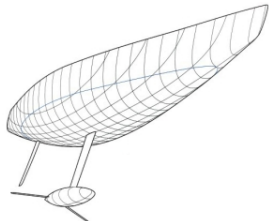


Ideales de curvas móviles y su interacción con el diseño asistido por computadoras

Carlos D'Andrea

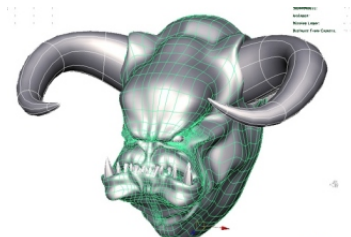
28 de setiembre 2015



From Wikiversity

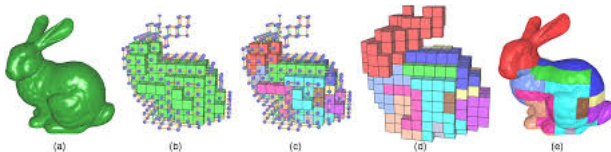
From Wikiversity

Computer-aided geometric design deals with the mathematical description of shape for use in computer graphics, numerical analysis, approximation theory, data structures, and computer algebra.



From Wikiversity

While this field may be mathematical in nature, it is specifically geared toward use in computer science and in engineering fields, making it a field that stretches across several disciplines.



Concepts

Concepts

- Primitives (lines, points, vectors, etc.)

Concepts

- Primitives (lines, points, vectors, etc.)
- Bézier Curves

Concepts

- Primitives (lines, points, vectors, etc.)
- Bézier Curves
- Power and Bernstein polynomials

Concepts

- Primitives (lines, points, vectors, etc.)
- Bézier Curves
- Power and Bernstein polynomials
- B-splines/NURBS

Concepts

- Primitives (lines, points, vectors, etc.)
- Bézier Curves
- Power and Bernstein polynomials
- B-splines/NURBS
- Algebraic Geometry

Concepts

- Primitives (lines, points, vectors, etc.)
- Bézier Curves
- Power and Bernstein polynomials
- B-splines/NURBS
- Algebraic Geometry
- Free-form Deformation

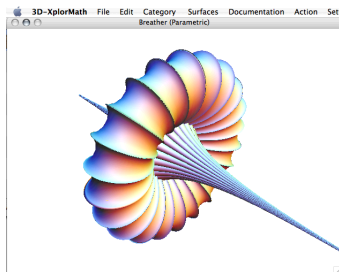
Concepts

- Primitives (lines, points, vectors, etc.)
- Bézier Curves
- Power and Bernstein polynomials
- B-splines/NURBS
- Algebraic Geometry
- Free-form Deformation
- Tensor-product surfaces

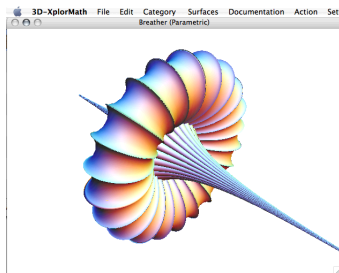
Concepts

- Primitives (lines, points, vectors, etc.)
- Bézier Curves
- Power and Bernstein polynomials
- B-splines/NURBS
- Algebraic Geometry
- Free-form Deformation
- Tensor-product surfaces
- Interpolation

curvas y superficies “en pantalla”

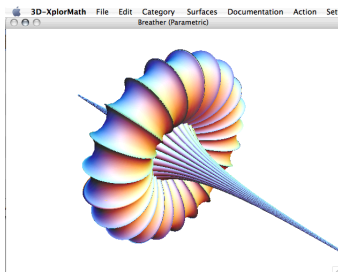


curvas y superficies “en pantalla”



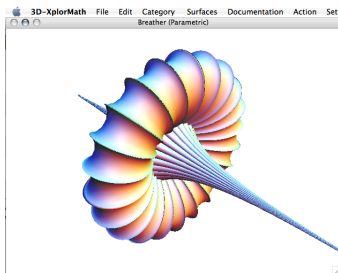
■ Geometría afín

curvas y superficies “en pantalla”



- Geometría afín
- Geometría proyectiva

curvas y superficies “en pantalla”



- Geometría afín
- Geometría proyectiva
- Topología real

De la geometría al álgebra

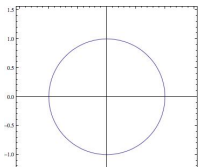
De la geometría al álgebra

Representaciones *paramétricas* e *implícitas* de curvas y superficies

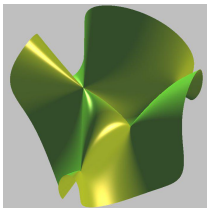
De la geometría al álgebra

Representaciones *paramétricas* e *implícitas* de curvas y superficies

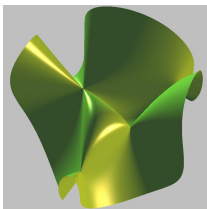
$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \mapsto \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right) \quad x^2 + y^2 - 1 = 0$$



Curvas y superficies *algebraicas*

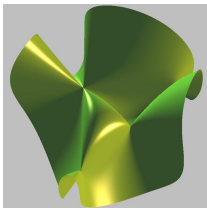


Curvas y superficies *algebraicas*



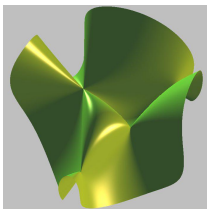
- En CAGD, el input, el proceso y el output aritmético deben ser “finitos”

