas son $p_1,q_1,\dots,p_n,q_n$ tiene o no solución
$$\left\{\begin{array}{ccc} Ap_1^2+Bp_1q_1+Cq_1^2+Dp_1+Eq_1+F & = & 0 \\ Ap_2^2+Bp_2q_2+Cq_2^2+Dp_2+Eq_2+F & = & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ Ap_n^2+Bp_nq_n+Cq_n^2+Dp_n+Eq_n+F & = & 0. \end{array}\right.$$

Tal como en el caso lineal, "resolver" un sistema como (4) significará en principio decidir si existen valores numéricos $x_1,x_2,\dots,x_n$ que satisfacen cada una de las m ecuaciones.

El inconveniente se presentará cuando intentemos dar una descripción "sencilla" de las soluciones, dado que, sistemas como (4) en principio engloban ecuaciones genéricas en una variable

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

para las cuales no hay una expresión sencilla de las soluciones, al menos en términos de los coeficientes del polinomio. Tampoco es posible en este caso "triangular" cualquier sistema polinomial y presentarlo como (4). Por ejemplo, es fácil ver que no se puede triangular el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 x_2 & = & 0 \\ x_1 x_3 & = & 0 \\ x_2 x_3 & = & 0. \end{array} \right. \tag{6}$$

Veremos enseguida que, sin embargo, se puede triangular "generalmente" un sistema, tal como lo vimos en la sección 2.1.

4 Triangulación de sistemas polinomiales

Comencemos "ordenando" los monomios en n variables: un monomio $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n}$ se dirá menor (lexicográficamente) que otro distinto de la forma $x_1^{b_1} x_2^{b_2} \ldots x_n^{b_n}$ si alguno de los hechos siguientes se verifica:

- $a_1 < b_1$,
- $a_1 = b_1$ y $a_2 < b_2$,
- $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ y $a_3 < b_3$,

  ...
- $a_1 = b_1, \ldots, a_{n-1} = b_{n-1}$ y $a_n < b_n$.

En caso contrario, se dirá mayor (lexicográficamente).
Por ejemplo, $x_1^2 x_2^2 x_3^9 < x_1^2 x_2^3 x_3^7$.
Queremos definir el análogo de "operación elemental entre ecuaciones lineales" para polinomios. Para ello, definimos lo siguiente: dado un polinomio $p(x_1, \ldots, x_n)$, denotaremos con $LT(p)$ el término en el que aparece el monomio más grande (lexicográficamente) dentro del desarrollo de p. Por ejemplo, $LT(5x_1^2 x_2^2 x_3^7 - 7x_1^2 x_2^3 x_3^9) = -7x_1^2 x_2^3 x_3^9$.
Como los sistemas que estamos estudiando están todos igualados a cero, entonces alcanza con definir operaciones "elementales" entre polinomios y ya no entre ecuaciones. Con ese espíritu, definimos el *S-polinomio* de p y q como el polinomio que se obtiene cancelando los términos principales:

$$S(p,q) = \frac{x^\gamma}{LT(p)}\, p - \frac{x^\gamma}{LT(q)}\, q,$$

donde γ es el mínimo común múltiplo entre los monomios más grandes (lexicográficamente) de p y q.

Por ejemplo, si $p(x_1, x_2) = x_1^5 - x_2^2$ y $q(x_1, x_2) = x_1^4 x_2 + 1$, entonces

$$S(p,q) = \frac{x_1^5 x_2}{x_1^5} p - \frac{x_1^5 x_2}{x_1^4 x_2} q = (x_1^5 x_2 - x_2^3) - (x_1^5 x_2 + x_1) = -x_2^3 - x_1.$$

El lector puede verificar fácilmente que, en el caso en que los polinomios p y q son lineales, $S(p,q)$ es en realidad una "operación elemental" entre estas dos expresiones. Por otro lado, está claro que los sistemas

$$\left\{\begin{array}{rcl} p_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & 0 \\ p_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & 0 \\ & \vdots & \\ p_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{y} \quad \left\{\begin{array}{rcl} p_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & 0 \\ p_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & 0 \\ & \vdots & \\ p_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & 0 \\ S(p_i, p_j) & = & 0 \end{array}\right.$$

tienen las mismas soluciones, y probablemente hemos agregado alguna ecuación con una variable menos.

Esto nos lleva a enunciar el siguiente
Algoritmo de Triangulación:
Dado un sistema como (4), agregarle las siguientes ecuaciones siempre y cuando no den idénticamente cero o alguna expresión que ya se encuentra en el sistema:

1. $S(p_i, p_j) = 0$ para todos los índices posibles i, j.

2. Volver a considerar el sistema ampliado, y agregar nuevamente $S(p,q) = 0$, donde p, q se varían ahora entre todas las posibles ecuaciones del nuevo sistema.

