

# ¿Se puede inventar el azar?

03/12/20



<https://kahoot.it/> PIN: 8934441



UNIVERSITAT DE  
BARCELONA

Carlos D'Andrea  
<http://www.ub.edu/arcades/cdandrea.html>



FUNDAPROMAT  
Fundación Panameña para la Promoción de  
las Matemáticas

# 100 ceros y unos “al azar”



1	0	0	0	1	1	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	0	1	1	1	0	0

Tabla 1

1	0	0	0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0	0	1	1	0
0	0	0	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0	1	1	1	1

Tabla 2



# ¡Una de las tablas es “falsa”!



1	0	0	0	1	1	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	0	1	1	1	0	0

1	0	0	0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0	0	1	1	0
0	0	0	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0	1	1	1	1

# ¿Cuál es la tabla falsa?



Tabla 1

1	0	0	0	1	1	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	0	1	1	1	0	0

Tabla 2

1	0	0	0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0	0	1	1	0
0	0	0	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0	1	1	1	1

# Votemos

<https://kahoot.it/> PIN: 8934441



Tabla 2

1	0	0	0	1	1	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	0	1	1	1	0	0



1	0	0	0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0	0	1	1	0
0	0	0	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0	1	1	1	1

# Y la tabla más probable es...



Tabla 2

1	0	0	0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0	0	1	1	0
0	0	0	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0	1	1	1	1

# Analicemos...



1	0	0	0	1	1	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	0	1	1	1	0	0

1	0	0	0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0	0	1	1	0
0	0	0	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0	1	1	1	1



# Analicemos...

1	0	0	0	1	1	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	0	1	1	1	0	0

1	0	0	0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0	0	1	1	0
0	0	0	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0	1	1	1	1



# Analicemos...

1	0	0	0	1	1	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	0	1	1	1	0	0

49 ceros - 51 unos

1	0	0	0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0	0	1	1	0
0	0	0	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0	1	1	1	1

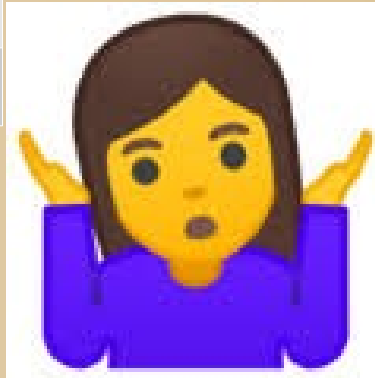
50 ceros - 50 unos

# Y ahora... qué?



1	0	0	0	1	1	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	0	1	1	1	0	0

1	0	0	0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0	0	1	1	0
0	0	0	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0	1	1	1	1



# “Rachas”



1	0	0	0	1	1	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	0	1	1	1	0	0

1	0	0	0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0	0	1	1	0
0	0	0	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0	1	1	1	1



# “Rachas”



1	0	0	0	1	1	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	0	1	1	1	0	0

1 3 2 2 1 1 1 1 1 1 2 1 2 3 1 1 3 2 2 2  
1 2 3 1 1 2 1 3 2 2 4 1 1 2 1 2 2 1 1 3  
3 2 1 2 2 1 1 1 1 2 1 3 2 1 2 1 3 2

1	0	0	0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0	0	1	1	0
0	0	0	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0	1	1	1	1

1 3 1 1 2 3 3 3 2 6 1 1 4 1 2 3 1 4  
5 2 2 3 1 6 2 1 4 1 5 2 2 1 3 1 2 3  
1 2 1 1 1 2 4



# ¿Cuál es más probable?

1	0	0	0	1	1	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	0	1	1	1	0	0



1	0	0	0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0	0	1	1	0
0	0	0	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0	1	1	1	1

1 3 2 2 1 1 1 1 1 2 1 2 3  
 1 1 3 2 2 2 1 2 3 1 1 2 1 3  
 2 2 4 1 1 2 1 2 2 1 1 3 3 2  
 1 2 2 1 1 1 1 2 1 3 2 1 2 1  
 3 2

1 3 1 1 2 3 3 3 2 6 1 1  
 4 1 2 3 1 4 5 2 2 3 1 6  
 2 1 4 1 5 2 2 1 3 1 2 3  
 1 2 1 1 1 2 4

# ¿6 ceros seguidos...?



1	0	0	0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0	0	1	1	0
0	0	0	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0	1	1	1	1