Curvas y superficies *algebraicas*



- En CAGD, el input, el proceso y el output aritmético deben ser “finitos”
- Codificación finita y “corta” (polinomios / funciones racionales de grado muy bajo)

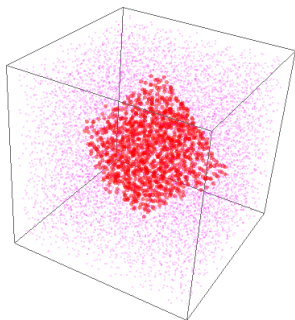
Curvas y superficies *algebraicas*



- En CAGD, el input, el proceso y el output aritmético deben ser “finitos”
- Codificación finita y “corta” (polinomios / funciones racionales de grado muy bajo)
- La precisión se consigue “pegando” superficies (splines, etc.)

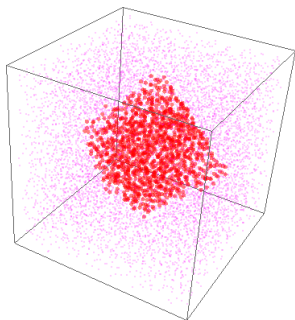
Formas implícitas y paramétricas

Formas implícitas y paramétricas



- Paramétrica: “dibuja” puntos

Formas implícitas y paramétricas



- Paramétrica: “dibuja” puntos
- Implícita: “separa” regiones

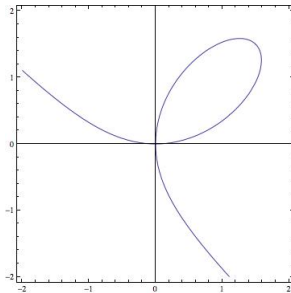
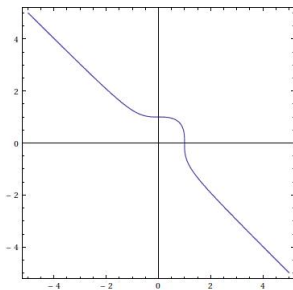
Pasar de una forma a la otra

Pasar de una forma a la otra

es importante

Pasar de una forma a la otra

es importante aunque no siempre es posible



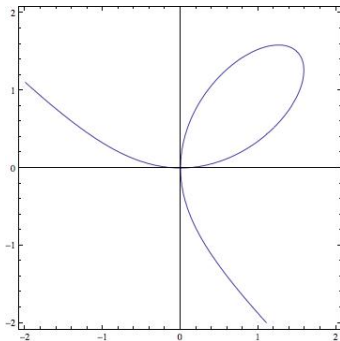
De aquí en adelante...

De aquí en adelante...

(hasta casi el final)

De aquí en adelante...

(hasta casi el final)
implicitación de curvas en el plano



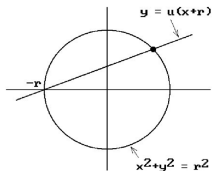
Pasando de afín a proyectivo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \dashrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ t & \longmapsto & \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right) \end{array}$$

Pasando de afín a proyectivo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \dashrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ t & \mapsto & \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right) \end{array}$$

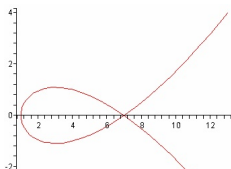
$$\begin{array}{ccc} \phi : \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & \mathbb{P}^2 \\ (t_0 : t_1) & \longmapsto & (t_0^2 + t_1^2 : t_0^2 - t_1^2 : 2t_0t_1) \end{array}$$



Parametrización de Curvas planas

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{P}^1 &\rightarrow \mathbb{P}^2 \\ (t_0 : t_1) &\mapsto (a(t_0, t_1) : b(t_0, t_1) : c(t_0, t_1)) \end{aligned}$$

- $a, b, c \in \mathbb{K}[T_0, T_1]$, homogéneos del mismo grado $d \geq 1$
- $\gcd(a, b, c) = 1$

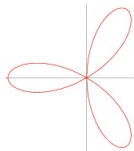


Curvas racionales en el plano

La imagen de ϕ es una **curva racional plana**

Curvas racionales en el plano

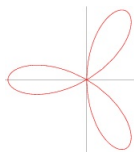
La imagen de ϕ es una **curva racional plana**



- tiene grado d si ϕ es “casi siempre” inyectiva

Curvas racionales en el plano

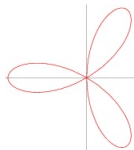
La imagen de ϕ es una **curva racional plana**



- tiene grado d si ϕ es “casi siempre” inyectiva
- tiene género 0 , que quiere decir el número maximal de puntos múltiples $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$

Curvas racionales en el plano

La imagen de ϕ es una **curva racional plana**

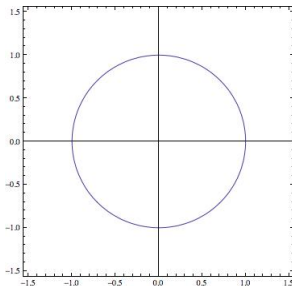


- tiene grado d si ϕ es “casi siempre” inyectiva
- tiene género 0 , que quiere decir el número maximal de puntos múltiples $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$
- calcular su ecuación implícita es relativamente fácil a partir de ϕ