3. Repetir el paso anterior.

Ejemplos:

1. Consideremos el sistema dado en (6). Si hacemos $p_1 = x_1 x_2$, $p_2 = x_1 x_3$, $p_3 = x_2 x_3$. Al aplicar el algoritmo a este sistema, nos queda

   $S(p_1, p_2) = x_3 p_1 - x_2 p_2 = 0$, $S(p_1, p_3) = x_3 p_1 - x_1 p_3 = 0$, $S(p_2, p_3) = x_2 p_2 - x_1 p_3 = 0$,

   así que el algoritmo de triangulación no agrega nada nuevo en este caso.

2. Para el sistema que modela el problema de implicitar la curva dado en (5), como en el algoritmo de triangulación las variables están enumeradas $(x_1, x_2, \ldots)$, hacemos aquí la convención siguiente: la primer variable va a ser t, la segunda será X y la tercera Y. Luego, se tiene lo siguiente:

   (a) $p_1 = (1+t)X - t = tX + X - t$, $p_2 = (1-t)Y - 1 = -tY + Y - 1$.

   (b) En el primer paso del algoritmo, hay que calcular $S(p_1, p_2) = 2XY - tY - X$. A esta ecuación la llamamos p_3, y la agregamos al sistema.

(c) Ahora hay que calcular
- $p_4 = S(p_1, p_3) = Yp_1 + Xp_3 = XY - tY + 2X^2Y - X^2$,
- $p_5 = S(p_2, p_3) = p_2 - p_3 = Y - 1 - 2XY + X$

(No hace falta volver a calcular $S(p_1, p_2)$, porque ya fue calculado previamente).

(d) Ahora hay que volver a aplicar la triangulación sobre p_1, p_2, p_3, p_4 y p_5, y así sucesivamente.

En principio no queda claro que este procedimiento termine alguna vez. Lo sorprendente es que se tiene el siguiente resultado, cuya demostración puede consultarse en alguna de las referencias de este trabajo, en el contexto de una teoría matemática denominada "Bases de Gröbner para polinomios":

Teorema: Dado un sistema como (4), aplicando el algoritmo de triangulación, se pueden conseguir ecuaciones de la forma

$$q_2(x_2, x_3, \ldots, x_n),\ q_3(x_3, \ldots, x_n), \ldots, q_n(x_n)$$

que, agregadas al sistema original, forman una triangulación general.

Ejemplos:

1. En el sistema (6), se puede tomar $q_2 = p_3 = x_2x_3$, y $q_3 = 0$.
2. En (5) se tiene $q_2 = p_5 = Y - 1 - 2XY + X$, y $q_3 = 0$. Se puede comprobar fácilmente que q_2 es precisamente la implicitación de la curva.
3. Queremos calcular todas las ternas de números reales que satisfacen el siguiente sistema

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2 + x_3 - 1 &= 0 \\ x_1 + x_2^2 + x_3 - 1 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3^2 - 1 &= 0 \end{cases}$$

(Certamen Zonal de la Olimpíada Matemática Argentina, 1996).

Utilizando el algoritmo de triangulación, conseguimos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2 + x_3 - 1 &= 0 \\ x_1 + x_2^2 + x_3 - 1 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3^2 - 1 &= 0 \\ x_2^2 - x_2 - x_3^2 + x_3 &= 0 \\ x_3^6 - 4x_3^4 + 4x_3^3 - x_3^2 &= 0. \end{cases}$$

Los ceros del último polinomio son $0, 1, -1 + \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2}$. Reemplazando estos ceros en el polinomio anterior, se obtienen los posibles valores de x_2. Finalmente, usando las ecuaciones iniciales que dependen de x_1 es posible encontrar las cinco soluciones del sistema:

$$(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (-1+\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}), (-1-\sqrt{2}, -1-\sqrt{2}, -1-\sqrt{2}).$$

Referencias

[AL] W. Adams y P. Loustaunau. *An Introduction to Gröbner Bases.* Volume 3 / GSM Series, Springer–Verlag, 1994.

[BW] T. Becker y V. Weispfennin (in cooperation with H. Kredel). *Gröbner Bases.* Graduate Texts in Mathematics 141, Springer–Verlag, 1993.

[CLO] D. Cox, J. Little y D. O'Shea. *Ideals, Varieties and Algorithms.* Undergraduate Texts in Mathematics, Springer–Verlag, 1992. *[*Eis]Eis D. Eisenbud. *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry.* Graduate Texts in Mathematics 150, Springer–Verlag, 1995.

Dirección Postal: Pabellón I, Ciudad Universitaria, 1428 Buenos Aires (Argentina).
e-mail:`cdandrea@dm.uba.ar`