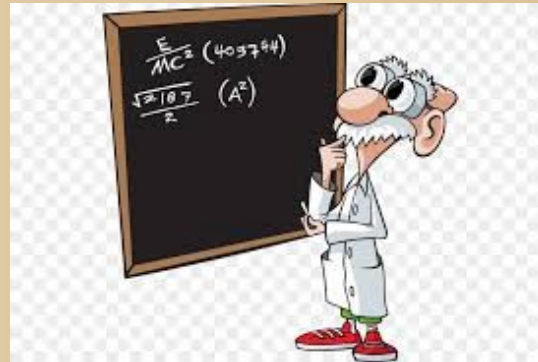
**1 3 1 1 2 3 3 3 2 6 1 1**  
**4 1 2 3 1 4 5 2 2 3 1 6**  
**2 1 4 1 5 2 2 1 3 1 2 3**  
**1 2 1 1 1 2 4**

¿Probabilidad de 6 o más  
ceros seguidos?



¿Algún/a  
matemático/a en  
la sala?

# Y la probabilidad es....



21 632 997 006 968 743 673 674 929 893  
39 614 081 257 132 168 796 771 975 168

54,61%





# Probabilidad de 5 (o más) unos seguidos...



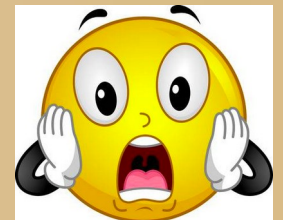
1	0	0	0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0	0	1	1	0
0	0	0	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0	1	1	1	1