De paramétrico a implícito

De paramétrico a implícito

$$\begin{aligned} \text{Res}_{\underline{T}}(X_2 \cdot a(\underline{T}) - X_0 \cdot c(\underline{T}), X_2 \cdot b(\underline{T}) - X_1 \cdot c(\underline{T})) \\ = \\ -4X_2^2(X_0^2 - X_1^2 - X_2^2) \end{aligned}$$



La Resultante de Sylvester

$$X_2 a(\underline{T}) - X_0 c(\underline{T}) = X_2 T_0^2 - 2X_0 T_0 T_1 + X_2 T_1^2$$

$$X_2 b(\underline{T}) - X_1 c(\underline{T}) = X_2 T_0^2 - 2X_1 T_0 T_1 - X_2 T_1^2$$

$$\text{Res}_{\underline{T}}(X_2 \cdot a(\underline{T}) - X_0 \cdot c(\underline{T}), X_2 \cdot b(\underline{T}) - X_1 \cdot c(\underline{T}))$$

=

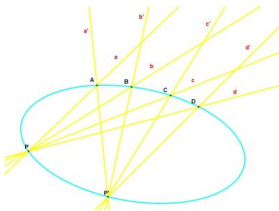
$$\det \begin{pmatrix} X_2 & -2X_0 & X_2 & 0 \\ 0 & X_2 & -2X_0 & X_2 \\ X_2 & -2X_1 & -X_2 & 0 \\ 0 & X_2 & -2X_1 & -X_2 \end{pmatrix}$$

Es una matriz de rectas móviles

$$\mathcal{L}(T_0, T_1, X_0, X_1, X_2) = v_0(\underline{T})X_0 + v_1(\underline{T})X_1 + v_2(\underline{T})X_2$$

tal que

$$\mathcal{L}(T_0, T_1, a(\underline{T}), b(\underline{T}), c(\underline{T})) = 0$$



En nuestro ejemplo...

$$\mathcal{L}_1(\underline{T}, \underline{X}) = -2T_0^2 T_1 X_0 + 0X_1 + (T_0^3 + T_0 T_1^2)X_2$$

$$\mathcal{L}_2(\underline{T}, \underline{X}) = -2T_0 T_1^2 X_0 + 0X_1 + (T_0^2 T_1 + T_1^3)X_2$$

$$\mathcal{L}_3(\underline{T}, \underline{X}) = 0X_0 - 2T_0^2 T_1 X_1 + (T_0^3 - T_0 T_1^2)X_2$$

$$\mathcal{L}_4(\underline{T}, \underline{X}) = 0X_0 - 2T_0 T_1^2 X_1 + (T_0^2 T_1 - T_1^3)X_2$$

En nuestro ejemplo...

$$\mathcal{L}_1(\underline{T}, \underline{X}) = -2T_0^2 T_1 X_0 + 0X_1 + (T_0^3 + T_0 T_1^2)X_2$$

$$\mathcal{L}_2(\underline{T}, \underline{X}) = -2T_0 T_1^2 X_0 + 0X_1 + (T_0^2 T_1 + T_1^3)X_2$$

$$\mathcal{L}_3(\underline{T}, \underline{X}) = 0X_0 - 2T_0^2 T_1 X_1 + (T_0^3 - T_0 T_1^2)X_2$$

$$\mathcal{L}_4(\underline{T}, \underline{X}) = 0X_0 - 2T_0 T_1^2 X_1 + (T_0^2 T_1 - T_1^3)X_2$$

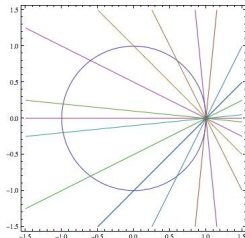
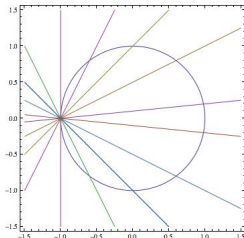
$$\begin{pmatrix} X_2 & -2X_0 & X_2 & 0 \\ 0 & X_2 & -2X_0 & X_2 \\ X_2 & -2X_1 & -X_2 & 0 \\ 0 & X_2 & -2X_1 & -X_2 \end{pmatrix}$$

Se puede hacer en grado 1?

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1(\underline{T}, \underline{X}) &= X_2 & T_0 & -(X_0 + X_1) & T_1 \\ \mathcal{L}_2(\underline{T}, \underline{X}) &= (-X_0 + X_1) & T_0 & +X_2 & T_1\end{aligned}$$

Se puede hacer en grado 1?

$$\begin{array}{l} \mathcal{L}_1(\underline{T}, \underline{X}) = X_2 \\ \mathcal{L}_2(\underline{T}, \underline{X}) = (-X_0 + X_1) \end{array} \quad \begin{array}{l} T_0 \\ T_0 \end{array} \quad \begin{array}{l} -(X_0 + X_1) \\ +X_2 \end{array} \quad \begin{array}{l} T_1 \\ T_1 \end{array}$$



$$\det \begin{pmatrix} X_2 & -X_0 - X_1 \\ -X_0 + X_1 & X_2 \end{pmatrix} = X_1^2 + X_2^2 - X_0^2$$

El módulo de rectas móviles

(Hilbert (1890))