64 183 494 979 494 598 846 972 364 275  

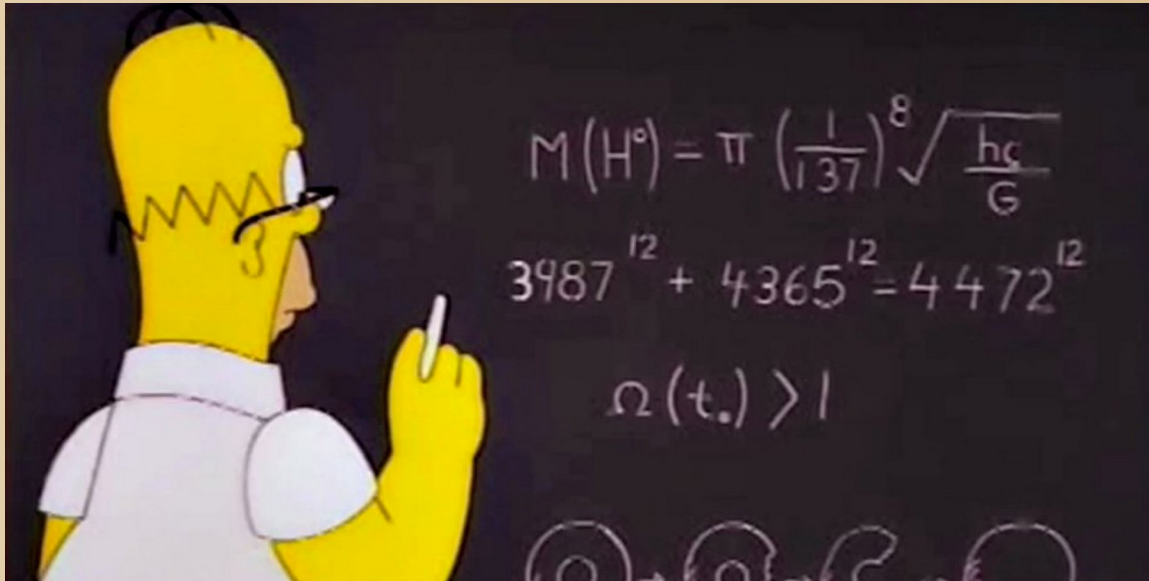
---

79 228 162 514 264 337 593 543 950 336

81,01%



# ¿Cómo se calculan esas probabilidades?



**$C(N)$  = cantidad de tablas de  $N$  números con 5 unos seguidos**

$$C(0)=0$$

$$C(1)=0$$

$$C(2)=0$$

$$C(3)=0$$

$$C(4)=0$$

$$C(5)=1$$

# ¿N>5?



$$2 C(N-1)$$

$$2^{N-6} \cdot C(N-6)$$

0/1	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*

0

1	1	1	1	1	0	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	x	x	x

$$C(N) = 2C(N-1) + 2^{N-6} \cdot C(N-6)$$

# Calculamos...



$$C(7) = 8$$

$$C(10) = 112$$

$$C(20) = 262008$$

$$C(40) = 514482005856$$

$$C(60) = 717791100458652843$$

$$C(80) = 885286705422797981470172$$

$$C(100) = 1026935919671913581551557828400$$

$$P(7) = 0,0625$$

$$P(10) = 0,1093$$

$$P(20) = 0,2498$$

$$P(40) = 0,4679$$

$$P(60) = 0,6225$$

$$P(80) = 0,7322$$

$$P(100) = 0,8101$$

# ¡Crecimiento Exponencial!



**$S(N)$  = probabilidad de que NO  
haya una racha de 5 unos**

$$C(N) = 2C(N-1) - 2^{(N-6)} C(N-6)$$

$$S(N) = S(N-1) - \frac{1}{2^6} S(N-6)$$

$$S(N) = a_1 x_1^N + a_2 x_2^N + a_3 x_3^N + a_4 x_4^N + a_5 x_5^N + a_6 x_6^N$$

$$(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_6) = x^6 - x^5 + \frac{1}{2^6}$$

**todos estos números (complejos) son “más chicos”  
que 2**

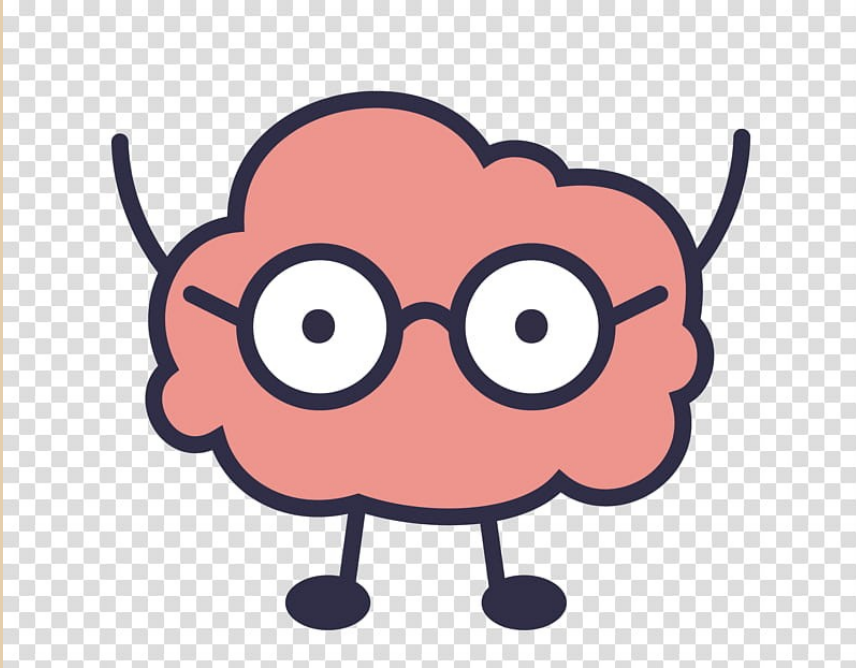
$$\lim_{N \rightarrow \infty} S(N) = 0$$

¿Por qué nos parece raro una racha de 5 unos en 100?



**Jacob Bernoulli (1655-1705)**

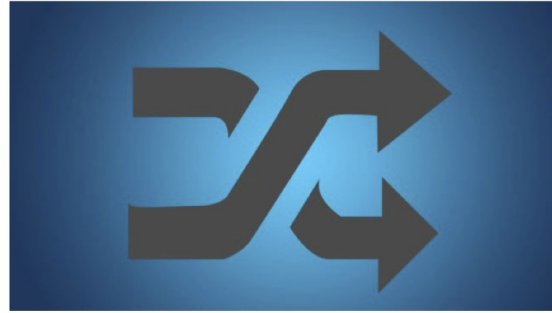
# Psicología humana...