Existe $\mu \leq \frac{d}{2}$ y

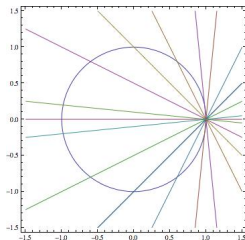
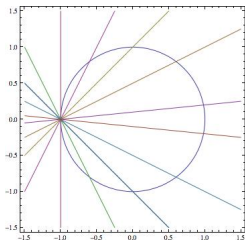
$\mathcal{P}_\mu(\underline{T}, \underline{X})$, $\mathcal{Q}_{d-\mu}(\underline{T}, \underline{X})$ rectas móviles que siguen a ϕ tal que cualquier otra $\mathcal{L}_\delta(\underline{T}, \underline{X})$ que sigue a ϕ es de la forma

$$p_{\delta-\mu}(\underline{T})\mathcal{P}_\mu(\underline{T}, \underline{X}) + q_{\delta-d+\mu}(\underline{T})\mathcal{P}_{d-\mu}(\underline{T}, \underline{X})$$

Versión Geométrica

Existen $\mu \leq \frac{d}{2}$ y otras dos parametrizaciones $\varphi_\mu(t_0, t_1)$, $\psi_{d-\mu}(t_0, t_1)$ de grados μ , $d - \mu$ tales que

$$\phi(t_0, t_1) = \varphi_\mu(t_0, t_1) \wedge \psi_{d-\mu}(t_0, t_1)$$



Para el círculo unitario...

Para el círculo unitario...

$$\varphi_1(t_0 : t_1) = (-t_1 : -t_1 : t_0)$$

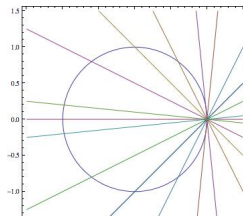
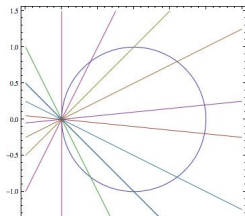
$$\psi_1(t_0 : t_1) = (-t_0 : t_0 : t_1)$$

Para el círculo unitario...

$$\varphi_1(t_0 : t_1) = (-t_1 : -t_1 : t_0)$$

$$\psi_1(t_0 : t_1) = (-t_0 : t_0 : t_1)$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_0 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \\ -t_1 & -t_1 & t_0 \\ -t_0 & t_0 & t_1 \end{vmatrix} = (-t_0^2 - t_1^2, t_1^2 - t_0^2, -2t_0t_1)$$



Hilbert's Syzygy Theorem

Hilbert's Syzygy Theorem

El ideal homogéneo

$I = (a(\underline{T}), b(\underline{T}), c(\underline{T})) \subset \mathbb{K}[T_0, T_1]$ tiene una **resolución de Hilbert-Burch** del tipo

$$0 \rightarrow \mathbb{K}[\underline{T}]^2 \xrightarrow{(\varphi_\mu, \psi_{d-\mu})^t} \mathbb{K}[\underline{T}]^3 \xrightarrow{(a,b,c)} \mathbb{K}[\underline{T}]$$

Hilbert's Syzygy Theorem

El ideal homogéneo

$I = (a(T), b(T), c(T)) \subset \mathbb{K}[T_0, T_1]$ tiene una **resolución de Hilbert-Burch** del tipo

$$0 \rightarrow \mathbb{K}[T]^2 \xrightarrow{(\varphi_\mu, \psi_{d-\mu})^t} \mathbb{K}[T]^3 \xrightarrow{(a,b,c)} \mathbb{K}[T]$$

Una μ -base de la parametrización es una base de $\text{Syz}(I)$ como $\mathbb{K}[T]$ -módulo

¿Por qué interesan estas bases?

¿Por qué interesan estas bases?

Ecuación implícita

=

$$\text{Res}_{\underline{T}}(\mathcal{P}_{\mu}(\underline{T}, \underline{X}), \mathcal{Q}_{d-\mu}(\underline{T}, \underline{X}))$$

¿Por qué interesan estas bases?

Ecuación implícita

=

$$\text{Res}_{\underline{T}}(\mathcal{P}_{\mu}(\underline{T}, \underline{X}), \mathcal{Q}_{d-\mu}(\underline{T}, \underline{X}))$$

Busé-D (2012)

Si B es una matriz de Bézout y S una de Sylvester, entonces

$$X_2 S(\mathcal{P}_{\mu}(\underline{T}, \underline{X}), \mathcal{Q}_{d-\mu}(\underline{T}, \underline{X})) = M \cdot B(aX_2 - cX_0, bX_2 - cX_1),$$

con $M \in \mathbb{K}^{d \times d}$ inversible

Un poco de historia

- Sederberg, Saito, Qi, Klimaszewski. (1994), **Curve implicitization using moving lines**, Computer Aided Geometric Design 11, 687–706
- Sederberg, Chen. **Implicitization using moving curves and surfaces**. Proceedings of SIGGRAPH 1995, 301–308.
- Sederberg, Goldman, Du. (1997), **Implicitizing rational curves by the method of moving algebraic curves**, J. Symbolic Comp. 23, 153–175
- Cox., Sederberg, Chen. (1998), **The moving line ideal basis for planar rational curves**, Computer Aided Geometric Design 15, 803–827
- ...

Cónicas móviles, cúbicas móviles,...

Cónicas móviles, cúbicas móviles,...

$$a_j(\underline{T})X_0^2 + b_j(\underline{T})X_0X_1 + c_j(\underline{T})X_0X_2 + d_j(\underline{T})X_1^2 + e_j(\underline{T})X_1X_2 + f_j(\underline{T})X_2^2$$

es una **cónica móvil** que sigue a la parametrización
si

Cónicas móviles, cúbicas móviles,...

$$a_j(\underline{T})X_0^2 + b_j(\underline{T})X_0X_1 + c_j(\underline{T})X_0X_2 + d_j(\underline{T})X_1^2 + e_j(\underline{T})X_1X_2 + f_j(\underline{T})X_2^2$$

es una **cónica móvil** que sigue a la parametrización
si

$$a_j(\underline{T})a(\underline{T})^2 + b_j(\underline{T})a(\underline{T})b(\underline{T}) + c_j(\underline{T})a(\underline{T})c(\underline{T}) + d_j(\underline{T})b(\underline{T})^2 + e_j(\underline{T})b(\underline{T})c(\underline{T}) + f_j(\underline{T})c(\underline{T})^2 = 0$$

El método de las curvas móviles

El método de las curvas móviles

La ecuación implícita se puede calcular como un determinante **pequeño** con

algunas rectas móviles
algunas cónicas móviles
algunas cúbicas móviles
...

El método de las curvas móviles

La ecuación implícita se puede calcular como un determinante **pequeño** con

algunas rectas móviles
algunas cónicas móviles
algunas cúbicas móviles
...

cuanto **mas concentradas** están las singularidades, más **simple** es la descripción del determinante

Ejemplo (Sederberg & Chen 1995)

Ejemplo (Sederberg & Chen 1995)

La ecuación implícita de una cuártica se puede escribir como un determinante 2×2 .

Ejemplo (Sederberg & Chen 1995)

La ecuación implícita de una cuártica se puede escribir como un determinante 2×2 .

Si la curva tiene un punto triple, una fila es lineal y la otra, cúbica

Ejemplo (Sederberg & Chen 1995)

La ecuación implícita de una cuártica se puede escribir como un determinante 2×2 .

Si la curva tiene un punto triple, una fila es lineal y la otra, cúbica

Si no, las dos filas son cuadráticas

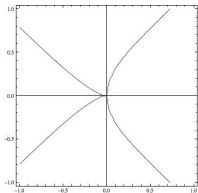
Una cuártica con punto triple

Una cuártica con punto triple

$$\begin{aligned}\phi(t_0, t_1) &= (t_0^4 - t_1^4 : -t_0^2 t_1^2 : t_0 t_1^3) \\ F(X_0, X_1, X_2) &= X_2^4 - X_1^4 - X_0 X_1 X_2^2\end{aligned}$$

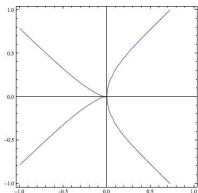
Una cuártica con punto triple

$$\phi(t_0, t_1) = (t_0^4 - t_1^4 : -t_0^2 t_1^2 : t_0 t_1^3)$$
$$F(X_0, X_1, X_2) = X_2^4 - X_1^4 - X_0 X_1 X_2^2$$



Una cuártica con punto triple

$$\begin{aligned}\phi(t_0, t_1) &= (t_0^4 - t_1^4 : -t_0^2 t_1^2 : t_0 t_1^3) \\ F(X_0, X_1, X_2) &= X_2^4 - X_1^4 - X_0 X_1 X_2^2\end{aligned}$$



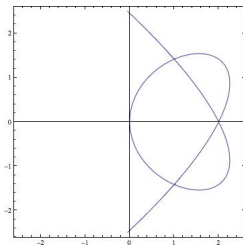
$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{1,1}(\underline{T}, \underline{X}) &= T_0 X_2 + T_1 X_1 \\ \mathcal{L}_{1,3}(\underline{T}, \underline{X}) &= T_0 (X_1^3 + X_0 X_2^2) + T_1 X_2^3 \\ &\quad \begin{pmatrix} X_2 & X_1 \\ X_1^3 + X_0 X_2^2 & X_2^3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Una cuártica sin puntos triples

$$\phi(t_0 : t_1) = (t_0^4 : 6t_0^2t_1^2 - 4t_1^4 : 4t_0^3t_1 - 4t_0t_1^3)$$
$$F(\underline{X}) = X_2^4 + 4X_0X_1^3 + 2X_0X_1X_2^2 - 16X_0^2X_1^2 - 6X_0^2X_2^2 + 16X_0^3X_1$$

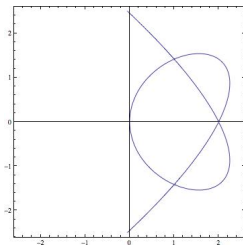
Una cuártica sin puntos triples

$$\phi(t_0 : t_1) = (t_0^4 : 6t_0^2t_1^2 - 4t_1^4 : 4t_0^3t_1 - 4t_0t_1^3)$$
$$F(\underline{X}) = X_2^4 + 4X_0X_1^3 + 2X_0X_1X_2^2 - 16X_0^2X_1^2 - 6X_0^2X_2^2 + 16X_0^3X_1$$