Sobreestimamos  
la repetición en el  
azar



# ¿“Azar humano”?

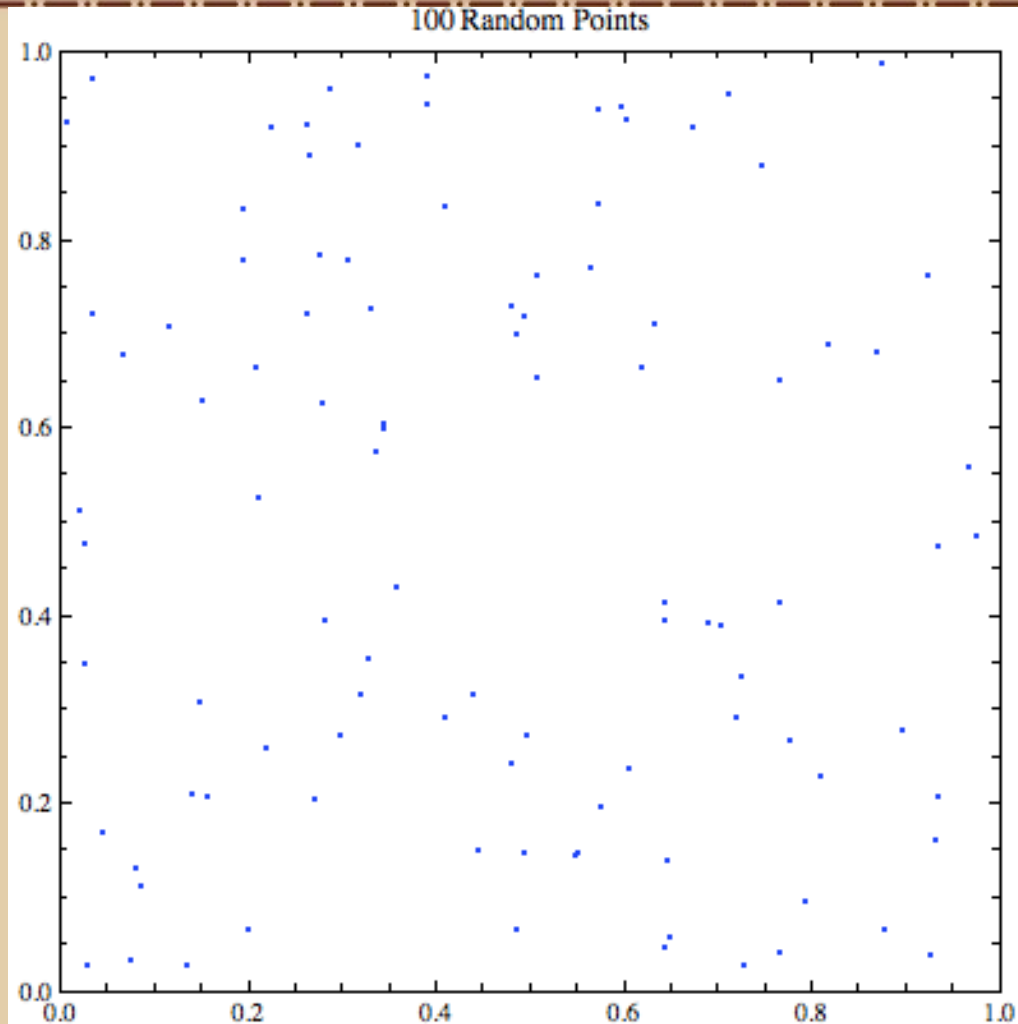


Mar 1

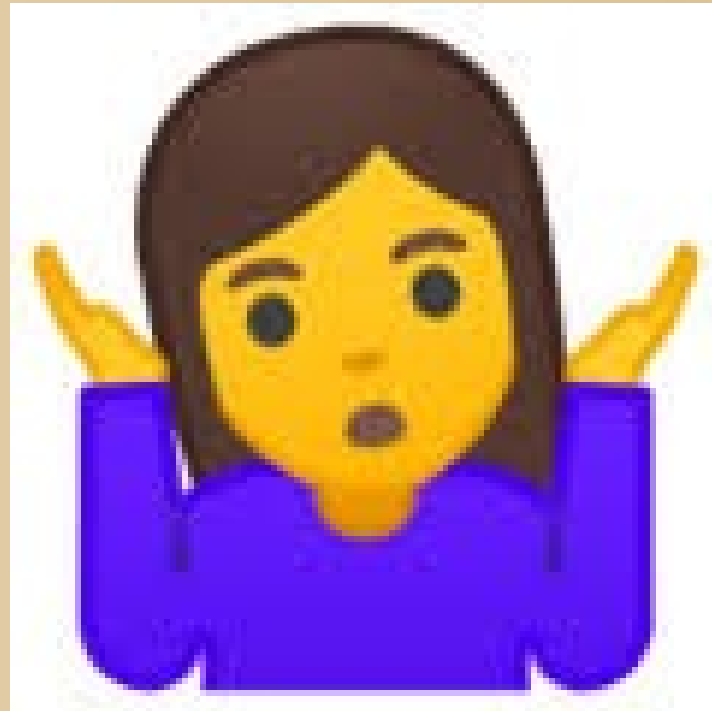
Apple Made Their  
Shuffle Feature  
Less Random, to  
Make It More  
Random