Una cuártica sin puntos triples

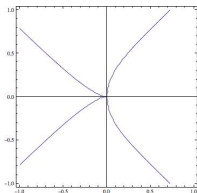
$$\phi(t_0 : t_1) = (t_0^4 : 6t_0^2t_1^2 - 4t_1^4 : 4t_0^3t_1 - 4t_0t_1^3)$$
$$F(\underline{X}) = X_2^4 + 4X_0X_1^3 + 2X_0X_1X_2^2 - 16X_0^2X_1^2 - 6X_0^2X_2^2 + 16X_0^3X_1$$



$$\mathcal{L}_{1,2}(\underline{T}, \underline{X}) = T_0(X_1X_2 - X_0X_2) + T_1(-X_2^2 - 2X_0X_1 + 4X_0^2)$$
$$\tilde{\mathcal{L}}_{1,2}(\underline{T}, \underline{X}) = T_0(X_1^2 + \frac{1}{2}X_2^2 - 2X_0X_1) + T_1(X_0X_2 - X_1X_2)$$

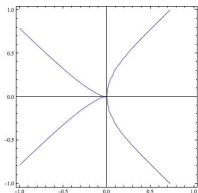
Singularidades concentradas...

Singularidades concentradas...



Si la curva tiene un punto de multiplicidad $d - 1$

Singularidades concentradas...



Si la curva tiene un punto de multiplicidad $d - 1$ la ecuación implícita se consigue como un determinante

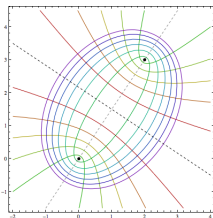
$$\begin{vmatrix} L_1(\underline{X}) & L'_1(\underline{X}) \\ Q_{d-1}(\underline{X}) & Q'_{d-1}(\underline{X}) \end{vmatrix}$$

Para $d \gg 0$, no sabemos...

Para $d \gg 0$, no sabemos...

¿qué rectas móviles?
¿qué cónicas móviles?
¿qué cúbicas móviles?

...



El Álgebra de Rees asociada a la parametrización

Cox, D. **The moving curve ideal and the Rees algebra.** Theoret. Comput. Sci. 392 (2008), no. 1–3, 23–36.

El Álgebra de Rees asociada a la parametrización

Cox, D. **The moving curve ideal and the Rees algebra.** Theoret. Comput. Sci. 392 (2008), no. 1–3, 23–36.

$\mathcal{K}_\phi := \{\text{curvas móviles que siguen a } \phi\} = \text{núcleo de}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[T_0, T_1, X_0, X_1, X_2] & \rightarrow & \mathbb{K}[T_0, T_1, s] \\ T_i & \mapsto & T_i \\ X_0 & \mapsto & a(\underline{T})s \\ X_1 & \mapsto & b(\underline{T})s \\ X_2 & \mapsto & c(\underline{T})s \end{array}$$

El Álgebra de Rees asociada a la parametrización

Cox, D. **The moving curve ideal and the Rees algebra.** Theoret. Comput. Sci. 392 (2008), no. 1–3, 23–36.

$\mathcal{K}_\phi := \{\text{curvas móviles que siguen a } \phi\} = \text{núcleo de}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[T_0, T_1, X_0, X_1, X_2] & \rightarrow & \mathbb{K}[T_0, T_1, s] \\ T_i & \mapsto & T_i \\ X_0 & \mapsto & a(\underline{T})s \\ X_1 & \mapsto & b(\underline{T})s \\ X_2 & \mapsto & c(\underline{T})s \end{array}$$

“El ideal curvas móviles que siguen a ϕ ”

El método de las curvas móviles

El método de las curvas móviles

La ecuación implícita se obtendría como el determinante de una matriz

El método de las curvas móviles

La ecuación implícita se obtendría como el determinante de una matriz

...

algunos generadores minimales de \mathcal{K}_ϕ
y relaciones entre ellos

...

El método de las curvas móviles

La ecuación implícita se obtendría como el determinante de una matriz

...

algunos generadores minimales de \mathcal{K}_ϕ
y relaciones entre ellos

...

Cuanto más concentradas están las singularidades,
más simple es la descripción de \mathcal{K}_ϕ

Nuevo Problema

Nuevo Problema

Calcular un sistema minimal de generadores de \mathcal{K}_ϕ

Nuevo Problema

Calcular un sistema minimal de generadores de \mathcal{K}_ϕ para **cualquier** ϕ

Nuevo Problema

Calcular un sistema minimal de generadores de \mathcal{K}_ϕ para **cualquier** ϕ

Se sabe para

- $\mu = 1$ (Hong-Simis-Vasconcelos, Cox-Hoffmann-Wang, Busé, Cortadellas-**D**)
- $\mu = 2$ (Busé, Cortadellas-**D**, Kustin-Polini-Ulrich)
- $(\mathcal{K}_\phi)_{(1,2)} \neq 0$ (Cortadellas- **D**)
- Parametrizaciones monomiales (Cortadellas-**D**)

Una primera aproximación

Una primera aproximación

Calcular $n_0(\mathcal{K}_\phi)$, el número de generadores minimales de \mathcal{K}_ϕ

Una primera aproximación

Calcular $n_0(\mathcal{K}_\phi)$, el número de generadores minimales de \mathcal{K}_ϕ

Mostrar que si ϕ es “más singular” que ϕ' entonces $n_0(\mathcal{K}_\phi) \leq n_0(\mathcal{K}_{\phi'})$

Ejemplo: $\mu = 2$

Ejemplo: $\mu = 2$

La curva tiene o bien

- un punto de multiplicidad $d - 2$

$$n_0 = \mathcal{O}\left(\frac{d}{2}\right)$$

(Cortadellas-D, Kustin-Polini-Ulrich)

Ejemplo: $\mu = 2$

La curva tiene o bien

- un punto de multiplicidad $d - 2$

$$n_0 = \mathcal{O}\left(\frac{d}{2}\right)$$

(Cortadellas-D, Kustin-Polini-Ulrich)

- o solo puntos dobles

$$n_0 = \mathcal{O}\left(\frac{d^2}{2}\right) \text{ (Busé)}$$



Otros problemas

Otros problemas

- Describir **todos** los posibles valores y parámetros de los que depende la función $n_0(\mathcal{K}_\phi)$

Otros problemas

- Describir **todos** los posibles valores y parámetros de los que depende la función $n_0(\mathcal{K}_\phi)$
- ¿Existe un valor **genérico** para $n_0(\mathcal{K}_\phi)$?

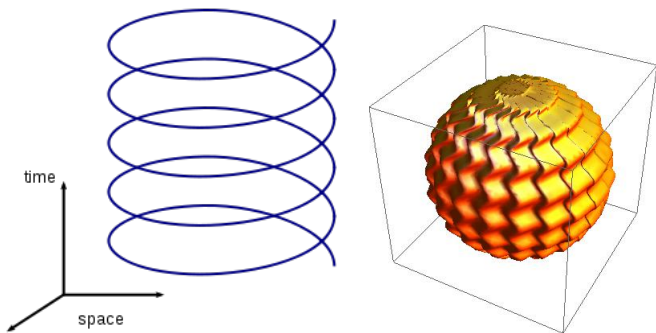
Otros problemas

- Describir **todos** los posibles valores y parámetros de los que depende la función $n_0(\mathcal{K}_\phi)$
- ¿Existe un valor **genérico** para $n_0(\mathcal{K}_\phi)$? ¿Es este el valor máximo?

Otros problemas

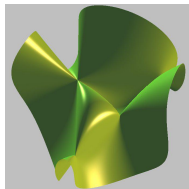
- Describir **todos** los posibles valores y parámetros de los que depende la función $n_0(\mathcal{K}_\phi)$
- ¿Existe un valor **genérico** para $n_0(\mathcal{K}_\phi)$? ¿Es este el valor máximo?
- ¿En qué “regiones” es $n_0(\mathcal{K}_\phi)$ constante?

¿Solo curvas en el plano?



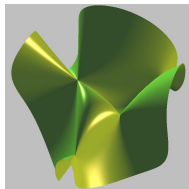
Superficies racionales

$$\begin{aligned} \phi_S : \quad \mathbb{P}^2 & \dashrightarrow \mathbb{P}^3 \\ \underline{t} = (t_0 : t_1 : t_2) & \longmapsto (a(\underline{t}) : b(\underline{t}) : c(\underline{t}) : d(\underline{t})) \end{aligned}$$



Superficies racionales

$$\begin{aligned} \phi_S : \quad \mathbb{P}^2 & \dashrightarrow \mathbb{P}^3 \\ \underline{t} = (t_0 : t_1 : t_2) & \longmapsto (a(\underline{t}) : b(\underline{t}) : c(\underline{t}) : d(\underline{t})) \end{aligned}$$



¡Hay puntos base!

Implicitación via

- Resultantes Macaulay, Dixon, Gelfand-Kapranov-Zelevinskii, ...

Implicitación via

- Resultantes Macaulay, Dixon, Gelfand-Kapranov-Zelevinskii, ...
- Determinantes de complejos Botbol, Busé, Chardin, Jouanolou, ...

Implicitación via

- Resultantes Macaulay, Dixon, Gelfand-Kapranov-Zelevinskii, ...
- Determinantes de complejos Botbol, Busé, Chardin, Jouanolou, ...
- Matrices de representación Botbol, Busé, Chardin, Dickenstein, ...

Implicitación via

- Resultantes Macaulay, Dixon, Gelfand-Kapranov-Zelevinskii, ...
- Determinantes de complejos Botbol, Busé, Chardin, Jouanolou, ...
- Matrices de representación Botbol, Busé, Chardin, Dickenstein, ...

Planos móviles, cuádricas móviles,..

Planos móviles, cuádricas móviles,..

(Sederberg-Chen, Cox-Goldman-Zhang, Busé-Cox, **D**,
D-Khetan)

Planos móviles, cuádricas móviles, ..

(Sederberg-Chen, Cox-Goldman-Zhang, Busé-Cox, **D**,
D-Khetan)

Diferencias

- El módulo de planos móviles no es libre

Planos móviles, cuádricas móviles, ..

(Sederberg-Chen, Cox-Goldman-Zhang, Busé-Cox, **D**,
D-Khetan)

Diferencias

- El módulo de planos móviles no es libre
- Hay un concepto de μ -base dado por Chen-Cox-Liu.