# Algo verdaderamente “Random”



¿Sirve para algo todo esto?



# Fraude I

Portafolio



SECCIONES

ECONOMÍA

FINANZAS

GOBIERNO

INFRAESTRUCTURA

EMPLEO

IMPUESTOS

## Detección de fraude electoral

La aproximación al problema de detección de fraude electoral ha sido utilizada para Bangladesh, Ecuador, Venezuela, Puerto Rico, entre otros.

f FACEBOOK

✉ ENVIAR

t TWITTER

in LINKED IN

POR: JUNIO 09 DE 2010 - 05:00 A.M.

La aproximación al problema de detección de fraude electoral ha sido utilizada para analizar elecciones en Estados Unidos, México, Rusia, Bangladesh, Venezuela, Puerto Rico, Nicaragua, Armenia, Canadá, Suecia, y Nigeria.

En 1881, el astrónomo Simon Newcomb notó que las páginas de los libros de logaritmos -para aquellos que aún recuerdan este tipo de libros hoy por las calculadoras científicas modernas- tenían un mayor desgaste a

# Fraude II

**DIRECTO** RTVE cambia el debate al martes, el mismo día que anunció Atresmedia

CONCURSO POLÉMICO

## La fiscalía detecta anomalías en las pruebas a policía de Badalona

A pesar de las sospechas, archiva la denuncia al no poder acreditar el delito

Los candidatos que sacaron mejor nota tienen familiares en la Guardia Urbana

**J. G. ALBALAT**  
**BARCELONA**

Martes, 19/05/2015 | Actualizado a las 17:18 CEST



0

Existen sospechas, indicios, pero no se ha podido acreditar la comisión de un delito de tráfico de influencias o prevaricación (dictar una resolución injusta a sabiendas) en las oposiciones que se celebraron en el 2014 para acceder a 12 plazas de la Guardia Urbana de Badalona. La Fiscalía de Barcelona ha acordado ahora, tras meses de pesquisas, archivar la investigación abierta a raíz de la denuncia presentada por varios aspirantes que, tras enfrentarse a un cuestionario atípico por las preguntas que contenía, descubrieron que seis candidatos habían obtenido unas calificaciones excesivamente altas.

# Reportes falsos

## A Method for the Detection of Fake Reviews Based on Temporal Features of Reviews and Comments

Publisher: IEEE

Cite This

PDF

Wenqian Liu ; Jingsha He; Song Han; Fangbo Cai; Zhenning Yang; Nafei Zhu [All Authors](#)

362  
Full  
Text Views



### Abstract

#### Document Sections

1. Introduction
2. Related Work

### Abstract:

Online reviews and comments after product sales have become very important for making buying and selling decisions. Fake reviews will affect such decisions due to deceptive information, leading to financial losses for the consumers. Identification of fake reviews has thus received a great deal of attention in recent years. However, most websites have only focused on dealing with problematic reviews and comments. Amazon and Yelp would only remove possible fake reviews without