No es fácil de calcular

Algunos resultados

Algunos resultados

Implicitación

Algunos resultados

Implicitación

- Superficies cuadráticas y cúbicas
(Chen-Shen-Deng)

Algunos resultados

Implicitación

- Superficies cuadráticas y cúbicas
(Chen-Shen-Deng)
- Superficies de Steiner (Wang-Chen)

Algunos resultados

Implicitación

- Superficies cuadráticas y cúbicas (Chen-Shen-Deng)
- Superficies de Steiner (Wang-Chen)
- Superficies de revolución (Shi-Goldman)
- ...

Algunos resultados

Implicitación

- Superficies cuadráticas y cúbicas (Chen-Shen-Deng)
- Superficies de Steiner (Wang-Chen)
- Superficies de revolución (Shi-Goldman)
- ...

Álgebras de Rees

Algunos resultados

Implicitación

- Superficies cuadráticas y cúbicas (Chen-Shen-Deng)
- Superficies de Steiner (Wang-Chen)
- Superficies de revolución (Shi-Goldman)
- ...

Álgebras de Rees

- Superficies “monoid” (Cortadellas - D)

Algunos resultados

Implicitación

- Superficies cuadráticas y cúbicas (Chen-Shen-Deng)
- Superficies de Steiner (Wang-Chen)
- Superficies de revolución (Shi-Goldman)
- ...

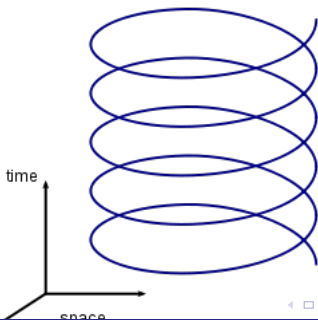
Álgebras de Rees

- Superficies “monoid” (Cortadellas - **D**)
- Superficies *de Jonquières* (Hassanzadeh- Simis)

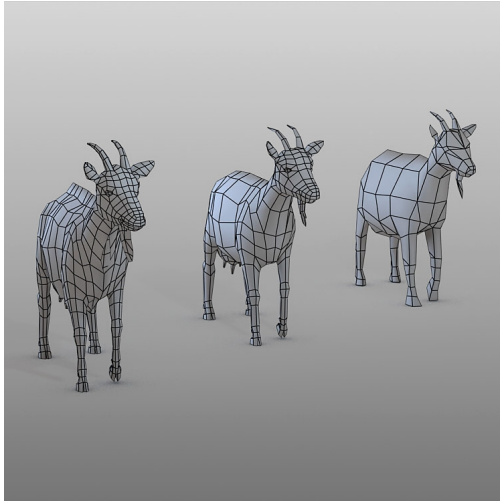
Teoría análoga para

Curvas espaciales

$$\phi_C : \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$$
$$\underline{t} = (t_0 : t_1) \longmapsto (a(\underline{t}) : b(\underline{t}) : c(\underline{t}) : d(\underline{t}))$$



Unos chivos



Algebraic Representations in Computer-Aided Design for complex Shapes



ARCADES

Marie Skłodowska-Curie European Training Network,
Jan 2016 – Dec 2019.

Members: ATHENA Research & Innovation Center
(Greece, coordinator),
U. Barcelona (Spain), INRIA (France),
J. Kepler U. Linz (Austria), SINTEF (Norway),
U. Strathclyde (UK), T.U. Wien (Austria),
Evolute GmbH (Austria).

Hellenic Register of Shipping S.A. (Greece),
Hue AS (Norway), Missler Software (France),
RISC-Software (Austria), ITI TranscenData (UK).

13 Open Phd Positions

<http://eega.di.uoa.gr/projects/main.html#arcades>
(emiris@athena-innovation.gr)

ARCADES aims at disrupting the traditional paradigm in Computer-Aided Design (CAD) by exploiting cutting-edge research in mathematics and algorithm design. Geometry is now a critical tool in a large number of key applications; somewhat surprisingly, however, several approaches of the CAD industry are outdated, and 3D geometry processing is becoming increasingly the weak link. This is alarming in sectors where CAD faces new challenges arising from fast point acquisition, big data, and mobile computing, but also in robotics, simulation, animation, fabrication and manufacturing where CAD strives to address crucial societal and market needs. The challenge taken up by ARCADES is to invert the trend of CAD industry lagging behind mathematical breakthroughs and to build the next generation of CAD software based on strong foundations from algebraic geometry, differential geometry, scientific computing, and algorithm design. Our game-changing methods lead to real-time modelers for architectural geometry and visualisation, to isogeometric and design-through-analysis software for shape optimisation, and marine design & hydrodynamics, and to tools for motion design, robot kinematics, path planning, and control of machining tools.



ARCADES

Algebraic Representations in Computer-Aided Design
for complex Shapes

Marie Skłodowska-Curie European Training Network,
2016 – 2019

ATHENA Research & Innovation Center, U. Barcelona, INRIA, J. Kepler
U. Linz, SINTEF, U. Strathclyde, T.U. Wien, Evolute GmbH



13 Open Phd Positions (2016)

<http://erga.di.uoa.gr/projects/main.html#arcades>
(emiris@athena-innovation.gr)

Computational Algebra, Algebraic Geometry & Applications



Conferencia en honor a Alicia Dickenstein

Buenos Aires, 1 al 3 de agosto de 2016

<http://mate.dm.uba.ar/~coalaga/>



Moltes Gràcies!!



<http://atlas.mat.ub.es/personals/dandrea>