# Algo más elemental...



**¿Cuál es la probabilidad de que 2 personas en este webinar coincida en (día,mes) de cumpleaños?**

# Actividad lúdica

**Que cada uno escriba en  
el chat día-mes de su  
cumpleaños**



**Carlos: 10-mayo**

# ¿Cómo se calcula?

$$A(N) = \frac{364 \cdot 363 \dots (365 - N + 1)}{365^{(N-1)}}$$

$$A(2) = 0,99726$$

$$A(10) = 0,88352$$

$$A(20) = 0,58562$$

$$A(30) = 0,29368$$

$$A(50) = 0,02962$$

$$A(75) = 0,00028$$



# ¡Esto da un método para detectar fraude!

## Ataque de cumpleaños

Un **ataque de cumpleaños** (o, en [inglés](#), *birthday attack*) es un tipo de ataque [criptográfico](#) que se basa en la [matemática](#) detrás de la [paradoja del cumpleaños](#), haciendo uso de una [situación de compromiso espacio-tiempo](#) informática. Concretamente, si una función matemática produce  $H$  resultados diferentes igualmente probables y  $H$  es lo suficientemente grande, entonces, después de evaluar la función sobre  $1.2\sqrt{H}$  argumentos distintos, se espera encontrar un par de argumentos  $x_1$  y  $x_2$  diferentes de manera tal que  $f(x_1) = f(x_2)$ , hecho conocido como una [colisión](#).

**Índice** [\[ocultar\]](#)

- 1 [La matemática](#)
- 2 [Ejemplo](#)
- 3 [Véase también](#)
- 4 [Referencias](#)
- 5 [Enlaces externos](#)

### La matemática [\[editar\]](#)

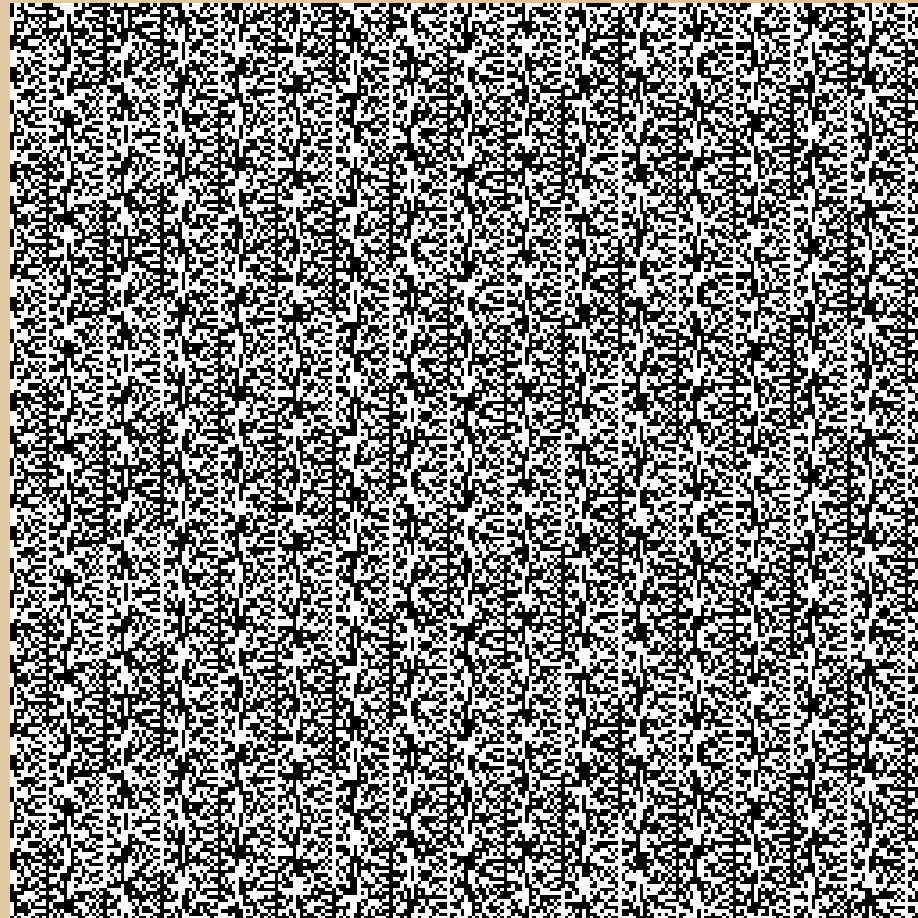
Para demostrar el resultado anterior, comenzamos con el desarrollo en [series de Taylor](#) de la probabilidad de que dos personas cumplan los años en el mismo día. En este caso, reemplazamos el número de días en un año con el número de resultados únicos,  $H$ :

$$p(n) = 1 - \bar{p}(n) \approx 1 - e^{-(n(n-1))/2 \cdot H} \approx 1 - e^{-n^2/2 \cdot H},$$

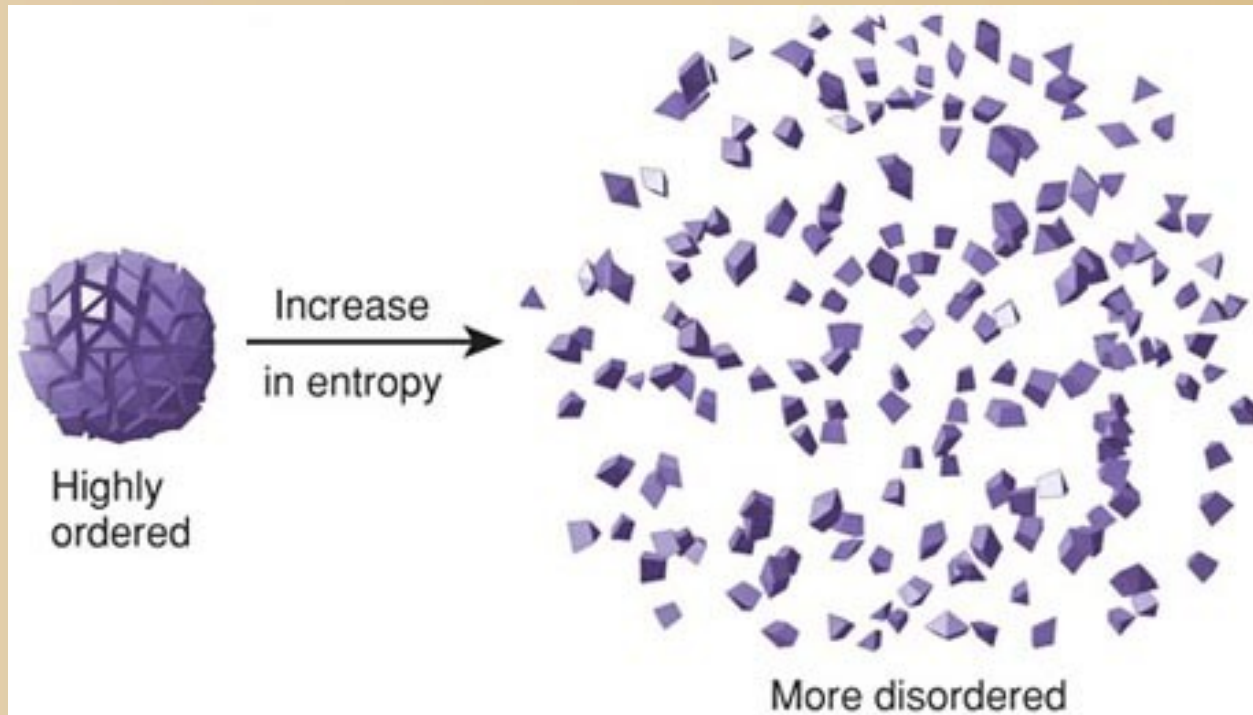
donde  $n$  es el número de intentos para una colisión. Invertiendo esta expresión,

$$n(p) \approx \sqrt{2 \cdot H \cdot \ln\left(\frac{1}{1-p}\right)},$$

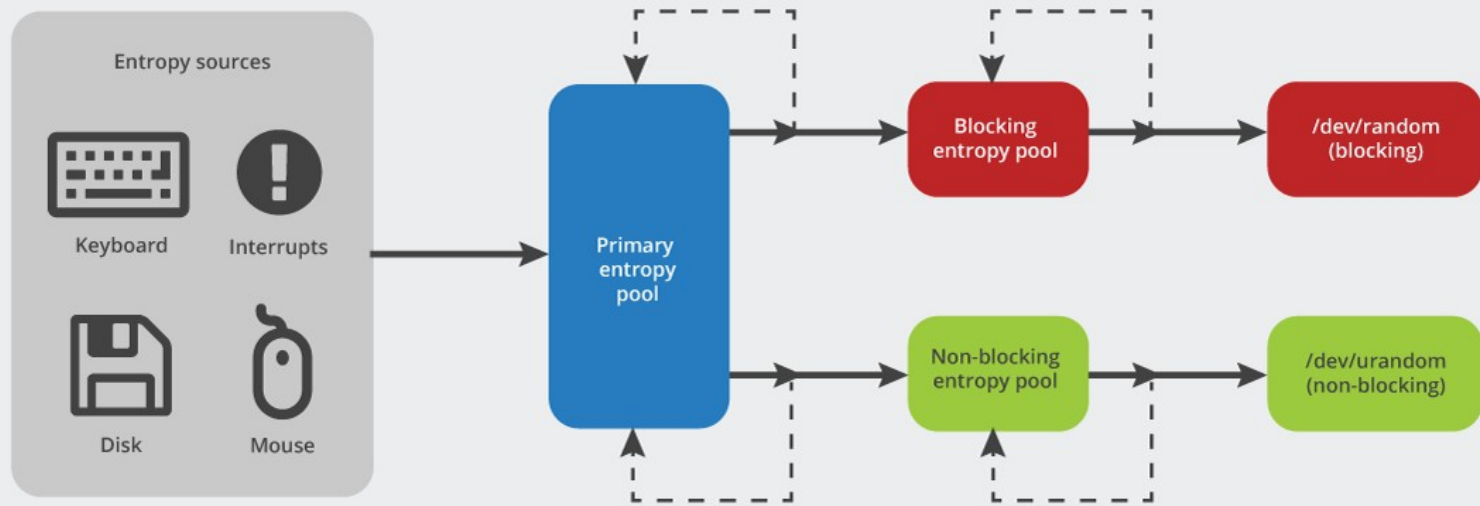
¿Se puede “inventar” el azar?



# La física nos ayuda



# ¡Con el teclado y el mouse!



# Otras fuentes de entropía...



# Otras fuentes de entropía...



✓ ventilador del ordenador

# Otras fuentes de entropía...



- ✓ ventilador del ordenador
- ✓ ruido ambiente

# Otras fuentes de entropía...



- ✓ ventilador del ordenador
- ✓ ruido ambiente
- ✓ radioactividad

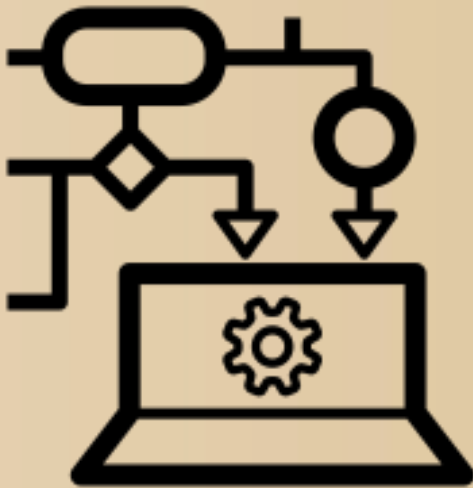


# Otras fuentes de entropía...



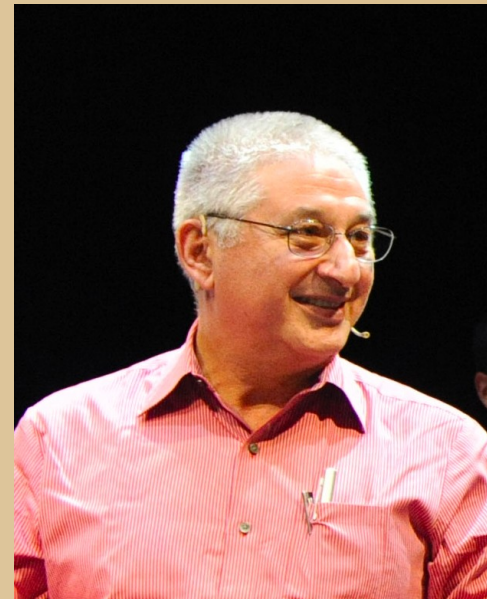
- ✓ ventilador del ordenador
- ✓ ruido ambiente
- ✓ radioactividad
- ✓ ruido “espacial”

¡El “azar humano” también es importante!



Aprender a predecir reacciones “humanas” es MUY importante en Inteligencia Artificial Aprendizaje Automático

# Para acabar... créditos



**GRAPES**

Learning, processing and optimising shapes

¡y eso es todo amig@s!



<http://www.ub.edu/arcades/cdandrea.html>



UNIVERSITAT DE  
BARCELONA

Carlos D'Andrea



FUNDAPROMAT  
Fundación Panameña para la Promoción de  
las Matemáticas